

# 大气粒子散射相函数的参数化方案比较及其改进<sup>\* 1</sup>

刘琨<sup>1,2</sup> 张峰<sup>1,2</sup> 吴琨<sup>1,2</sup> 周秀骥<sup>2</sup> 张华<sup>3</sup> 刘仁强<sup>1,2</sup>

LIU Kun<sup>1,2</sup> ZHANG Feng<sup>1,2</sup> WU Kun<sup>1,2</sup> ZHOU Xiuji<sup>2</sup> ZHANG Hua<sup>3</sup> LIU Renqiang<sup>1,2</sup>

1. 南京信息工程大学气象灾害教育部重点实验室/气候与环境变化国际合作联合实验室/气象灾害预报预警与评估协同创新中心, 南京, 210044
2. 中国气象科学研究院灾害天气国家重点实验室, 北京, 100081
3. 中国气象局国家气候中心气候研究开放实验室, 北京, 100081

1. *Key Laboratory of Meteorological Disaster, Ministry of Education (KLME)/ Joint International Research Laboratory of Climate and Environment Change (ILCEC)/ Collaborative Innovation Center on Forecast and Evaluation of Meteorological Disaster (CIC-FEMD), Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, China*
2. *State Key Laboratory of Severe Weather, Chinese Academy of Meteorological Sciences, Beijing 100081, China*
3. *National Climate Center, China Meteorological Administration, Beijing 100081, China*

2015-11-16 收稿, 2016-05-20 改回.

刘琨, 张峰, 吴琨, 周秀骥, 张华, 刘仁强. 2016. 大气粒子散射相函数的参数化方案比较及其改进. 气象学报, 74(5):784-795

**Liu Kun, Zhang Feng, Wu Kun, Zhou Xiuji, Zhang Hua, Liu Renqiang. 2016. Comparisons and improvement of parameterization schemes for the scattering phase function of atmospheric particles. *Acta Meteorologica Sinica*, 74(5):784-795**

**Abstract** The parameterization of the scattering phase function of atmospheric particles is an important part of the radiative transfer parameterization. The accuracy of Henyey-Greenstein (HG) scheme and Double Henyey-Greenstein (DHG) scheme are examined systematically. These two schemes are applied in the four-stream spherical harmonic expansion adding method to calculate the reflection/transmission/absorption of aerosols, clouds and haze particles. Results show that the HG scheme cannot realistically describe the backscattering pattern of the phase function, thereby reducing the accuracy of the calculated reflection and transmission of atmospheric particles. The peak of forward scattering and backscattering can be well represented by the DHG scheme in some cases. However, the DHG scheme often leads to abnormal backscattering peak or negative values of the phase function, which is unrealistic. In this case, the accuracy of reflection and transmission calculated by the DHG scheme are lower than those by the HG scheme. For this reason, a modified DHG scheme (MDHG) is proposed in this study to improve the phase function parameterization. The modified scheme is stable, and the traits of forward scattering and backscattering are well characterized. In addition, errors of reflection and transmission calculated by the improved scheme are smaller. Results of the study indicate that the MDHG scheme is appropriate for parameterizing the phase function.

**Key words** Phase function, Parameterization, Henyey-Greenstein (HG) scheme, Double Henyey-Greenstein (DHG) scheme, Modified DHG (MDHG) scheme, Adding method of four-stream spherical harmonic expansion approximation

**摘要** 大气粒子散射相函数的参数化是大气辐射传输参数化的重要组成部分。文中全面比较了大气粒子的 Henyey-Greenstein(HG)方案和双 Henyey-Greenstein(DHG)方案,并在四流球谐函数展开累加法中,应用这两种相函数参数化方案计算气溶胶、云、霾粒子的反射率、透射率或吸收率。该研究结果表明:HG 方案无法表现相函数的后向峰值,因而其计算的大气

\* 资助课题:国家自然科学基金项目(41305004、91537213、41575040、41575002)、中国气象科学研究院灾害天气国家重点实验室开放课题(2014LASW-A04)。

作者简介:刘琨,主要从事大气辐射与气候变化等方面的研究。E-mail: karrnlk@163.com

通信作者:张峰,主要从事大气辐射与气候变化等方面的研究。E-mail: feng\_zhang126@126.com

粒子反射率和透射率精度较差;DHG 方案能较好地表征相函数的整体特征,但是该方案计算的相函数易出现后向异常峰值或为负值,并导致计算得到的气溶胶、云、霾粒子的反射率和透射率精度甚至会低于 HG 方案。对 DHG 方案进行进一步研究,提出了改进的 DHG 方案(MDHG)。MDHG 方案计算结果稳定,并能很好表征相函数的前向和后向峰值的特征,其计算的大气粒子的反射率和透射率精度也较高。因此,MDHG 方案是一种理想的相函数参数化方案。

**关键词** 相函数, 参数化, Henyey-Greenstein(HG)方案, 双 Henyey-Greenstein(DHG)方案, 改进的 DHG(MDHG)方案, 四流球谐函数展开累加法

**中图法分类号** P422

## 1 引言

大气辐射传输过程在气候模拟、大气遥感反演及大气光化学过程中起着非常重要的作用。而辐射方案的精度差异会对大气数值模式模拟效果产生一定影响(杨学胜等,2009;许允福等,2011;荆现文等,2012;张梦等,2014;Zhang H, et al,2014)。辐射传输的物理过程通常由辐射传输方程来描述,而该方程属于积分-微分方程,很难获得解析解,因此,已经有大量研究发展了一些近似方案来求解大气辐射传输方程,如二流近似方案(King, et al,1986;Kylling, et al,1995;Fu, et al,1997;邱金桓,1998;Qiu,1999;Li, et al,2005;Lu, et al,2009)和四流近似方案(Liou, et al,1988;Stamnes, et al,1988;Li, et al,1996;Zhang F, et al,2013a, 2013b, 2016;Zhang H, et al,2015)。二流近似是指用两个自由度来表示辐射强度在球空间的分布特征。多年来,由于其形式简单、计算速度快,被广泛应用于参数化气候模式的辐射传输过程。但这种方法有明显的缺陷和不足。King 等(1986)对各种单层的二流近似解的精度进行了评估,指出在不同的光学厚度、太阳天顶角和单次散射反照率的情况下,采用二流近似方法计算得到的大气透射率和反射率的相对误差高达 15%—20%。Lu 等(2009)指出二流近似可以导致 10% 以上的云顶加热率误差,而云顶加热率影响着云的发生、发展。随着气候模式时空分辨率的提高和物理过程的改进,其对于一个高精度、高速度的辐射算法的需求显得越来越迫切。张峰(2013)及 Zhang F 等(2013a, 2013b, 2016)基于辐射传输的 4 个不变性原理,建立了四流累加辐射传输方案。该方案越来越受到重视,并能显著提高对气溶胶辐射强迫的评估精度,因此在气候模式中得到广泛应用(Zhang H, et al,2015;Li, et al,2015),在辐射传输计算过程中,各种近似方案都需要对散射相函数进行相应阶数的 Legendre 函数展开。例如,二流近似方案需要对散射相函数进行二阶 Legendre 函数

