

高阶正定守恒的中心约束多矩有限体积平流模式*

舒 谦¹ 唐 杰^{2,3} 陈春刚⁴ 肖 锋⁵ 沈学顺^{2,3}
周立隆^{2,3} 李泽椿³ 朱克云¹ 李兴良^{2,3}
SHU Qian¹ TANG Jie^{2,3} CHEN Chungang⁴ XIAO Feng⁵ SHEN Xueshun^{2,3}
ZHOU Lilong^{2,3} LI Zechun³ ZHU Keyun¹ LI Xingliang^{2,3}

1. 成都信息工程大学, 成都, 610225

2. 中国气象局数值预报中心, 北京, 100081

3. 国家气象中心, 北京, 100081

4. 西安交通大学, 西安, 710049

5. 日本东京工业大学机械工程系, 东京, 152-8850

1. *Chengdu University of Information Technology, Chengdu 610225, China*

2. *Numerical Weather Prediction Center of CMA, Beijing 100081, China*

3. *National Meteorological Center, Beijing 100081, China*

4. *Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China*

5. *Department of Mechanical engineering, Tokyo Institute of Technology, Tokyo 152-8850, Japan*

2019-11-22 收稿, 2020-03-12 改回.

舒谦, 唐杰, 陈春刚, 肖锋, 沈学顺, 周立隆, 李泽椿, 朱克云, 李兴良. 2020. 高阶正定守恒的中心约束多矩有限体积平流模式. 气象学报, 78(4): 665-678

Shu Qian, Tang Jie, Chen Chungang, Xiao Feng, Shen Xueshun, Zhou Lilong, Li Zechun, Zhu Keyun, Li Xingliang. 2020. A high order positive-definite conservative multi-moment center constrained finite volume transport model. *Acta Meteorologica Sinica*, 78(4):665-678

Abstract A two dimensional 3rd order positive-definite conservative advection model is developed in this study based on the novel 3-point multi-moment constrained finite-volume scheme for uniform points with center constraints (MCV3_UPCC). In the context of 3-point multi-moment finite volume method, three equidistant solution points are defined within a single cell and the time evolution equations can be obtained by flux form formulation. The multi-moment constraints in this novel scheme are imposed at the cell center on the point value, the first and second order derivatives, and a polynomial of 4th degree can then be reconstructed in a single cell. The resulting MCV3_UPCC scheme has 3rd order accuracy and ensures the exact numerical conservation due to the continuity of the flux function at cell interfaces. To suppress the numerical oscillations and the positivity of certain physical quantities, the bound-preserving limiting projection is introduced into the new MCV3_UPCC scheme, which satisfies the minimum and maximum principle. The new positive-definite conservative advection model is validated by widely used benchmarks. The presented transport model has a good accuracy in comparison with other existing high-order models, and it has the potential to be applied in real moist transport model.

Key words Advection scheme, Multi-moment finite volume method, Positive-definite and conservation, High order scheme

* 资助课题: 国家重点研发计划项目(2017YFA0603901、2017YFC1501901)、北京市杰出青年科学家基金项目(JQ18001)。

作者简介: 舒谦, 主要从事数值天气预报研究。E-mail: 516189471@qq.com

通信作者: 李兴良, 从事数值预报模式研究和数值算法应用研发。E-mail: lixiang@cma.gov.cn

摘 要 采用新的均匀三点中心约束多矩有限体积方法(3-point Multi-moment Constrained finite-Volume scheme for Uniform Points with Center Constraints, MCV3_UPCC), 发展了一个三阶正定守恒的平流模式。三点多矩有限体积方法在单网格内定义等距的3个自由度, 采用多矩约束条件并通过控制方程获得时间演变方程。新的三点中心约束多矩方法能在单网格内采用等距的3个点值及中心一阶、二阶导数作为约束条件进行空间4次多项式数值重构, 获得3个自由度的时间演变方程; 所构建的新数值方案具有三阶精度, 边界通量连续性保证了其数值严格守恒。为了抑制该方法的非物理数值振荡, 引入了边界保型限制器技术, 它能够把数值解控制在既定物理场最小值(最小值为0时则保持数值正定)与最大值之间。数值试验表明新发展的三阶平流模式具有良好的计算精度, 能够严格保持数值解的正定性和守恒性, 同其他高精度平流模式相当, 在实际大气模式水汽等平流输送应用中具备良好的发展潜力。

关键词 平流方案, 多矩有限体积法, 正定守恒, 高精度方案

中图法分类号 P435

1 引 言

大气中水物质(如水汽、云水等)分布复杂, 具有梯度大、不连续、多相变等特点, 使得数值模拟水汽等输送过程容易产生非物理的负值及数值振荡。因而, 采用良好的数值方法精确地模拟水物质的分布与输送, 对数值天气预报输送模式的改进, 特别是准确模拟降水过程, 具有重要意义。

低精度的一阶迎风格式不产生数值振荡, 但是数值耗散大, 满足不了实际高精度模式的需求。高阶(大于一阶)平流算法精度较高, 但是会产生非物理数值振荡, 导致水物质输送产生较大误差(沈学顺等, 2011), 例如基于欧拉方法的Lax-Friedrich方法、Lax-Wendroff方法、MacCormack方法等。为了抑制数值振荡, 中外学者提出了一系列的方法, 例如通量修正(Book, et al, 1975)方案, 基于Godunov方法的MUSCL(Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws; van Leer, 1977)方案, 以及基于分段抛物线函数的PPM(Piecewise Parabolic Method; Colella, et al, 1984)方案, 两步保型平流方案(TSPAS)(Yu, 1994)等。

与欧拉方法相比, 半拉格朗日方案(Robert, 1981)可取较大的时间步长, 效率较高, 数值耗散低, 被广泛应用于大气数值平流模式。Bermejo等(1992)设计出一个混合算法使传统的半拉格朗日方法转化为准单调的半拉格朗日(QMSL)方法, 该方法在强梯度、不连续区域低阶插值不能保证守恒。Zerroukat等(2002)提出的守恒高效型半拉格朗日方案(SLICE)和Lauritzen等(2009)提出的守恒型半拉格朗日多示踪物方案(CSLAM), Xiao等(2002)提出的分段有理数插值(PRM)方案和CSLR(Conservative Semi-Lagrangian with Rational

function)方案, 都能保证平流方案的守恒性。为了获得良好的计算精度, Guo等(2014)把半拉格朗日方法和不连续伽辽金算法结合, 设计出了SLDG(Semi-Lagrangian Discontinuous Galerkin)方案, 该方案能够保证守恒, 精度大于二阶, 并且能通过限制器去除数值振荡。

多矩有限体积方法(Multi-moment finite volume scheme)是近年提出的一种新的有限体积方法(Yabe, et al, 1991, 2001; Xiao, et al, 2001, 2006, 2013; Xiao, 2004; Ii, et al, 2007, 2009; Chen, et al, 2008), 该方法引入多矩概念, 如体积积分平均值和点值、导数值进行局地高阶重构, 通过控制方程更新预报变量时间向前积分(Li, et al, 2015; Chen, et al, 2014); 其积分平均值约束条件能严格保证数值守恒, 是传统有限体积方法的拓展。文中采用的新三点中心约束多矩有限体积方法(3-point Multi-moment Constrained finite-Volume scheme for Uniform Points with Center Constraints, MCV3_UPCC; Xiao, 2012)能够基于单个网格构造高阶插值多项式, 获得高阶计算精度, 并且该格式计算简洁、计算模板紧致。该方案与原三阶多矩有限体积方案(MCV3)(Ii, et al, 2009)相比, 具有网格边界不连续, 计算精度高, 不用求解边界导数黎曼问题, 计算效率高等特点。和其他高阶方法一样, 多矩约束有限体积方法在非光滑解附近仍会出现数值振荡, 并可能导致负值。文中采用边界保型(BP)限制器对其进行修正, 保持该方案的正定性, 以期设计一种可以用于大气模式的高精度平流输送模式。

2 均匀三点中心约束多矩有限体积方法

文中采用三点均匀中心约束多矩有限体积法, 该方案在单个网格内进行局地高阶通量重构, 约束

条件施加在单元网格中心点值及其一阶和二阶导数上, 保证单元边界处通量函数的连续性, 通过控制方程得到点值矩的时间演变方程。该方法计算精度高, 严格保证数值守恒。MCV3 方案局地高阶通量重构约束限制发生在单元网格界面 (Li, et al, 2009), 与之相比, MCV3_UPCC 方案约束主要体现在单元网格中心上, 具有较高的精度和允许更大的 CFL (Courant-Friedrich-Lewy) 条件, 并且计算模板紧致。针对格式产生的数值振荡, 引入边界保型限制器, 该限制器优势在于不影响试验误差和精度的同时, 抑制间断处的数值振荡并保持正定。