展开,四流近似方案需要对散射相函数进行四阶 Legendre 函数展开。目前,无论是单柱的辐射模式,还是气候模式中的辐射方案,其四流近似方案通常采用 Henyey-Greenstein(HG)方案(Henyey, et al,1941)对散射相函数进行 Legendre 函数展开(Zhang F, et al,2013a;Zhang H, et al,2015)。Zhang F 等(2013a)对新建的四流球谐函数展开累加方案的精度进行了较为全面的评估,认为该方案能显著提高辐射通量和加热率的计算精度,但以上结论同样是基于 HG 方案得到的。而在 HG 方案中,高阶展开采用的仅仅是非对称因子  $g$  的幂次方。这种单参数近似不能准确地表示相函数的特征,尤其是无法表述相函数的后向散射特性(Kattawar,1975),因此,HG 方案会直接影响到辐射方案本身的计算精度(Li, et al,2015)。为了改进这种近似方法,Kattawar(1975)提出了双 Henyey-Greenstein(DHG)方案,是指用两个 HG 相函数的线性组合来表示散射相函数的变化特征,即用 3 参数来表示相函数。相比单参数近似的 HG 方案,该方案具有更大的自由度去刻画散射相函数各向异性的特性。DHG 方案提出已经有 40 多年,但该方案在辐射传输计算中应用甚少。此外,相比 HG 方案,该方案在辐射计算中能多大程度的提高计算精度,也均未见有相关研究。本研究对 DHG 方案进行了较为系统的研究,提出了改进的 DHG 方案(MDHG),并评估了 HG、DHG 和 MDHG 这 3 种方案的计算精度。

## 2 相函数基本理论

散射相函数是散射角的函数。对于球形粒子,可以利用米散射理论计算出其散射相函数;对于非球形粒子,可以利用 T 矩阵(Mishchenko, et al,1994)、几何光学(Yang, et al,2007)和 Bridging(Zhao, et al,2006)技术等方法计算出其散射相函数。为了便于辐射传输计算,文中将相函数用已知的数学函数表达,采用勒让德多项式展开的相函数

可以写成(Henyey, et al,1941)

$$P(\cos\Theta) = \sum_{n=0}^N \omega_n P_n(\cos\Theta) \quad (1)$$

式中,  $\omega_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(\cos\Theta) P_n(\cos\Theta) d\cos\Theta$ ,  $P_n(\cos\Theta)$ 为勒让德多项式的相函数展开项,散射角的余弦  $\cos\Theta$  为

$$\cos\Theta = \mu\mu' + (1-\mu^2)^{1/2}(1-\mu'^2)^{1/2}\cos(\varphi-\varphi') \quad (2)$$

式中,  $\mu$  为光的入射方向,  $\mu'$  为光的散射方向。对式(1)进行方位角平均可得

$$P(\mu, \mu') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\cos\Theta) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^N \int_0^{2\pi} \omega_n P_n(\cos\Theta) d\varphi \quad (3)$$

式中,  $P_n(\cos\Theta)$ 可以展开为

$$P_n(\cos\Theta) = P_n(\mu)P_n(\mu') + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\mu)P_n^m(\mu') \cos[m(\varphi-\varphi')] \quad (4)$$

根据  $\int_0^{2\pi} \cos[m(\varphi-\varphi')] d\varphi = 0, m=1, 2, \dots, n$ , 利用式(3)–(4), 可得

$$P(\mu, \mu') = \sum_{n=0}^N \omega_n P_n(\mu)P_n(\mu') \quad (5)$$

## 2.1 Henyey-Greenstein 近似

目前, 应用最为广泛的相函数是 Henyey 等(1941)提出的 Henyey-Greenstein (HG) 相函数。该方案采用非对称因子  $g$  表示相函数

$$P_{\text{HG}}(\cos\Theta) = \frac{1-g^2}{(1-2g\cos\Theta+g^2)^{3/2}} \quad (6)$$

式(6)可以展成

$$P_{\text{HG}}(\cos\Theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)g^n P_n(\cos\Theta) \quad (7)$$

根据式(3)、(5)和(7)可得方位角平均的 HG 近似相函数

$$P_{\text{HG}}(\mu, \mu') = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n P_n(\mu)P_n(\mu') \quad (8)$$

式中,  $\omega_n = (2n+1)g^n$ , 并将这种方案记为 HG。在该方案中, 相函数的高阶展开  $\omega_n$  仅用非对称因子  $g$  表示, 因此, 在辐射传输计算中得到广泛应用(Lu, et al, 2009; Liou, et al, 1988; Stamnes, et al, 1988; Li, et al, 1996; Zhang F, et al, 2013a; Zhang H, et al, 2015)。

## 2.2 双 Henyey-Greenstein 近似

双 Henyey-Greenstein (DHG) (Kattawar, 1975) 近似是指由两个 HG 相函数的线性组合来表示相函数的散射特性。相比单参数的 HG 方案而言, DHG 方案有 3 个待定参数, 因此, 有更多的自由度来表现相函数的真实特征。DHG 方案采用两个 HG 方案的权重组合来计算相函数

$$P_{\text{DHG}}(\cos\Theta) = a \frac{1-g_1^2}{(1-2g_1\cos\Theta+g_1^2)^{3/2}} + (1-a) \frac{1-g_2^2}{(1-2g_2\cos\Theta+g_2^2)^{3/2}} \quad (9)$$

根据上式, 方位角平均的 DHG 近似相函数可表示为

$$P_{\text{DHG}}(\mu, \mu') = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n P_n(\mu)P_n(\mu') = a \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)g_1^n P_n(\mu)P_n(\mu') + (1-a) \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)g_2^n P_n(\mu)P_n(\mu') \quad (10)$$

根据式(5), 可得到式(10)中 3 个参数  $a, g_1$  和  $g_2$  满足的方程

$$ag_1 + (1-a)g_2 = g \quad (11)$$

$$ag_1^2 + (1-a)g_2^2 = h \quad (12)$$

$$ag_1^3 + (1-a)g_2^3 = \ell \quad (13)$$

式中,  $g = \frac{\omega_1}{3}, h = \frac{\omega_2}{5}, \ell = \frac{\omega_3}{7}$ 。