2.1 均匀三点中心约束多矩有限体积方法数值离散

考虑一维守恒平流方程

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

式中, q 为守恒变量, $f = uq$ 为 q 的通量函数, u 为速度。

在单元 $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ 内三点多矩格式定义 3 个点值, 其位置如图 1 所示, 每个点的未知量点值为

$$q_{i1}(t) = q(x_{i1}, t), \quad q_{i2}(t) = q(x_{i2}, t), \quad q_{i3}(t) = q(x_{i3}, t) \quad (2)$$

$$x_{i1} = x_{i-1/2}, \quad x_{i2} = (x_{i-1/2} + x_{i+1/2})/2, \quad x_{i3} = x_{i+1/2} \quad (3)$$

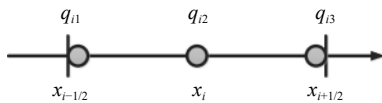


图 1 一维单元上的矩和节点值

Fig. 1 The locations of unknowns in one dimension

引入局地坐标 ξ , 单元网格内它与全局坐标 x 的线性关系如下

$$\begin{aligned} \xi &= 2 \frac{x - x_{i-1/2}}{\Delta x_i} - 1 & x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}], \\ \Delta x_i &= x_{i+1/2} - x_{i-1/2} & \xi \in [-1, 1] \end{aligned} \quad (4)$$

假定连续的通量函数 $\tilde{f}(\xi)$ 已知, 则单元网格内未知变量 q_{il} 的时间演变方程为

$$\frac{dq_{il}}{dt} = - \left(\frac{d\xi}{dx} \right)_i \left(\frac{d\tilde{f}_i(\xi)}{d\xi} \right)_{il} = - \left(\frac{d\xi}{dx} \right)_i \tilde{f}_{\xi il} \quad l = 1, 2, 3 \quad (5)$$

为了求解方程 (5), 需要寻找上述假定连续的修正通量函数 $\tilde{f}_i(\xi)$ 。

首先, 通过单元内的 3 个点值, 利用拉格朗日

多项式构造出在单个网格内不连续的主重构函数 $f_i(\xi)$, 表达式为 $f_i(\xi) = u_i p_i(\xi)$, u_i 为速度, $p_i(\xi)$ 为关于索引单元 i 内点值的拉格朗日插值多项式, 主重构函数 $f_i(\xi)$ 表达式如下

$$f_i(\xi) = \sum_{l=1}^3 f_{il} \phi_{il}(\xi) \quad (6)$$

$$\phi_{il} = \prod_{k=1, k \neq l}^3 \frac{\xi - \xi_{ik}}{\xi_{il} - \xi_{ik}} \quad (7)$$

式中, $\phi_{il}(\xi)$ 是拉格朗日基函数, $f_{il} = u_i q_{il}$, 其中 $l = 1, 2, 3$ 为主重构函数对应点处的通量。主重构多项式在单元网格内是连续的, 然而单元网格间的界面如 $x = x_{i-1/2}$ 的守恒量 q_i 和通量 f_i 不连续。通过求解常规近似黎曼问题, 可以得到边界通量

$$f_i^B(1) = \frac{1}{2} [(f_i^+ + f_{i+1}^-) - |u|(q_i^+ - q_{i+1}^-)] \quad (8)$$

式中, f_i^+ 、 f_{i+1}^- 为单元边界 $x = x_{i+1/2}$ 处的左、右通量, q_i^+ 、 q_{i+1}^- 为单元边界 $x = x_{i+1/2}$ 处的左、右守恒量。

利用单元边界连续的边界通量 $f_i^B(\pm 1)$, 主重构多项式第 i 单元网格内的中心点通量函数值 $f_i(0)$ 及其一阶导数值 $f_{\xi i}^{[1]}(0)$ 和二阶导数值 $f_{\xi i}^{[2]}(0)$ 等约束条件, 连续的修正通量函数 $\tilde{f}_i(\xi)$ 满足

$$\begin{cases} \tilde{f}_i(-1) = f_i^B(-1) \\ \tilde{f}_i(1) = f_i^B(1) \\ \tilde{f}_i(0) = f_i(0) \\ \tilde{f}_{\xi i}^{[1]}(0) = f_{\xi i}^{[1]}(0) \\ \tilde{f}_{\xi i}^{[2]}(0) = f_{\xi i}^{[2]}(0) \end{cases} \quad (9)$$

用构建埃尔米特 (Hermite) 四次多项式

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i(\xi) &= \frac{1}{2} (f_i^B(-1) + f_i^B(1) - f_{i1} - f_{i3}) \xi^4 + \\ &\quad \frac{1}{2} (f_i^B(1) - f_i^B(-1) + f_{i1} - f_{i3}) \xi^3 + \\ &\quad \frac{1}{2} (f_{i1} - 2f_{i2} + f_{i3}) \xi^2 + \frac{1}{2} (f_{i3} - f_{i1}) \xi + f_{i2} \end{aligned} \quad (10)$$

对多项式求导得

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\xi i}(\xi) &= 2(f_i^B(-1) + f_i^B(1) - f_{i1} - f_{i3}) \xi^3 + \\ &\quad \frac{3}{2} (f_i^B(1) - f_i^B(-1) + f_{i1} - f_{i3}) \xi^2 + \\ &\quad (f_{i1} - 2f_{i2} + f_{i3}) \xi + \frac{1}{2} (f_{i3} - f_{i1}) \end{aligned} \quad (11)$$

代入单元内 3 个点值, 分别为局地坐标 $\xi = -1, 0, 1$ 处, 得到

$$\begin{cases} \tilde{f}_{\xi i1} = \tilde{f}_{\xi i}(\xi_1) = 2(f_{i1} + f_{i2}) - \frac{1}{2}(7f_i^B(-1) + f_i^B(1)) \\ \tilde{f}_{\xi i2} = \tilde{f}_{\xi i}(\xi_2) = \frac{1}{2}(f_{i3} - f_{i1}) \\ \tilde{f}_{\xi i3} = \tilde{f}_{\xi i}(\xi_3) = -2(f_{i2} + f_{i3}) + \frac{1}{2}(f_i^B(-1) + 7f_i^B(1)) \end{cases} \quad (12)$$

从而得到更新后的3个点值

$$\begin{cases} \frac{dq_{i1}}{dt} = -\left(\frac{d\xi}{dx}\right)_i \tilde{f}_{\xi i1} \\ \frac{dq_{i2}}{dt} = -\left(\frac{d\xi}{dx}\right)_i \tilde{f}_{\xi i2} \\ \frac{dq_{i3}}{dt} = -\left(\frac{d\xi}{dx}\right)_i \tilde{f}_{\xi i3} \end{cases} \quad (13)$$

为了验证该方案的守恒性, 积分守恒方程的平流项得到

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^3 \left(\tilde{f}_{\xi il} \int_{-1}^1 \phi_{il}(\xi) d\xi \right) &= \frac{1}{3} \tilde{f}_{\xi i1} + \frac{4}{3} \tilde{f}_{\xi i2} + \frac{1}{3} \tilde{f}_{\xi i3} \\ &= f_i^B(1) - f_i^B(-1) \end{aligned} \quad (14)$$

由此可见, 式(1)单元内守恒量的变化等于单元边界通量的净变化, 亦即单元网格界面通量是连续的, 因而均匀三点中心约束多矩有限体积方法能保证数值严格守恒。

2.2 边界保型限制器

边界保型限制器(Zhang, et al, 2010)是通过重新构造局部插值函数来起到限定的效果, 该限制器计算精简, 应用方便, 能够把数值解控制在初始物理场的极大、极小值范围内, 并且不损失守恒性(Katta, et al, 2015; Guo, et al, 2016)。边界保型限制器是基于Liu等(1998)所设计的限制器, 其构造原理如下

$$M = \max_x q_0(x, 0), \quad m = \min_x q_0(x, 0) \quad (15)$$

$$\tilde{p}_i(x) = \theta(p_i(x) - \bar{p}_i) + \bar{p}_i \quad (16)$$

限制器通过重构一个新的插值函数 $\tilde{p}_i(x)$ 来代替原插值函数 $p_i(x)$, 式中 M 为初始函数的最大值, m 为初始函数的最小值, q_0 为函数的初始场, $\theta = \min \left\{ \left| \frac{M - \bar{p}_i}{M' - \bar{p}_i} \right|, \left| \frac{m - \bar{p}_i}{m' - \bar{p}_i} \right|, 1 \right\}$, $\bar{p}_i$ 为单元积分平均值, 定义如式(17), M' 和 m' 分别为一个单元内的最大值和最小值。

$$\bar{p}_i(t) = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x, t) dx \quad (17)$$

在单元网格 $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ 内积分新的插值函数 $\tilde{p}_i(x)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \tilde{p}_i(x) dx &= \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (\theta(p_i(x) - \bar{p}_i) + \bar{p}_i) dx \\ &= \bar{p}_i \end{aligned} \quad (18)$$

可以看到, 新重构的插值函数 $\tilde{p}_i(x)$ 能够保持原有积分平均值不变, 因而不损失数值守恒性。

2.3 二维数值离散推广

二维笛卡尔坐标下的通量形式平流方程为

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (19)$$

式中, $e = uq$, $f = vq$, q 为守恒变量, u 和 v 分别为 x 和 y 方向的速度。

在笛卡尔坐标结构网格下(图2), 可以直接将一维数值离散推广到二维

$$\frac{dq_{ijlm}}{dt} = \frac{dq_{ijlm}^{(x)}}{dt} + \frac{dq_{ijlm}^{(y)}}{dt} \quad (20)$$

式中, $q_{ijlm}^{(x)}$ 和 $q_{ijlm}^{(y)}$ 分别为 x 、 y 方向的守恒变量, i 、 j 为 x 、 y 方向上的单元网格索引, l 、 m 取值为1, 2, 3。

$q_{ijlm}^{(x)}$ 和 $q_{ijlm}^{(y)}$ 时间演变方程可离散表示成

$$\begin{cases} \frac{dq_{ijlm}^{(x)}}{dt} = -\left(\frac{d\xi}{dx}\right)_{ijlm} \frac{d\tilde{f}_{ijlm}^{(x)}(\xi)}{d\xi} = -\left(\frac{d\xi}{dx}\right)_{ijlm} \sum_{m=1}^3 \sum_{l=1}^3 \tilde{f}_{\xi ijl m}^{(x)} \\ \frac{dq_{ijlm}^{(y)}}{dt} = -\left(\frac{d\xi}{dy}\right)_{ijlm} \frac{d\tilde{f}_{ijlm}^{(y)}(\xi)}{d\xi} = -\left(\frac{d\xi}{dy}\right)_{ijlm} \sum_{m=1}^3 \sum_{l=1}^3 \tilde{f}_{\xi ijl m}^{(y)} \end{cases} \quad (21)$$

式中 $\tilde{f}_{\xi ijl m}^{(x)}$ 和 $\tilde{f}_{\xi ijl m}^{(y)}$ 分别表示为

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^3 \tilde{f}_{\xi ijl m}^{(x)} = \sum_{m=1}^3 2(f_{ij1m} + f_{ij2m}) - \frac{1}{2}(7f_{ij1m}^B(-1) + f_{ij3m}^B(1)) \\ \sum_{m=1}^3 \tilde{f}_{\xi ijl m}^{(x)} = \sum_{m=1}^3 \frac{1}{2}(f_{ij3m} - f_{ij1m}) \\ \sum_{m=1}^3 \tilde{f}_{\xi ijl m}^{(x)} = \sum_{m=1}^3 -2(f_{ij2m} + f_{ij3m}) + \frac{1}{2}(f_{ij1m}^B(-1) + 7f_{ij3m}^B(1)) \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} \sum_{l=1}^3 \tilde{f}_{\xi ijl m}^{(y)} = \sum_{l=1}^3 2(f_{ijl1} + f_{ijl2}) - \frac{1}{2}(7f_{ijl1}^B(-1) + f_{ijl3}^B(1)) \\ \sum_{l=1}^3 \tilde{f}_{\xi ijl m}^{(y)} = \sum_{l=1}^3 \frac{1}{2}(f_{ijl3} - f_{ijl1}) \\ \sum_{l=1}^3 \tilde{f}_{\xi ijl m}^{(y)} = \sum_{l=1}^3 -2(f_{ijl2} + f_{ijl3}) + \frac{1}{2}(f_{ijl1}^B(-1) + 7f_{ijl3}^B(1)) \end{cases} \quad (23)$$

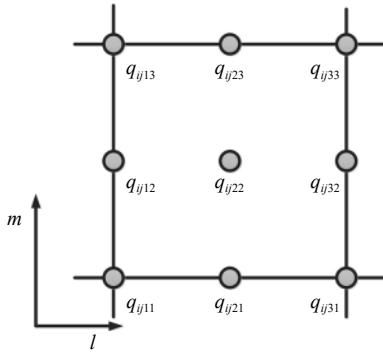


图2 二维单元内点值(求解点)分布

Fig. 2 The locations of solution points (unknowns) in two dimensions

2.4 时间积分

经过上述数值离散,得到关于守恒量(q_{ijlm})的常微分方程

$$\frac{dq_{ijlm}}{dt} = R(q_{ijlm}) \quad (24)$$

采用三阶 TVD(Total Variation Diminishing)龙格库塔时间积分方法来求解该常微分方程(Shu, 1988)

$$\begin{cases} q_{ijlm}^{(1)} = q_{ijlm}^n + \Delta t R(q_{ijlm}^n) \\ q_{ijlm}^{(2)} = \frac{3}{4}q_{ijlm}^n + \frac{1}{4}q_{ijlm}^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t R(q_{ijlm}^{(1)}) \\ q_{ijlm}^{n+1} = \frac{1}{3}q_{ijlm}^n + \frac{2}{3}q_{ijlm}^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t R(q_{ijlm}^{(2)}) \end{cases} \quad (25)$$

式中, q_{ijlm}^n 为 n 时刻的守恒量, $q_{ijlm}^{(1)}$ 、 $q_{ijlm}^{(2)}$ 为 Δt 时间步长内龙格库塔积分中间更新的守恒量 q , q_{ijlm}^{n+1} 为 $n+1$ 时刻的守恒量。

3 数值试验

各类标准误差定义如下

$$\begin{cases} L_1 = \frac{\int_{\Omega} |q - q_i| d\Omega}{\int_{\Omega} |q_i| d\Omega} \\ L_2 = \frac{[\int_{\Omega} (q - q_i)^2 d\Omega]^{1/2}}{[\int_{\Omega} (q_i)^2 d\Omega]^{1/2}} \\ L_{\infty} = \frac{\max |q - q_i|}{\max |q_i|} \end{cases} \quad (26)$$

式中, Ω 为计算区域, q 为单元内变量的积分平均值, q_i 为单元内变量的精确解的积分平均值。

$$\begin{cases} E_2 = \left\{ \sum_{i=1}^{i_{\max}} [q_i^e - q_i^n] / i_{\max} \right\}^{1/2} \\ E_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq i_{\max}} (q_i^e - q_i^n) \end{cases} \quad (27)$$

式中, q_i^e 和 q_i^n 分别为索引单元 i 内的精确解的积分平均值和单元内变量的积分平均值。

3.1 一维收敛性试验

一维收敛性试验初始场为

$$q(x, 0) = \sin(\pi x) \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (28)$$

式(1)中的平流速度 $u = 1$, 边界条件为周期性边界条件, 试验设置的库朗数为 0.1, 周期时间 $t = 2$ 。

从表1标准误差中可以看出, MCV3_UPCC 方案具有三阶收敛。考虑到 MCV3_UPCC 方案单网格内自由度和高次多项式构建的优势, 跟 Li 等 (2009) MCV3 方案数值误差相比 (文献中的 L_1 、 L_{∞} 误差和文中误差算法不同, 根据文献中误差算法), MCV3_UPCC 方案的标准误差要比 MCV3 方案小, 例如在 40 个网格数分辨率下 MCV3_UPCC 方案的积分平均值的标准误差比 MCV3 方案减小 45%。由表2可知, 采用边界保型限制器后的 MCV3_UPCC 方案 L_1 、 L_2 误差和阶数几乎没有变化, 仅 L_{∞} 误差有些增大与阶数略降。

3.2 正弦叠加波试验

为了严格测试数值格式模拟强梯度和保持极值的能力, 采用 Blossey 等 (2008) 的试验设置, 初始场由两个等振幅正弦函数叠加

$$q(x, 0) = \sin(6\pi x) + \sin(8\pi x) \quad (29)$$

试验区域 $x \in [0, 1]$, 网格数为 30, 平流速度 $u = 1$, 边界条件为周期边界。在 $t = 1$ 时刻的数值模拟的误差及其极大、极小值如表3和图3所示。

从表3中可以看出, MCV3_UPCC 方法的 E_2 误差比 MCV3 方法减少了 45%, 并且数值模拟的极值较 MCV3 更接近解析解。对比 Blossey 等 (2008) 中的通量修正方案 E_2 误差 0.05, MCV3_UPCC 方案的误差为 0.036, 误差较小。在 MCV3_UPCC 方案加上边界保型限制器后, MCV3_UPCC_BP 方案的误差几乎没有改变, 且最大值、最小值和 MCV3_UPCC 方案差别不大。对比 Blossey 等 (2008) 的通量修正方案, 由于其使用了单调限制器, 数值解在 $x = 0.5$ 附近耗散较强, 而图3c中 MCV3_UPCC_BP 限制器能够很好地保持局地峰值, 效果更佳。同时, 相比于 MCV3 方法, 采用 MCV3_UPCC 方法对于保持极值效果更好, 一个周期后的数值模拟积分平均值 (VIA) 更接近初值, 即使引入了边界保型限制器

表 1 MCV3_UPCC 标准误差和收敛阶数

Table 1 Numerical errors and convergence rates of the 1D linear scalar equation of MCV3_UPCC scheme