根据以上约束方程, Kattawar(1975)给出了  $a, g_1$  和  $g_2$  的解

$$g_2 = \{ \ell - hg - [(hg - \ell)^2 - 4(h - g^2) \cdot (\ell g - h^2)]^{1/2} \} / [2(h - g^2)] \quad (14)$$

$$g_1 = (gg_2 - h) / (g_2 - g) \quad (15)$$

$$a = (g - g_2) / (g_1 - g_2) \quad (16)$$

为方便表述, 将 Kattawar(1975)提出的以上方案记为 DHG。该方案的本质是采用相函数的展开项  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  来参数化相函数。在一些特定情况下, DHG 方案得到的相函数存在异常峰值, 而这并不符合相函数的真实特征(Kattawar, 1975)。因此, 该方案在辐射传输计算中几乎没有得到应用。为了解决这一问题, 本研究采用  $\omega_1, \omega_2$  两项的相函数展开系数和相函数的整体特征来求解 DHG 方案的 3 个参数。具体步骤如下:

(1) 根据式(11)和(12)可得到包含有未知数  $a$  的方程的解

$$g_2 = g - \{-[a(h - g^2)]/(a - 1)\}^{1/2} \quad (17)$$

$$g_1 = \{ag_2 + \{-[a(h - g^2)]/(a - 1)\}^{1/2}\}/a \quad (18)$$

(2) 权重  $a$  从 0 开始以 0.001 为间隔循环至 2, 利用式(17)、(18)能得到 2000 种不同的  $a$ 、 $g_1$  和  $g_2$  组合;

(3) 从以上组合中挑选出满足  $|g_1| > |g_2|$  和  $|g_1| < 1$  的  $a$ 、 $g_1$  和  $g_2$  组合。在  $|g_1|$  和  $|g_2|$  均小于 1 时,使得相函数的高阶展开项中包含的  $g_1^n$  和  $g_2^n$  在  $n$  趋向于无穷后仍收敛。

(4) 以上每一种组合均能利用式(9)构造相函数,把构造的相函数和真实的相函数(根据粒子的谱分布和已有的粒子散射理论,就能计算出真实的相函数。文中计算得到真实的相函数从  $0^\circ$  开始以  $0.3^\circ$  为间隔,共包含 601 个值)进行比较,求得相对误差最小的一组  $a$ 、 $g_1$  和  $g_2$  组合,这种方案记为 MDHG。

### 3 计算结果比较

大气中气溶胶和云的强散射过程主要发生在短波波段。而在短波波段中,可见光波段的能量最强,通常采用波长  $0.55 \mu\text{m}$  来表示可见光波段的平均情况。因此,文中计算波长  $0.55 \mu\text{m}$  处的气溶胶和水云粒子的散射相函数,并分别利用 HG、DHG 和 MDHG 方案对其进行参数化,进一步讨论这几种参数化下相函数的精度。此外,利用四流球谐函数展开累加方案(Zhang F, et al, 2013a)比较分析以上 3 种不同相函数参数化方案下计算的反射率、透射率或吸收率的精度,将 128 流离散纵标的计算结果作为精确值(Stamnes, et al, 1988)。四流球谐函数展开累加方案的主要思想是用 4 个球谐函数来表示辐射强度在角度空间的分布特征,采用  $\omega_4$  来进行  $\delta$  调

整(Wiscombe, 1977)。该方案能显著改善辐射通量和加热率的计算,并已在北京气候中心气候系统模式(BCC\_AGCM2.0.1)和加拿大气候模拟与分析中心的气候模式(CanAM4)中得到应用(Zhang H, et al, 2015; Li, et al, 2015)。

#### 3.1 沙尘气溶胶

对于沙尘气溶胶,文中考虑随机取向的椭球粒子,并采用对数正态分布来描述沙尘粒子的分布。该分布函数曾为世界气象组织推荐(Sokolik, et al, 1998)

$$n(r) = \frac{dN(r)}{dr} = \frac{1}{r} \frac{N}{\sqrt{2\pi \ln \sigma_g}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln r - \ln r_g}{\ln \sigma_g}\right)^2\right] \quad (19)$$

式中,  $r$  为椭球沙尘等效为等体积球体的半径,  $r_g$  为粒子群的模态半径,  $\sigma_g$  为标准偏差,  $N$  为气溶胶粒子的数浓度 ( $\text{cm}^{-3}$ )。其有效半径为  $r_e = r_g \exp\left(\frac{5 \ln^2 \sigma_g}{2}\right)$ , 有效方差为  $v_e = \exp(\ln^2 \sigma_g) - 1$ 。

此处选用核模态和粗模态这两种模态,其粒子群模态半径  $r_g$  分别为  $0.07$  和  $1.90 \mu\text{m}$ , 标准偏差  $\sigma_g$  分别为  $1.95$  和  $2.15$ 。椭球粒子的纵横比为  $1.7$  (Fu, et al, 2009)。沙尘气溶胶的复折射指数为  $m = 1.53 + 0.008i$ 。利用 T 矩阵(Mishchenko, et al, 1994)和几何光学近似(Yang, et al, 2007),计算得到了这两种模态在波长  $0.55 \mu\text{m}$  处的单次散射反照率和不对称因子:粗模态沙尘为  $\omega = 0.63$  和  $g = 0.81$ , 核模态沙尘为  $\omega = 0.95$  和  $g = 0.68$ 。表 1 分别给出了核模态和粗模态沙尘在 DHG 和 MDHG 方案中的  $a$ 、 $g_1$ 、 $g_2$  和  $\omega_4$  的值。

表 1 核模态和粗模态沙尘气溶胶在 DHG 和 MDHG 方案中的  $a$ 、 $g_1$ 、 $g_2$  和  $\omega_4$  的比较  
Table 1 The comparison of DHG and MDHG for  $a$ 、 $g_1$ 、 $g_2$ 、 $\omega_4$  in dusts of nuclei and coarse modes

	$a$	$g_1$	$g_2$	$\omega_4 = 9[ag_1^4 + (1-a)g_2^4]$
DHG(核模态)	0.995	0.690	-1.485	2.213
MDHG(核模态)	0.989	0.696	-0.635	2.213
DHG(粗模态)	0.981	0.850	-1.015	4.796
MDHG(粗模态)	0.697	0.983	0.428	5.946

图 1a、b 分别给出了核模态和粗模态沙尘气溶胶相函数的精确值(Exact)以及 HG、DHG 和 MDHG 方案的结果。可以看出,粗模态沙尘具有很

强的前向峰值,其后向也有一个小的峰值。HG 方案的相函数较平滑,但其在向前和后向并不接近真值,尤其没有表现出前向的强峰值。DHG 方案的

相函数在散射角为  $54^{\circ}$ — $170^{\circ}$  时比其他两种方案更接近真值,但其在  $170^{\circ}$  后出现了相函数为负数的情况,因此该方案没有体现出粗模态沙尘的后向峰值特征。本研究提出的 MDHG 方案的相函数在散射最强的前向几乎与精确值重合,对前向强峰值的模拟精度较高。此外,MDHG 方案在后向也较 HG 和 DHG 方案更接近于真值。和粗模态沙尘相比,核模态沙尘没有很强的前向峰值。HG、DHG 和