网格数	L_1 误差	L_1 阶数	L_2 误差	L_2 阶数	L_∞ 误差	L_∞ 阶数
10	1.099×10^{-2}		1.100×10^{-2}		1.099×10^{-2}	
20	1.368×10^{-3}	3.00	1.368×10^{-3}	3.00	1.371×10^{-3}	3.00
40	1.703×10^{-4}	3.00	1.703×10^{-4}	3.00	1.704×10^{-4}	3.00
80	2.124×10^{-5}	3.00	2.124×10^{-5}	3.00	2.125×10^{-5}	3.00
160	2.653×10^{-6}	3.00	2.653×10^{-6}	3.00	2.653×10^{-6}	3.00

表 2 MCV3_UPCC_BP 标准误差和收敛阶数

Table 2 Numerical errors and convergence rates of the 1D linear scalar equation of MCV3_UPCC scheme with BP filter

网格数	L_1 误差	L_1 阶数	L_2 误差	L_2 阶数	L_∞ 误差	L_∞ 阶数
10	1.098×10^{-2}		1.115×10^{-2}		1.151×10^{-2}	
20	1.369×10^{-3}	3.00	1.370×10^{-3}	3.02	1.398×10^{-3}	3.04
40	1.704×10^{-4}	3.00	1.704×10^{-4}	3.00	1.718×10^{-4}	3.02
80	2.125×10^{-5}	3.00	2.125×10^{-5}	3.00	2.199×10^{-5}	2.96
160	2.653×10^{-6}	3.00	2.656×10^{-6}	3.00	3.277×10^{-6}	2.74

表 3 正弦叠加波标准误差和极值 (按照 Blossey 等(2008)试验中的误差算法)

Table 3 Errors and maximum/minimum values of advection of sum of two sine waves (According to the method of Blossey, et al, (2008))

数值格式	E_2 误差	E_∞ 误差	$q_{\max}$	$q_{\min}$
MCV3	0.06469	0.12300	0.9739	-0.9747
MCV3_UPCC	0.03585	0.06502	0.9841	-0.9821
MCV3_UPCC_BP	0.03608	0.06688	0.9727	-0.9727

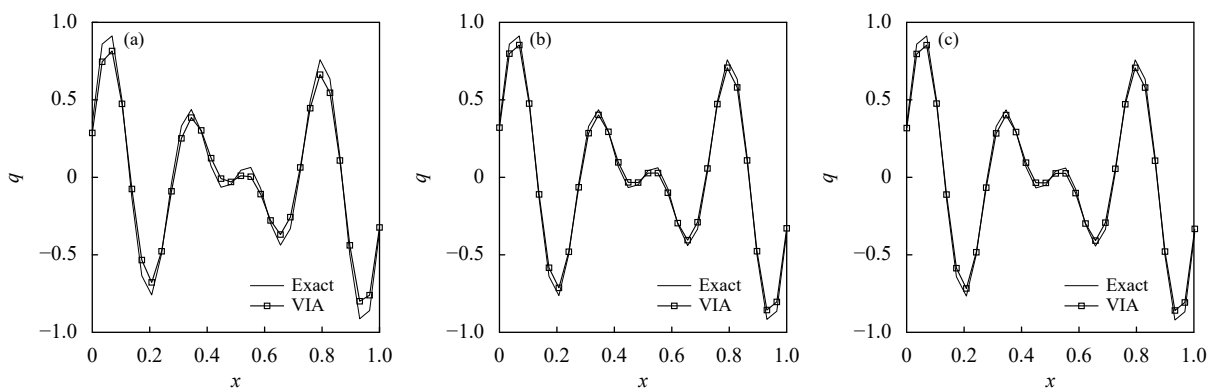


图 3 正弦叠加波试验 (a. MCV3, b. MCV3_UPCC, c. MCV3_UPCC_BP)

Fig. 3 Sum of 7.5 and 10 Δx sine waves experiments (a. MCV3, b. MCV3_UPCC, c. MCV3_UPCC_BP)

(图 3c), 几乎对波峰处的极值也没有影响。

为了测试平流方案的保正定性, 取式(29)中函数的正值部分, 区间和网格同正弦叠加波试验, 即

$$q(x, 0) = \max[0, \sin(6\pi x) + \sin(8\pi x)] \quad (30)$$

图 4 为 MCV3、MCV3_UPCC、MCV3_UPCC_BP 3 种方案模拟正弦叠加波数值结果。可以看到,

MCV3_UPCC 方案对波峰的模拟极值高于 MCV3, 但它们在间断附近有明显的数值下冲, 即存在非物理数值振荡, 表 4 中两方案的极小值($q_{\min}$)小于 0。然而, 引入 BP 限制器后, MCV3_UPCC_BP 方案能够很好地抑制下冲, 同时不影响波峰处的极值。从表 4 可以看到, MCV3_UPCC_BP 方案的极小值

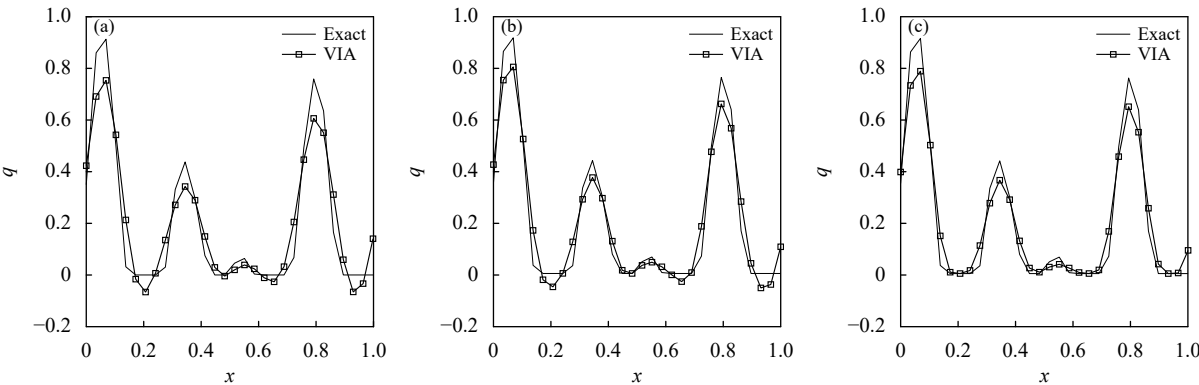


图 4 正值部分的正弦叠加波试验 (a. MCV3, b. MCV3_UPCC, c. MCV3_UPCC_BP)

Fig. 4 The positive parts of sum of 7.5 and 10 Δx sine waves experiments(a. MCV3, b. MCV3_UPCC, c. MCV3_UPCC_BP)

表 4 正值部分正弦叠加波标准误差和极值 (按照Blossey等(2008)试验中的误差算法)

Table 4 Errors and maximum/minimum values of advection of sum of 7.5 and 10 Δx positive sine waves (According to the method of Blossey, et al, (2008))

格式	E_2 误差	E_∞ 误差	$q_{\max}$	$q_{\min}$
MCV3	0.08759	0.1840	0.9781	-7.8085×10^{-2}
MCV3_UPCC	0.06496	0.1207	0.9907	-7.4397×10^{-2}
MCV3_UPCC_BP	0.06098	0.1391	0.9727	-3.4694×10^{-18}

($-3.4694\text{E-}018$)为机器误差,即保持数值解的正定性。

同样,对比Blossey等(2008)的通量修正方案在间断处的模拟结果,文中MCV3、MCV3_UPCC和MCV3_UPCC_BP3种方案计算精度高,它们的数值模拟误差 E_2 和 E_∞ 均低于文献结果。

3.3 一维方波平流

为了验证数值格式在强间断的附近是否能够有效地抑制非物理数值振荡,设计的方波试验初值分布如下

$$q(x,0) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 0.4 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (31)$$

一维的计算区域为 $[-1, 1]$,其内网格数为200,网格距0.01,水平速度场 $u = 1$ 。在 $t = 2$ 时刻MCV3、MCV3_UPCC和MCV3_UPCC_BP3种方案数值模拟结果如图5所示。从图中可以看到,在 $x = \pm 0.4$ 处MCV3和MCV3_UPCC的点值(PV)和积分平均值(VIA)存在明显的数值上冲和下冲;这一点也可以从表5中的极大值($q_{\max}$)大于1和极小值($q_{\min}$)小