MDHG 这 3 种方案的相函数在前向均与真值较为接近,精度相近。而在后向,这 3 种方案的相函数有较大差异。DHG 方案的相函数在后向出现了骤降,与真值差异最大,精度最差。HG 方案的相函数虽然稳定,在后向的精度高于 DHG 方案,但与真值相比仍有较大的误差。而 MDHG 方案的相函数表现出了相函数的后向特征,更接近真实的相函数。

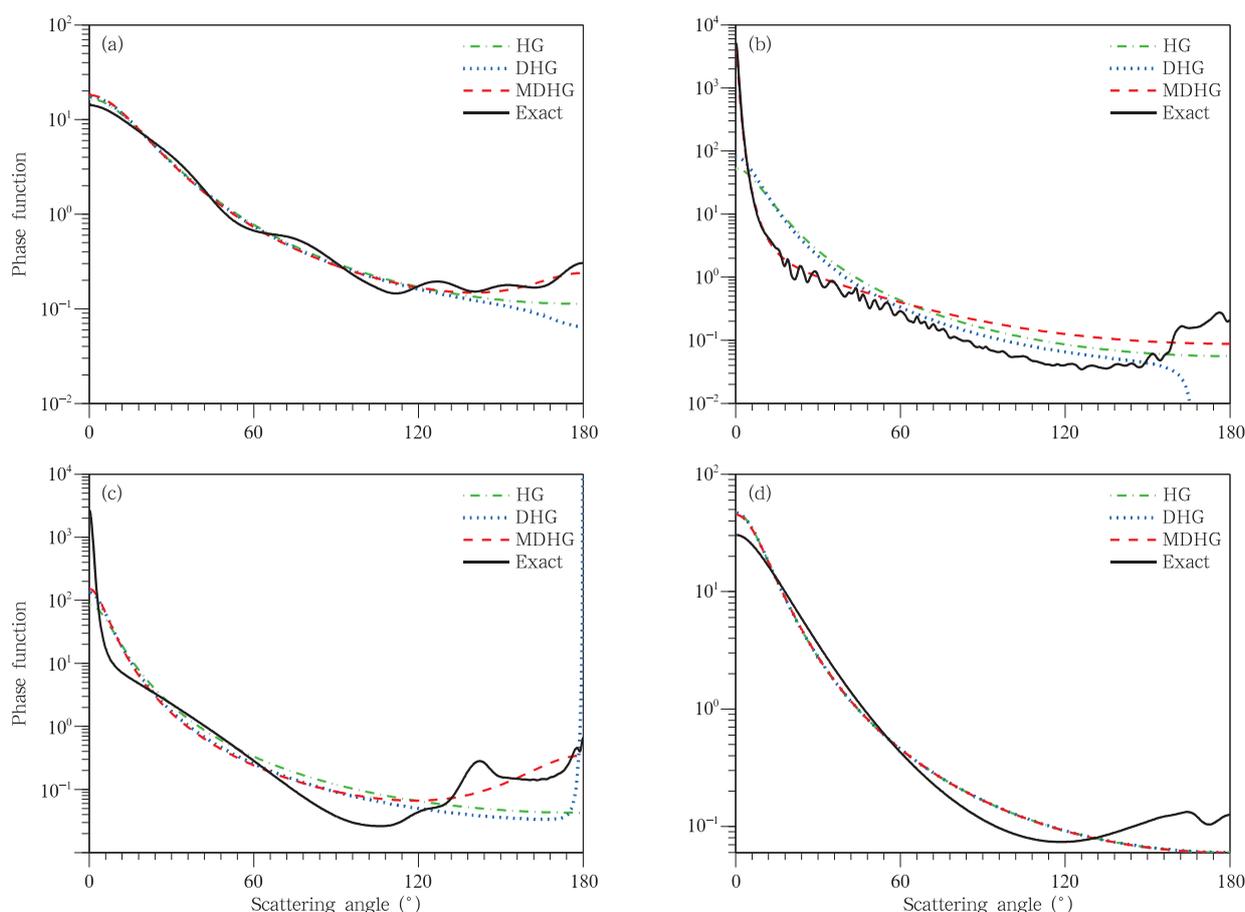


图 1 核模态沙尘气溶胶(a)、粗模态沙尘气溶胶(b)、水云(c)和霾(d)的相函数比较

Fig. 1 Phase functions of nuclei mode dusts (a), coarse mode dusts (b), water clouds (c) and haze (d)

此外,还比较了不同相函数参数化方案下的四流球谐函数展开累加方案的反射率和吸收率的精度。核模态沙尘气溶胶的反射率和吸收率在不同方案下的精度如图 2a—f 所示。从反射率的误差结果可以看出,DHG 方案相比其他两种方案误差更大,尤其在光学厚度小于 0.2 且  $\mu_0$  为 0.5—0.7 和 0.9—1.0 时相对误差可达 5%。而在此范围内,

HG 和 MDHG 方案的相对误差约为 2%。当光学厚度大于 1 时,MDHG 方案中相对误差小于 1% 的范围比 HG 和 DHG 方案大。从吸收率的误差结果来看,3 种方案精度相当,MDHG 方案在  $\mu_0$  为 0.4—0.5 且光学厚度大于 3 时,精度比 HG 和 DHG 方案略高。故总体而言,MDHG 方案比 HG 和 DHG 方案精度更高。