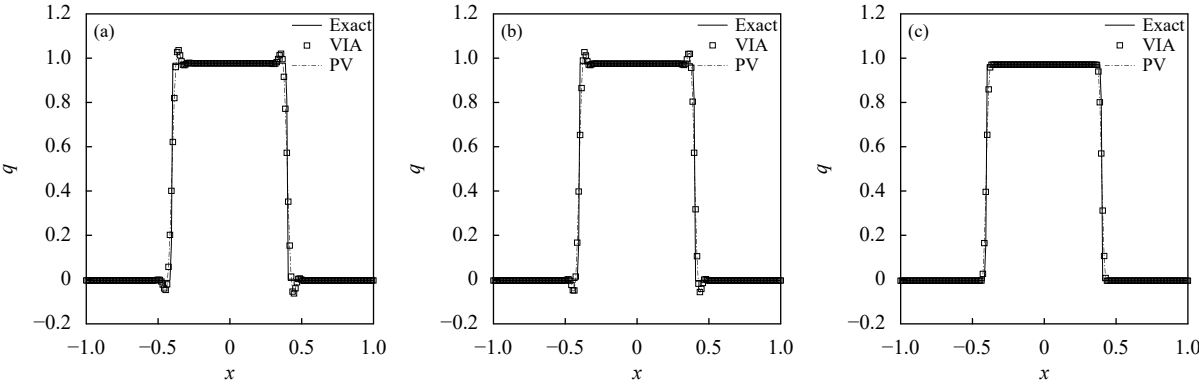


图 5 方波试验结果 (a. MCV3, b. MCV3_UPCC, c. MCV3_UPCC_BP)

Fig. 5 The square wave experiments (a. MCV3, b. MCV3_UPCC, c. MCV3_UPCC_BP)

表 5 一维方波标准误差和极值
Table 5 Errors and maximum/minimum values of advection of a square wave in 1D

格式	L_1 误差	L_2 误差	L_∞ 误差	$q_{\max}$	$q_{\min}$
MCV3	0.035425	0.085082	0.3664	1.1296	-1.296×10^{-1}
MCV3_UPCC	0.029940	0.077023	0.3382	1.2012	-2.012×10^{-1}
MCV3_UPCC_BP	0.024208	0.075610	0.3371	1.0000	-6.938×10^{-18}

于 0 看出。此外,从表 5 还可以看到,MCV3_UPCC 和 MCV3_UPCC_BP 方案的标准误差要比 MCV3 方案小;同时,MCV3_UPCC 算法引入边界保型限制器能够有效抑制振荡,并能在平流输送过程中把点值严格控制在初始场的最大值和最小值之间。

3.4 二维收敛性试验

二维收敛性试验初始场分布如下

$$q(x, y, 0) = \sin(\pi(x+y)) \quad x \in [-1, 1], y \in [-1, 1] \quad (32)$$

试验速度 $u = 1, v = 1$, 周期 $t = 2$, 边界条件为周期性边界条件, 库朗数为 0.1。

数值试验结果如表 6 所示, 从表中可知, MCV3_UPCC 方案获得了三阶收敛阶数, 并且比 MCV3 方

案误差减小了一半。MCV3_UPCC 方法引入边界保型限制器后, 对试验误差几乎没有影响, L_1 阶数没有改变, L_2 和 L_∞ 有所减小, 与一维试验结果完全一致。

3.5 二维复杂波试验

为了验证数值格式同时捕获光滑和间断处的解的能力, 一维复杂波试验最早由 Jiang 等 (1996) 提出, Li 等 (2009) 将它推广至二维, 该试验由高斯波、方波、尖三角波和半椭圆波组合而成, 速度场分布为 $\begin{cases} u(x, y) = -2\pi y \\ v(x, y) = 2\pi x \end{cases}$, 计算区域为 $[-1, 1] \times [-1, 1]$, 试验时间为一个时间周期, 网格数为 100×100 , 时间步长为 1500 步, 初始场分布为

$$q(x, y, 0) = \begin{cases} \frac{1}{6}(G(r_1 + \delta, \beta) + G(r_1 - \delta, \beta) + 4G(r_1, \beta)) & |r_1| \leq 0.2 \\ 1 & |x| \leq 0.2, -0.7 \leq y \leq -0.3 \\ 1 - |5r_2| & |r_2| \leq 0.2 \\ \frac{1}{6}(F(r_3 + \delta, \alpha) + F(r_3 - \delta, \alpha) + 4F(r_3, \alpha)) & |r_3| \leq 0.2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (33)$$

式中, $r_1 = \sqrt{(x+0.6)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x-0.6)^2 + y^2}$, $r_3 = \sqrt{x^2 + (y-0.6)^2}$, $G(r, \beta) = e^{-\beta r^2}$, $F(r, \alpha) = \sqrt{\max(1 - \alpha^2 r^2)}$,

$\delta = 0.01, \alpha = 5, \beta = \ln 2 / (36\delta^2)$ 。

从图 6 中可以看出, MCV3_UPCC 方法和 MCV3 方法一样, 都在强间断处出现了数值振荡, 并且两

表 6 二维收敛性试验标准误差和收敛阶数
Table 6 Numerical errors and convergence rates of the 2D linear scalar equation

网格		L_1 误差	L_1 阶数	L_2 误差	L_2 阶数	L_∞ 误差	L_∞ 阶数
MCV3	10	4.3164×10^{-2}		4.1639×10^{-2}		4.3164×10^{-2}	
	20	5.4950×10^{-3}	2.97	5.4436×10^{-3}	2.93	5.4263×10^{-3}	2.99
	40	6.900×10^{-4}	2.99	6.8840×10^{-4}	2.98	6.8782×10^{-4}	2.99
	80	8.6418×10^{-5}	2.99	8.6366×10^{-5}	2.99	8.6348×10^{-5}	2.99
MCV3_UPCC	10	2.3037×10^{-2}		2.2830×10^{-2}		2.3037×10^{-2}	
	20	2.8627×10^{-3}	3.00	2.8568×10^{-3}	2.99	2.8566×10^{-3}	3.01
	40	3.5608×10^{-4}	3.00	3.5590×10^{-4}	3.00	3.5590×10^{-4}	3.00
	80	4.4403×10^{-5}	3.00	4.4398×10^{-5}	3.00	4.4397×10^{-5}	3.00
MCV3_UPCC_BP	10	2.727×10^{-2}		2.635×10^{-2}		2.743×10^{-2}	
	20	2.835×10^{-3}	3.26	2.928×10^{-3}	3.17	3.323×10^{-3}	3.04
	40	3.560×10^{-4}	2.99	3.661×10^{-4}	2.99	5.019×10^{-4}	2.73
	80	4.440×10^{-5}	3.00	4.893×10^{-5}	2.90	1.037×10^{-4}	2.28

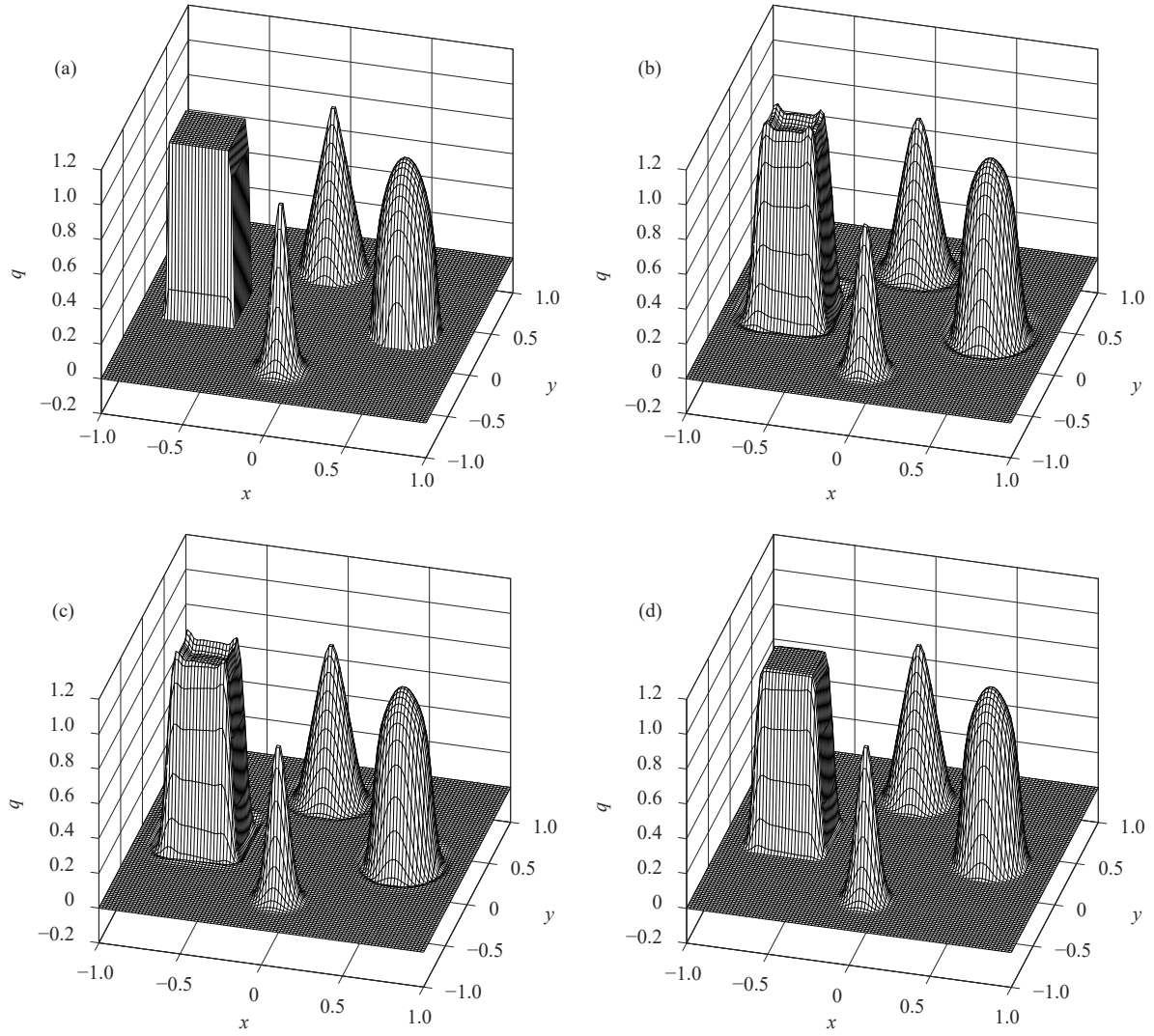


图6 二维复杂波试验结果 (a. 初始场, b、c、d 分别为 MCV3、MCV3_UPCC 和 MCV3_UPCC_BP 旋转一周后的结果)

Fig. 6 The complex waves experiment (a. the initial field of complex waves, b. MCV3, c. MCV3_UPCC, d. MCV3_UPCC_BP)

种方法对于波峰处的极值保持都不错, MCV3_UPCC 方法引入边界保型限制器后没有影响到波峰处的极值。由表 7 可知, 加上边界保型限制器后, 整个波的点值在精确解的最大值和最小值之间, 除去了数值振荡, 而且得到的 L_1 误差较 MCV3_UPCC 方法的误差更小。综上所述, 边界保型限制器在保持守恒和正定的同时, 能够很好地模拟复杂波的平流过程。

3.6 凹槽圆柱旋转试验

该试验主要是验证平流的保型能力, 在二维网格数为 100×100 , 时间积分总步数为 1500 步, 时间周期 $t=1$ 的圆柱凹槽试验中, 初始场半径为 0.5, 中心位于原点, 高为 1 的凹槽圆柱, 速度场为

$$\begin{cases} u(x, y) = -2\pi y \\ v(x, y) = 2\pi x \end{cases}, \text{ 试验初始场分布为}$$

$$q_0(x, y, t) = \begin{cases} 1 & |\xi| \geq W_s/2, r \leq \sigma \\ 1 & \zeta \geq L_s - \sigma, r \leq \sigma \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (34)$$

式中, σ 为圆柱半径, W_s 和 L_s 分别为凹槽的宽和长, ξ 和 ζ 分别为相对于圆柱中心的坐标, 长和宽分别为 0.4 和 0.74。

从图 7b、c 可知, MCV3_UPCC 方案具有良好的保型能力, 在旋转了 10 周后凹槽圆柱的形状保持较好, 只是在强间断处会产生小的数值振荡。从表 8 可知, 应用边界保型限制器后, 在对凹槽圆柱有很好保型效果的同时, 能有效去除数值振荡, 并

把最大、最小值严格控制在初始场的最大、最小值,即 0 到 1 之间。对比苏勇等(2013)的凹槽旋转试验,采用准单调半拉格朗日方案在旋转 10 周后极值被削弱到了 0.953,而 MCV3_UPCC 方法引入边界保型限制器旋转 10 周后极值还能维持初始场

的最大值 1,说明 MCV3_UPCC 方案的计算精度高,保型能力强。

3.7 二维变形场试验

数值试验采取 Durran(1999)的试验,该试验是具有挑战性的复杂变形试验,其速度场随时间变

表 7 复杂波试验误差和最大值、最小值
Table 7 Errors and maximum/minimum values of advection of complex waves

格式	L_1 误差	L_2 误差	L_∞ 误差	$q_{\max}$	$q_{\min}$
MCV3	0.14920	0.16966	0.30347	1.1637	-1.325×10^{-1}
MCV3_UPCC	0.11888	0.14806	0.27518	1.5092	-3.827×10^{-1}
MCV3_UPCC_BP	0.099466	0.14813	0.27699	1.0000	-1.839×10^{-16}

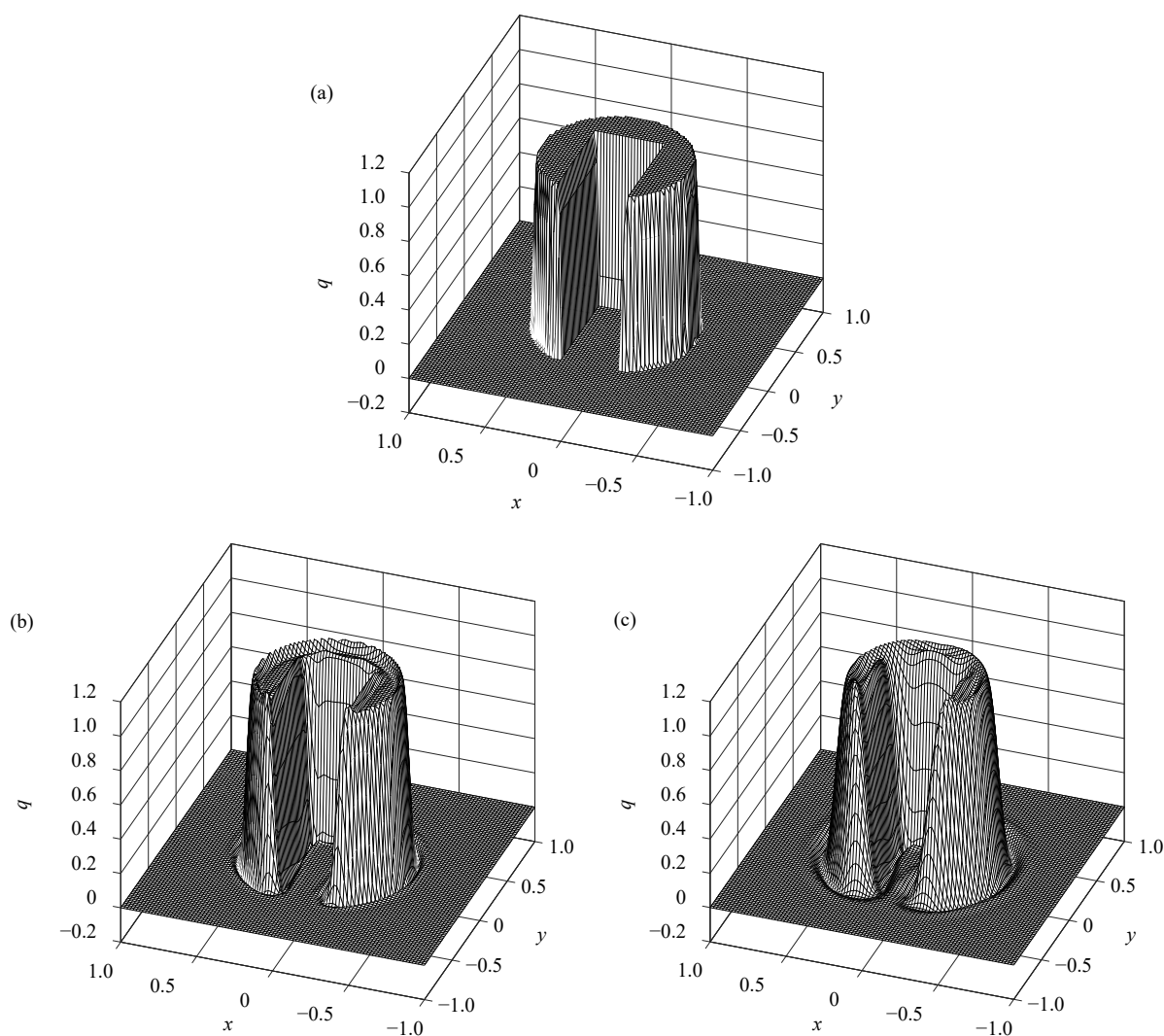
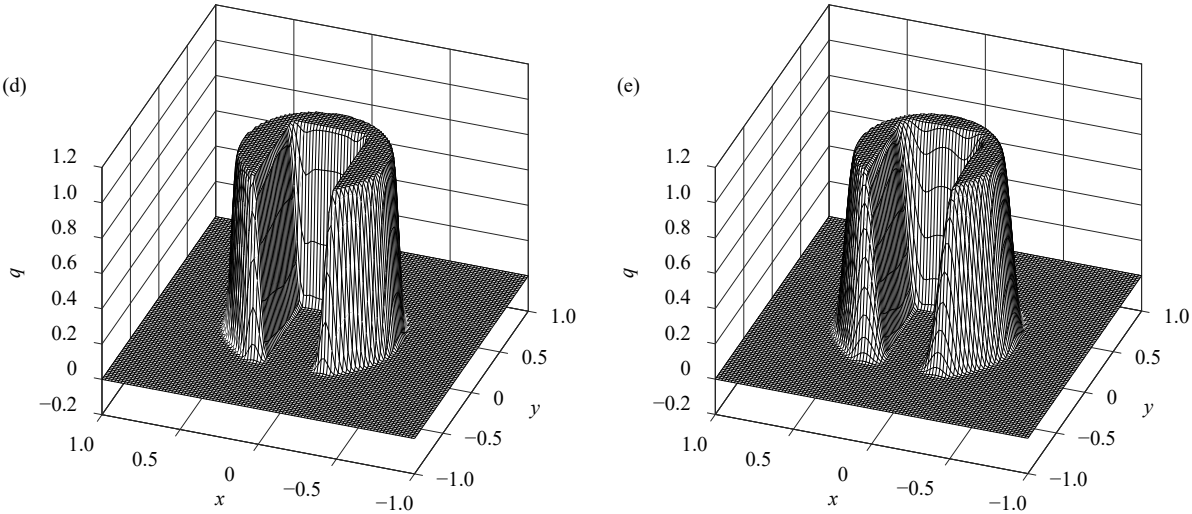