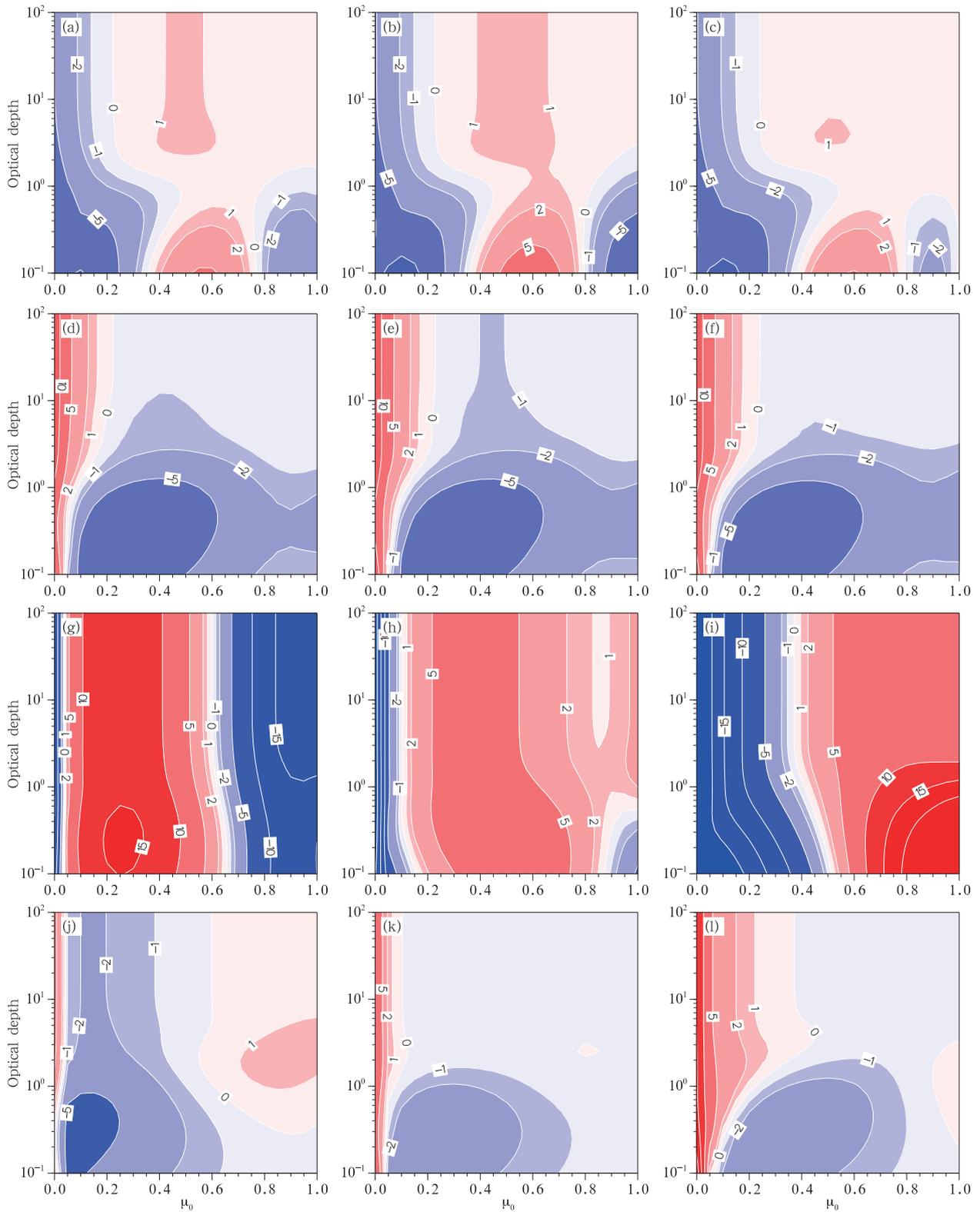


图2 核模态(a—f)和粗模态(g—l)沙尘气溶胶的反射率(a—c,g—i)和吸收率(d—f,j—k)的相对误差  
(a,d,g,j. HG, b,e,h,k. DHG, c,f,i,l. MDHG)

Fig.2 Relative errors of reflection ( a - c , g - i ) and absorption ( d - f , j - k ) for dusts in nuclei mode ( a - f ) and coarse mode ( g - l )  
( a , d , g , j . HG , b , e , h , k . DHG , c , f , i , l . MDHG )

粗模态沙尘气溶胶在不同方案下的反射率和吸收率的精度如图 2g—1 所示。从反射率的误差结果来看, HG 方案精度最低, 在  $\mu_0$  为 0.1—0.4 和 0.8—1.0 时误差都大于 10%。DHG 方案误差最小, 仅当在  $\mu_0$  小于 0.1 时相对误差大于 10%。MDHG 方案在  $\mu_0$  小于 0.2 时以及光学厚度小于 2 且  $\mu_0$  为 0.8—1.0 时的相对误差皆大于 10%, 但其相对误差大于 10% 的范围小于 HG 方案, 故 MDHG 方案的精度高于 HG 方案。从吸收率的误差结果可以看出, 这 3 种方案的精度都较高。HG 方案在  $\mu_0$  为 0.05—0.2 且光学厚度在 0.1—1 时误差大于 5%, 而其他两种方案均小于 5%。此外, HG 方案在光学厚度大于 2 且  $\mu_0$  为 0.25—0.45 时相对误差大于 1%, 而其他两种方案均接近于 0。相比之下, 3 种方案中 HG 方案精度最低。DHG 方案在  $\mu_0$

小于 0.1 时, 误差小于 MDHG 方案。故整体而言, DHG 方案相对误差最小, 精度略优于 MDHG 方案, HG 方案误差最大。

3.2 水云

水云的粒子尺度分布接近于  $\Gamma$  分布 (Pruppacher, et al, 1996)

$$n(r) = Ar^\alpha e^{-\beta r} \quad (20)$$

式中,  $A$ 、 $\alpha$  和  $\beta$  为常数,  $r$  为水云粒子的半径, 有效半径为

$$r_e = \frac{\int_0^\infty r^3 n(r) dr}{\int_0^\infty r^2 n(r) dr} = \frac{\alpha + 3}{\beta}$$

$$\frac{\int_0^\infty (r - r_e)^2 r^2 n(r) dr}{r_e^2 \int_0^\infty r^2 n(r) dr} = \frac{1}{\alpha + 3}$$

表 2 水云的 DHG 和 MDHG 方案中的  $a$ 、 $g_1$ 、 $g_2$  和  $\omega_1$  的比较  
Table 2 The comparison of DHG and MDHG for  $a$ ,  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $\omega_1$  in water clouds

	$a$	$g_1$	$g_2$	$\omega_1 = 9[ag_1^4 + (1-a)g_2^4]$
DHG	0.984	0.883	-0.999	5.526
MDHG	0.975	0.891	-0.616	5.557