图 7 凹槽圆柱模拟试验结果

(a. 初始时刻, b 和 c 分别为 MCV3_UPCC 旋转 1 周和 10 周后结果, d 和 e 分别为 MCV3_UPCC_BP 旋转 1 周和 10 周后结果)

Fig. 7 The cut-cylinder rotation experiment: (a) the initial distribution of cut-cylinder rotation; (b), (c) result of MCV3_UPCC scheme after 1 and 10 period, respectively; (d), (e) results of MCV3_UPCC scheme with BP filter after 1 and 10 period, respectively



续图 7

Fig. 7 Continued

表 8 凹槽圆柱模拟试验误差和最大值、最小值

Table 8 Errors and maximum/minimum values of advection of cut-cylinder rotation experiment

格式	L_1 误差	L_2 误差	L_∞ 误差	$q_{\max}$	$q_{\min}$
MCV3_UPCC	0.1209	0.1444	0.4068	1.5751	-5.683×10^{-1}
MCV3_UPCC_BP	0.07627	0.1244	0.3906	1.0000	-5.551×10^{-17}

化, 该试验初始场为

$$q_0(x, y, t) = \frac{1}{2} [1 + \cos(\pi r)] \quad (35)$$

式中

$$r(x, y) = \min \left\{ 1, 4 \left[\left(x - \frac{1}{4} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{4} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (36)$$

速度场为

$$\begin{cases} u(x, y, t) = \sin^2(\pi x) \sin(2\pi y) \cos(\pi t/5) \\ v(x, y, t) = -\sin^2(\pi y) \sin(2\pi x) \cos(\pi t/5) \end{cases} \quad (37)$$

速度场的定义使得初始场从平滑的状态在 $t = 2.5$ 的时刻演变成高度变形状态, 然后速度反向运动, 在 $t = 5$ 时候又回到初始状态, 对于一个好的正定保型平流方案, 在这种复杂的变形流动过程中, 对于保持每一步的正定是具有挑战的。试验区域在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 范围内, 结果如图 8、9 所示。

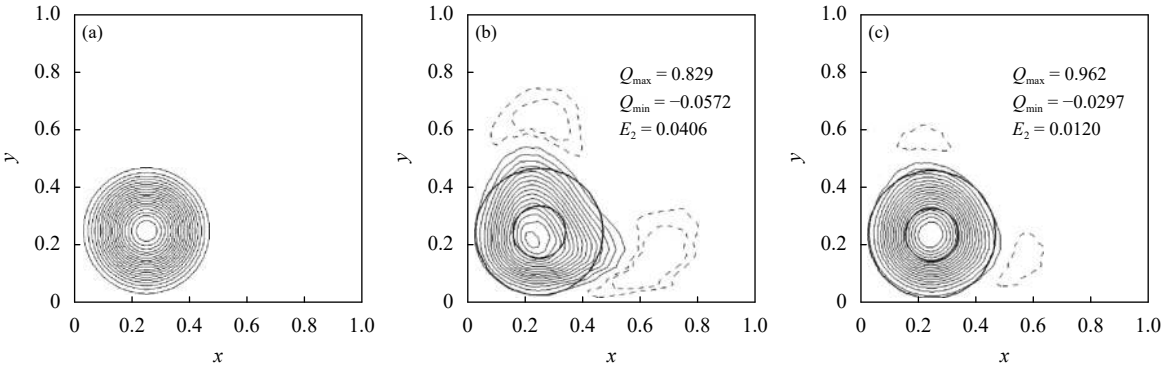


图 8 变形场试验结果 (a. 初始场, b 和 c 分别为 50×50 和 100×100 网格的 MCV3_UPCC 方案运动 1 个周期的结果)

Fig. 8 (a) The initial field, (b) the result of MCV3_UPCC scheme after 1 period in 50×50 mesh, (c) the result of MCV3_UPCC scheme after 1 period in 100×100 mesh

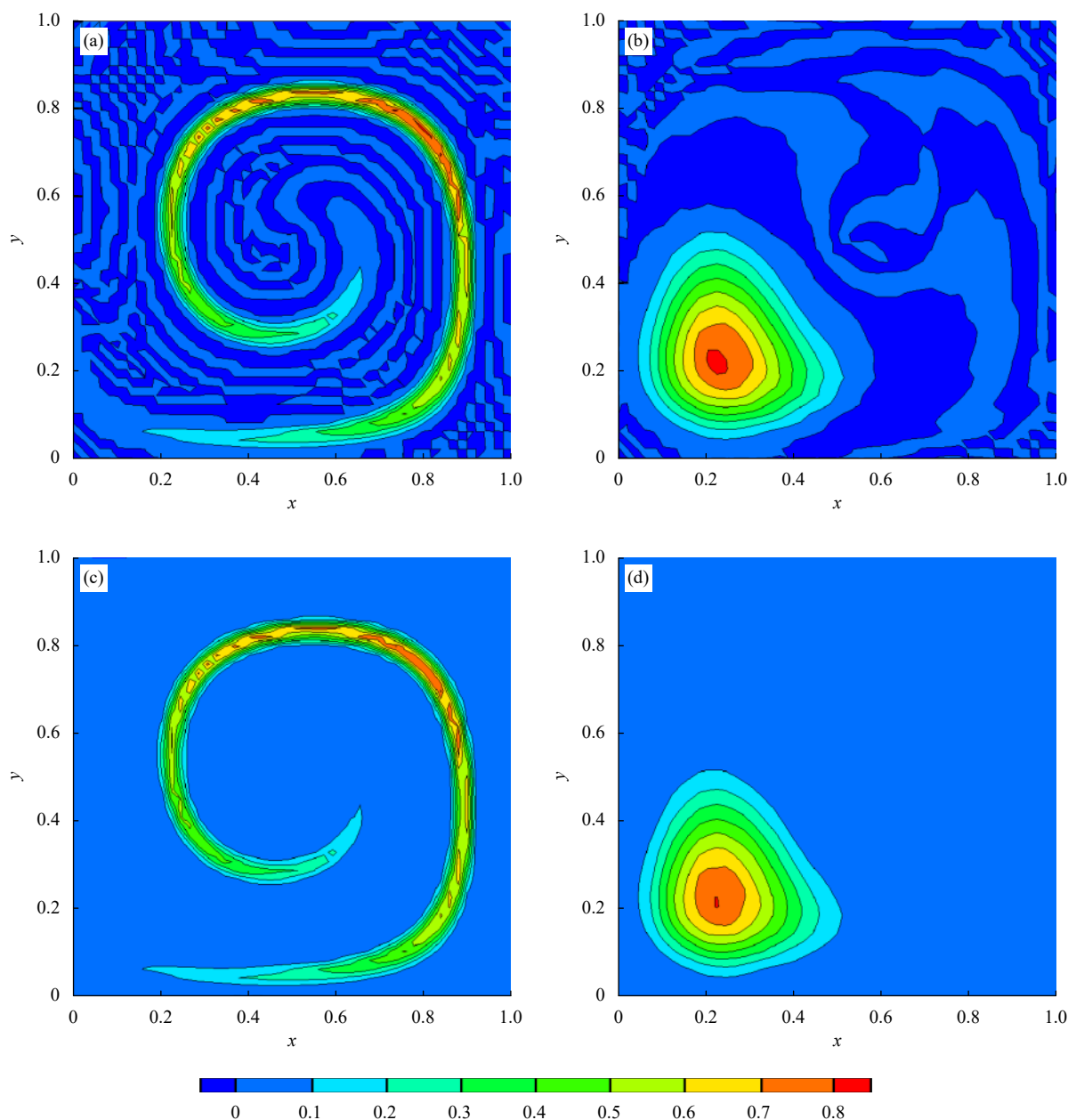


图9 二维变形流模拟试验结果 (a. MCV3_UPCC 方案 $t/2$ 时刻, b. MCV3_UPCC 方案 t 时刻, c. MCV3_UPCC_BP 方案 $t/2$ 时刻, d. MCV3_UPCC_BP 方案 t 时刻)