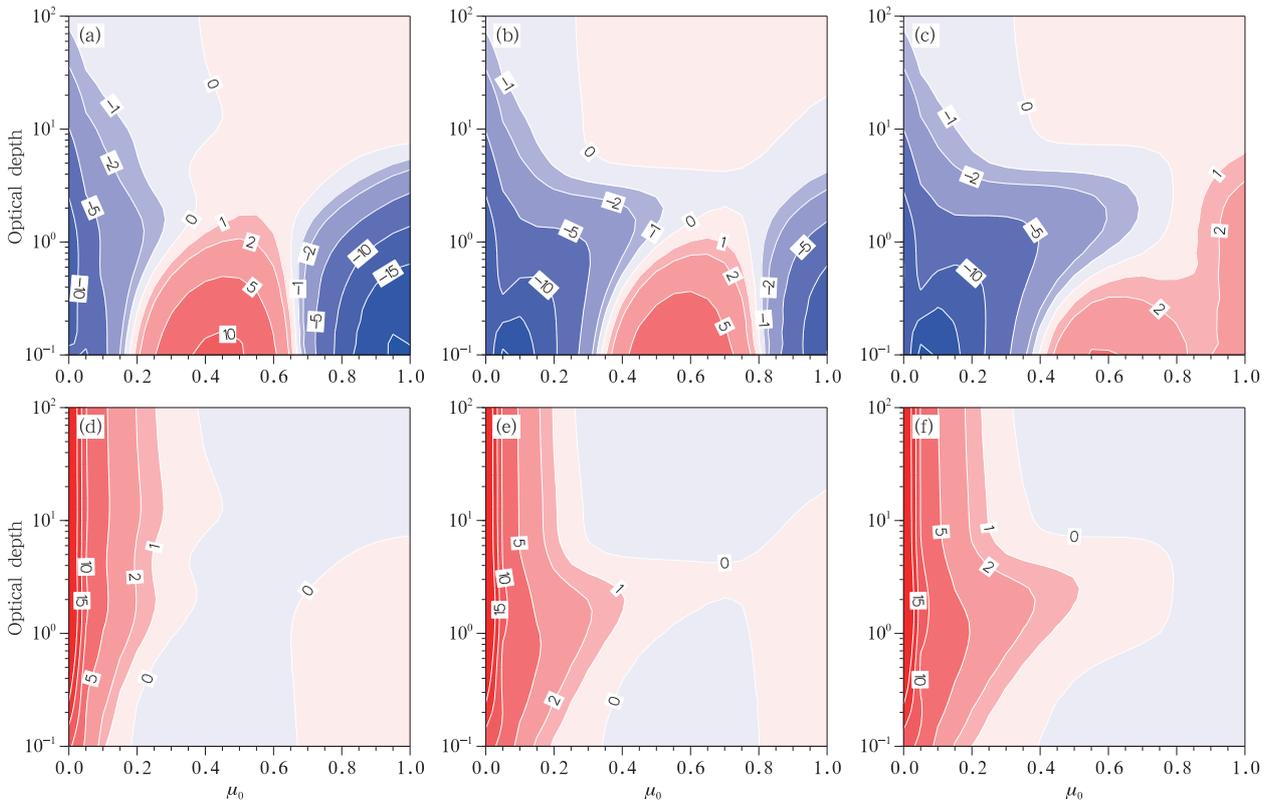


图 3 水云的反射率(a—c)和透射率(d—f)的相对误差(a, d. HG, b, e. DHG, c, f. MDHG)  
Fig. 3 Relative errors of reflection (a—c) and transmission (d—f) for water clouds (a, d. HG, b, e. DHG, c, f. MDHG)

在计算云的光学特性的参数化试验中,为了方便计算,选用水云的有效方差为  $v_e = 0.172$  (Fu, et al, 1997), 有效半径为  $r_e = 5.89 \mu\text{m}$  (Fu, et al, 1997)。该水云可以代表典型的低云特征。水云的复折射指数为  $m = 1.33 + 1.79 \times 10^{-9}i$ 。计算得到波长  $0.55 \mu\text{m}$  处水云的  $\omega$  和  $g$  分别为 1 和 0.85。表 2 中给出了在水云情况下, DHG 和 MDHG 方案得到的  $a$ 、 $g_1$ 、 $g_2$  和  $\omega_4$  的值。

由图 1c 可以看出,水云的 HG 方案的相函数没有很好地反映出相函数的真实特征,特别是相函数的后向特征。DHG 方案在  $0^\circ$ — $132^\circ$  的散射角下精度较高,但在后向出现了异常增大,甚至超过了真实相函数的前向最大值。在 3 种方案中,MDHG 方案的相函数是整体最接近于真值的,尤其是其后向精度高于其他两种方案,能很好地反应出真实相函数的后向特征。

在波长  $0.55 \mu\text{m}$  处,水云的吸收作用非常小,因此只讨论其反射率和透射率的情况。图 3a—f 为

3 种方案在水云情况下的反射率和透射率的精度比较。MDHG 方案在  $\mu_0$  为 0.4—1.0 时相对误差小于 2%, 优于其他两种方案。这 3 种方案的透射率结果基本相同,在  $\mu_0$  为 0.4—1.0 时误差几乎为 0。故总体来看,MDHG 方案相对误差最小, DHG 方案其次,这两种方案整体都要好于 HG 方案。

### 3.3 霾

对于霾粒子,采用了 Haze L 的相函数散射模型,其非对称因子  $g = 0.80$  (Garcia, et al, 1985)。从图 1d 可以看出, HG、DHG 和 MDHG 方案的相函数都几乎重合,均较为接近真实相函数。然而如表 3 所示,将 MDHG 方案得到的最优  $a$ 、 $g_1$ 、 $g_2$  和  $\omega_4$  与 DHG 方案得到的值进行比较,发现 DHG 方案中,  $g_2$  远大于  $g_1$ 。此外, DHG 方案中  $\omega_4$  出现了较大负值,这导致了光学厚度在进行  $\delta$  调整后反而增大,从而影响之后的反射率和透射率的计算精度,增大反射率和透射率的相对误差。而 MDHG 方案得到的  $g_1$ 、 $g_2$  和  $\omega_4$  均非常合理。