Fig. 9 The deformational flow experiment: (a), (b) the result of MCV3_UPCC scheme after $t/2$ and t , respectively; (c), (d) the result of MCV3_UPCC scheme with BP filter after $t/2$ and t , respectively

由图8可知,在网格数为50和100的数值试验中,MCV3_UPCC方案 E_2 误差分别为0.0406和0.0102,对比Skamarock(2006)中PPM方法所得误差0.0492和0.0140,MCV3_UPCC方案误差更小,并且在极小值处的维持上也比Skamarock(2006)中-0.073和-0.039更好。在保持正定试验中(图9),采用 50×50 的试验网格,MCV3_UPCC方案引用了

边界保型限制器后,在准确地模拟强二维变形流试验的同时又能有效消除数值振荡。从表9可知,时间积分每一步的最大、最小值都限制在初始场的最大、最小值之间,并且与Skamarock(2006)相同试验设置的限制器结果相比,MCV3_UPCC方法引入边界保型限制器在一个周期后保持的极大值是0.8150,较前者的0.776极值保持得更好,所以边界

表 9 变形流试验误差和最大值、最小值 (按照 Skamarock(2006)试验中误差算法)
Table 9 Errors and maximum/minimum values of advection of deformational flow experiment
(According to the method of Skamarock(2006))

格式	E_2 误差	E_α 误差	$q_{\max}$	$q_{\min}$
MCV3_UPCC	0.04060	0.1955	1.0277	-8.6954×10^{-2}
MCV3_UPCC_BP	0.04128	0.1670	1.0000	-3.4694×10^{-18}

保型限制器即使在变形流场中也能严格保持正定和高精度。

4 结 论

基于新的三点均匀中心约束多矩有限体积方法,发展了一个三阶正定守恒的平流模式。与传统的有限体积方法相比,新发展的三点均匀中心约束多矩有限体积平流格式(MCV3_UPCC)能够在单个网格内进行局地高阶重构,计算模板紧致。由于采用积分平均值矩积分通量形式控制方程,并保持边界通量连续,因此能够保证数值解严格守恒。数值收敛试验表明,新发展的平流模式具有三阶计算精度。通过分析标准误差,发现 MCV3_UPCC 方案相比于 MCV3 方案,计算误差减小了约一半,模拟的不连续函数峰值也更接近数值真解,计算精度高。为了有效控制高阶格式产生的数值噪音(振荡),文中引入边界保型限制器,它能够有效抑制非物理数值振荡,具有良好的保型能力。数值试验表明采用边界保型限制器并不降低方案的计算精度,并且能够严格控制每一步的数值解在初始场的最大、最小值之间。综上所述,文中发展的二维平流模式具有良好的发展潜力,下一步计划将新发展的三点均匀中心约束多矩有限体积方案推广到二维球面。

参考文献

沈学顺,王明欢,肖锋等. 2011. GRAPES 模式中高精度正定保形物质平流方案的研究 I: 理论方案设计与理想试验. 气象学报, 39(1): 1-15.
Shen X S, Wang M H, Xiao F. 2011. A study of the high-order accuracy and positive-definite conformal advection scheme in GRAPES model I: Scientific design and idealized tests. Acta Meteor Sinica, 39(1): 1-15 (in Chinese)
苏勇,沈学顺,彭新东等. 2013. PRM 标量平流方案在 GRAPES 全球预报系统中的应用. 大气科学, 37(6): 1309-1325. Su Y, Shen X S, Peng X D, et al. 2013. Application of PRM scalar advection scheme in GRAPES global forecast system. Chinese J Atmos Sci, 37(6): 1309-1325 (in Chinese)
Bermejo R, Staniforth A. 1992. The conversion of semi-Lagrangian advection

schemes to quasi-monotone schemes. Mon Wea Rev, 120(11): 2622-2632
Blossey P N, Durran D R. 2008. Selective monotonicity preservation in scalar advection. J Comput Phys, 227(10): 5160-5183
Book D L, Boris J P, Hain K. 1975. Flux-corrected transport II: Generalizations of the method. J Comput Phys, 18(3): 248-283
Chen C G, Xiao F. 2008. Shallow water model on cubed-sphere by multi-moment finite volume method. J Comput Phys, 227(10): 5019-5044
Chen C G, Li X L, Shen X S, et al. 2014. Global shallow water models based on multi-moment constrained finite volume method and three quasi-uniform spherical grids. J Comput Phys, 271: 191-223
Colella P, Woodward P R. 1984. The piecewise parabolic method (PPM) for gas-dynamical simulations. J Comput Phys, 54(1): 174-201
Durran D R. 1999. Numerical Methods for Wave Equations in Geophysical Fluid Dynamics. New York: Springer-Verlag, 465
Guo W, Nair R D, Qiu J M. 2014. A conservative semi-Lagrangian discontinuous Galerkin scheme on the cubed sphere. Mon Wea Rev, 142(1): 457-475
Guo W, Nair R D, Zhong X H. 2016. An efficient WENO limiter for discontinuous Galerkin transport scheme on the cubed sphere. Int J Numer Methods Fluids, 81(1): 3-21
Ii S, Xiao F. 2007. CIP/multi-moment finite volume method for Euler equations: A semi-Lagrangian characteristic formulation. J Comput Phys, 222(2): 849-871
Ii S, Xiao F. 2009. High order multi-moment constrained finite volume method. Part I: Basic formulation. J Comput Phys, 228(10): 3669-3707
Jiang G S, Shu C W. 1996. Efficient implementation of weighted ENO schemes. J Comput Phys, 126(1): 202-228
Katta K K, Nair R D, Kumar V. 2015. High-order finite-volume transport on the cubed sphere: Comparison between 1D and 2D reconstruction schemes. Mon Wea Rev, 143(7): 2937-2954
Lauritzen P H, Nair R D, Ullrich P A. 2009. A conservative semi-Lagrangian multi-tracer transport scheme (CSLAM) on the cubed-sphere grid. J Comput Phys, 229(5): 1401-1424
Li X L, Chen C G, Xiao F, et al. 2015. A high-order multi-moment constrained finite-volume global shallow-water model on the Yin-Yang grid. Quart J Roy Meteor Soc, 141(691): 2090-2102
Liu X D, Tadmor E. 1998. Third order nonoscillatory central scheme for hyperbolic conservation laws. J Numer Math, 79(3): 397-425
Robert A. 1981. A stable numerical integration scheme for the primitive

- meteorological equations. *Atmos Ocean*, 19(1): 35-46
- Shu C W. 1988. Total-variation-diminishing time discretizations. *SIAM J Sci Stat Comput*, 9(6): 1073-1084
- Skamarock W C. 2006. Positive-definite and monotonic limiters for unrestricted-time-step transport schemes. *J Mon Wea Rev*, 134(8): 2241-2250
- Van Leer B. 1977. Towards the ultimate conservative difference scheme. *J Comput Phys*, 135(2): 229-248
- Xiao F, Yabe T. 2001. Completely conservative and oscillationless semi-lagrangian schemes for advection transportation. *J Comput Phys*, 170(2): 498-522
- Xiao F, Yabe T, Peng X, et al. 2002. Conservative and oscillation-less atmospheric transport schemes based on rational functions. *J Geophys Res Atmos*, 107(D22): ACL 2-1-ACL 2-11
- Xiao F. 2004. Unified formulation for compressible and incompressible flows by using multi-integrated moments I : One-dimensional inviscid compressible flow. *J Comput Phys*, 195(2): 629-654
- Xiao F, Akoh R, Li S. 2006. Unified formulation for compressible and incompressible flows by using multi-integrated moments II : Multidimensional version for compressible and incompressible flows. *J Comput Phys*, 213(1): 31-56
- Xiao F. 2012. Two variants of the MCV3 scheme. ArXiv: 1207.6844
- Xiao F, Li S, Chen C G, et al. 2013. A note on the general multi-moment constrained flux reconstruction formulation for high order schemes. *Appl Math Model*, 37(7): 5092-5108
- Yabe T, Aoki T. 1991. A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation I : One-dimensional solver. *Comput Phys Commun*, 66(2-3): 219-232
- Yabe T, Tanaka R, Nakamura T, et al. 2001. An exactly conservative semi-Lagrangian scheme(CIP-CSL) in one dimension. *Mon Wea Rev*, 129(2): 332-344
- Yu R C. 1994. A two-step shape-preserving advection scheme. *Adv Atmos Sci*, 11(4): 479-490
- Zerroukat M, Wood N, Staniforth A. 2002. SLICE: A semi-Lagrangian inherently conserving and efficient scheme for transport problems. *Quart J Roy Meteor Soc*, 128(586): 2801-2820
- Zhang X X, Shu C W. 2010. On maximum-principle-satisfying high order schemes for scalar conservation laws. *J Comput Phys*, 229(9): 3091-3120