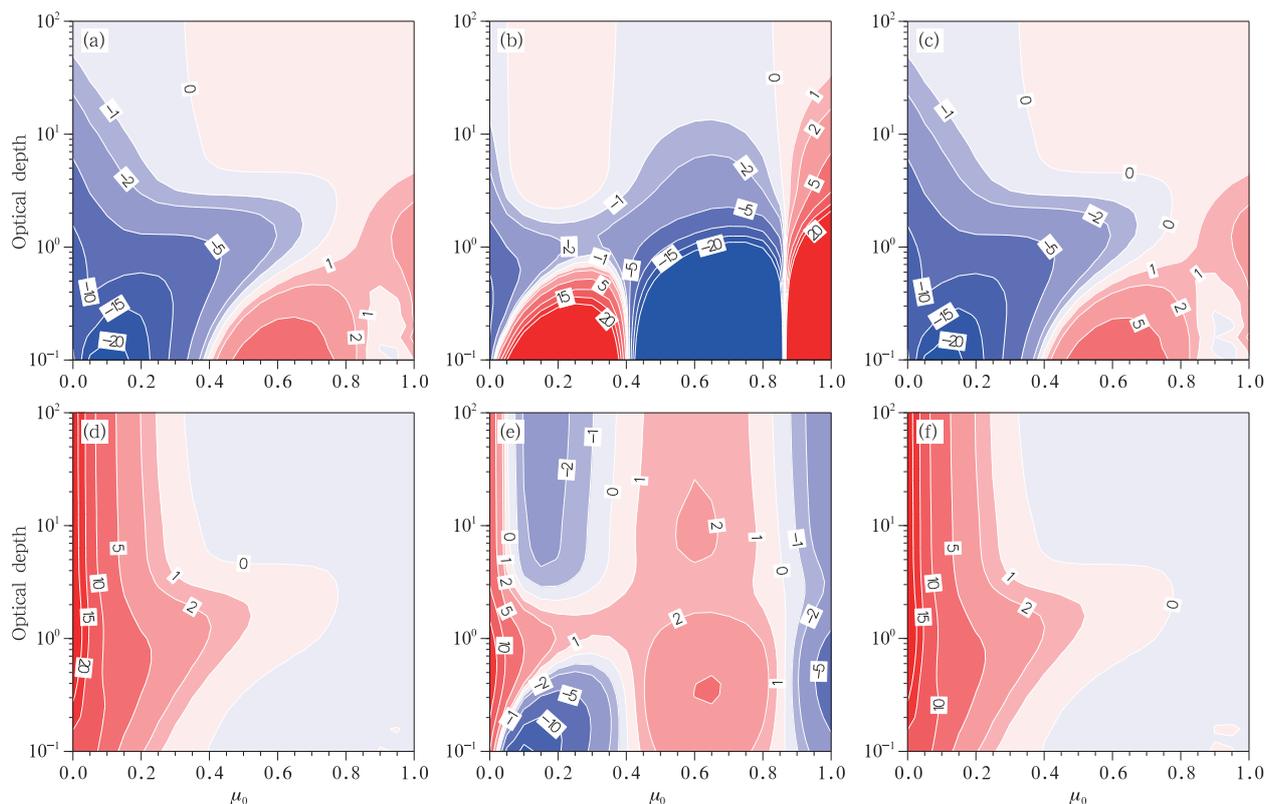


图 4 霾在单次反照率为 1 时的反射率(a—c)和透射率(d—f)的相对误差 (a, d. HG, b, e. DHG, c, f. MDHG)

Fig. 4 Relative errors of reflection ( a - c ) and transmission ( d - f ) ( $\omega = 1$ ) for haze (a, d. HG, b, e. DHG, c, f. MDHG)

表3 霾中 DHG 和 MDHG 中的  $a$ 、 $g_1$ 、 $g_2$  和  $\omega_4$  的比较  
Table 3 The comparison of DHG and MDHG for  $a$ ,  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $\omega_4$  in haze

	$a$	$g_1$	$g_2$	$\omega_4 = 9[ag_1^4 + (1-a)g_2^4]$
DHG	$1.0 + 1.98 \times 10^{-7}$	0.804	57.827	-16.156
MDHG	2.000	0.786	0.768	3.743

在计算 HG、DHG 和 MDHG 方案的反射率和透射率时,令单次散射反照率为 1,从 3 种方案的反射率和透射率的精度(图 4a—f)可以看出,DHG 方案下的反射率在光学厚度小于 1 时误差大于 20%,精度明显低于其他两种方案;同样其透射率的相对误差也是 3 种方案中最大的。HG 和 MDHG 方案的精度相当,这两种方案的透射率在  $\mu_0$  为 0.5—1.0 时的相对误差几乎为 0。

#### 4 结 论

本研究对 DHG 方案进行改进,提出了 MDHG 方案,并将 HG、DHG 和 MDHG 这 3 种方案的相函数进行了系统的对比。由相函数的比较结果发现:HG 方案的结果虽然稳定但不能表现出相函数的前向或后向的峰值特征,例如该方案无法准确地描述粗模态沙尘气溶胶相函数的前向峰值和后向峰值以及水云相函数的后向峰值。DHG 方案的相函数在后向易出现异常峰值或负值,例如该方案描述的水云相函数出现异常峰值以及粗模态沙尘气溶胶相函数出现负值。整体而言,MDHG 方案精度最高,能表现出相函数的前、后向峰值的特征。此外,还利用四流球谐函数展开累加方案,进一步比较了不同相函数参数化方案下的反射率、透射率和吸收率的计算精度。由反射率、透射率和吸收率的计算结果发现:MDHG 方案整体更为精确,而 HG 方案精度较低,例如在水云情况下其误差大于 DHG 和 MDHG 方案。DHG 方案在沙尘气溶胶和水云情况下计算的结果都比较精确,但是对霾的计算误差较大。

综合比较相函数以及反射率、透射率和吸收率的计算精度,MDHG 方案得到的相函数最能表现其前向和后向特征,且该方案计算的反射率、透射率和吸收率的精度也总体优于 HG 和 DHG 方案。因此,MDHG 方案是理想的相函数参数化方案。

#### 参考文献

荆现文,张华. 2012. McICA 云-辐射方案在国家气候中心全球气候

- 模式中的应用与评估. 大气科学, 36(5): 945-958. Jing X W, Zhang H. 2012. Application and evaluation of McICA cloud-radiation framework in the AGCM of the national climate center. Chin J Atmos Sci, 36(5): 945-958 (in Chinese)
- 邱金桓. 1998. 一个改进的  $\delta$ -Eddington 近似. 科学通报, 43(16): 1712-1716. Qiu J H. 1999. An improved  $\delta$ -Eddington approximation. Chin Sci Bull, 44(4):304-309
- 许允福,赵凤生,闵玉秋. 2011. 平面平行大气中偏振辐射传输的数值计算. 气象学报, 69(5): 912-921. Xu Y F, Zhao F S, Min Y Q. 2011. Numerical calculations for the vector discrete-ordinate radiative transfer in a plane-parallel atmosphere. Acta Meteor Sinica, 69(5): 912-921 (in Chinese)
- 杨学胜,沈元芳,徐国强. 2009. 辐射方案对 GRAPES 全球模式的影响. 大气科学, 33(3): 593-599. Yang X S, Shen Y F, Xu G Q. 2009. The impacts of radiation schemes on the GRAPES global model. Chin J Atmos Sci, 33(3): 593-599 (in Chinese)
- 张峰. 2013. 气候变化中辐射传输计算与外强迫因子反演研究 [D]. 北京: 中国科学院大学, 122pp. Zhang F. 2013. Radiative transfer parameterizations and reconstruction of driving forces in climate change[D]. Beijing: University of Chinese Academy of Sciences, 122pp (in Chinese)
- 张梦,王宏,黄兴友. 2014. NASA/Goddard 长波辐射方案在 GRAPES\_Meso 模式中的应用研究. 大气科学, 38(3): 603-614. Zhang M, Wang H, Huang X Y. 2014. Application research of the NASA/goddard longwave radiative scheme in the GRAPES\_Meso model. Chin J Atmos Sci, 38(3): 603-614 (in Chinese)
- Fu Q, Liou K N, Cribb M C, et al. 1997. Multiple scattering parameterization in thermal infrared radiative transfer. J Atmos Sci, 54(24):2799-2812
- Fu Q, Thorsen T J, Su J, et al. 2009. Test of Mie-based single-scattering properties of non-spherical dust aerosols in radiative flux calculations. J Quant Spectrosc Radiat Transfer, 110(14-16): 1640-1653
- Garcia R D M, Siewert C E. 1985. Benchmark results in radiative transfer. Transp Theory Stat Phys, 14(4): 437-483
- Heney L C, Greenstein J L. 1941. Diffuse radiation in the Galaxy. Astrophys J, 93:70-83
- Kattawar G W. 1975. A three-parameter analytic phase function for multiple scattering calculations. J Quant Spectrosc Radiat Transfer, 15(9): 839-849
- King M D, Harshvardhan. 1986. Comparative accuracy of selected multiple scattering approximations. J Atmos Sci, 43(8):784-

801

- Kylling A, Stamnes K, Tsay S C. 1995. A reliable and efficient two-stream algorithm for spherical radiative transfer: Documentation of accuracy in realistic layered media. *J Atmos Chem*, 21(2):115-150
- Li J, Ramaswamy V. 1996. Four-stream spherical harmonic expansion approximation for solar radiative transfer. *J Atmos Sci*, 53(8):1174-1186
- Li J, Dobbie J S, Raisanen P, et al. 2005. Accounting for unresolved clouds in a 1-D solar radiative-transfer model. *Quart J Roy Meteor Soc*, 131(608):1607-1629
- Li J, Barker H, Yang P, et al. 2015. On the aerosol and cloud phase function expansion moments for radiative transfer simulations. *J Geophys Res*, 120(23): 12128-12142, doi: 10.1002/2015JD023632
- Liou K N, Fu Q, Ackerman T P. 1988. A simple formulation of the delta-four-stream approximation for radiative transfer parameterizations. *J Atmos Sci*, 45(13):1940-1947
- Lu P, Zhang H, Li J. 2009. A new complete comparison of two-stream DISORT and Eddington radiative transfer schemes in a real atmospheric profile. *J Quant Spectrosc Radiat Transfer*, 110(1-2):129-138
- Mishchenko M I, Travis L D. 1994. T-matrix computations of light scattering by large spheroidal particles. *Opt Commun*, 109(1-2): 16-21
- Pruppacher H R, Klett J D. 1996. *Microphysics of Clouds and Precipitation*. Dordrecht Boston: Kluwer Academic Publishers, 976pp
- Qiu J H. 1999. Modified delta-eddington approximation for solar reflection, transmission, and absorption calculations. *J Atmos Sci*, 56(16):2955-2961
- Sokolik I N, Toon O B, Bergstrom R W. 1998. Modeling the radiative characteristics of airborne mineral aerosols at infrared wavelengths. *J Geophys Res*, 103(D8): 8813-8826
- Stamnes K, Tsay S C, Wiscombe W, et al. 1988. Numerically stable algorithm for discrete-ordinate-method radiative transfer in multiple scattering and emitting layered media. *Appl Opt*, 27(12):2502-2509
- Wiscombe W J. 1977. The delta-M method; Rapid yet accurate radiative flux calculations for strongly asymmetric phase functions. *J Atmos Sci*, 34(9):1408-1422
- Yang P, Feng Q, Hong G, et al. 2007. Modeling of the scattering and radiative properties of nonspherical dust-like aerosols. *J Aerosol Sci*, 38(10): 995-1014
- Zhang F, Li J. 2013a. Doubling-adding method for delta-four-stream spherical harmonic expansion approximation in radiative transfer parameterization. *J Atmos Sci*, 70(10): 3084-3101
- Zhang F, Shen Z, Li J, et al. 2013b. Analytical delta-four-stream doubling-adding method for radiative transfer parameterizations. *J Atmos Sci*, 70(3): 794-808
- Zhang F, Wu K, Li J, et al. 2016. Analytical infrared delta-four-stream adding method from invariance principle. *J Atmos Sci*, doi: <http://dx.doi.org/10.1175/JAS-D-15-0317.1>
- Zhang H, Jing X, Li J. 2014. Application and evaluation of a new radiation code under McICA scheme in BCC\_AGCM2.0.1. *Geosci Model Dev*, 7(3): 737-754
- Zhang H, Wang Z L, Zhang F, et al. 2015. Impact of four-stream radiative transfer algorithm on aerosol direct radiative effect and forcing. *Int J Climatol*, 35(14): 4318-4328, doi: 10.1002/joc.4289
- Zhao J Q, Shi G Y, Che H Z, et al. 2006. Approximations of the scattering phase functions of particles. *Adv Atmos Sci*, 23(5): 802-808

## 附录

在无时间变化,弹性、独立散射的近似条件下,方位角平均的平面平行的辐射传输方程为

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} = I(\tau, \mu) - \frac{\omega}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu') P(\mu, \mu') d\mu' - \frac{\omega}{4\pi} F_0 e^{-\tau/\mu_0} P(\mu, -\mu_0) \quad (\text{A1})$$

$$I(0, \mu) = 0 \quad (-1 \leq \mu \leq 0) \quad (\text{A2})$$

$$I(\tau_0, \mu) = 0 \quad (0 \leq \mu \leq 1) \quad (\text{A3})$$

式中,  $I(\tau, \mu)$  是指介质中光学厚度为  $\tau$ , 天顶角的方向余弦为  $\mu$  的辐射强度。  $F_0$  为大气顶垂直于太阳光方向的辐射通量,  $\tau_0$  是该介质的总光学厚度, 其中方位角平均的相函数为

$$P(\mu, \mu') = \sum_{l=0}^N \omega_l P_l(\mu) P_l(\mu') \quad (\text{A4})$$

球谐函数谱展开的目的就是将辐射强度对角度的依赖进行分离, 因此, 假设散射强度为

$$I(\tau, \mu) = \sum_{l=0}^N I_l(\tau) P_l(\mu) \quad (\text{A5})$$

取  $N=3$ , 将辐射强度的在角度空间分布用 4 个自由度来表示, 即为四流球谐函数展开方法, 根据辐射传输方程可得

$$\frac{dI_1}{d\tau} = a_0 I_0 - b_0 e^{-\tau/\mu_0} \quad (\text{A6})$$

$$2 \frac{dI_2}{d\tau} + \frac{dI_0}{d\tau} = a_1 I_1 - b_1 e^{-\tau/\mu_0} \quad (\text{A7})$$

$$3 \frac{dI_3}{d\tau} + 2 \frac{dI_1}{d\tau} = a_2 I_2 - b_2 e^{-\tau/\mu_0} \quad (\text{A8})$$

$$3 \frac{dI_2}{d\tau} = a_3 I_3 - b_3 e^{-\tau/\mu_0} \quad (\text{A9})$$

上式中,  $a_l = [(2l+1) - \omega\omega_l], b_l = \omega\omega_l P_l(-\mu_0) \frac{F_0}{4\pi}$  ( $l=0, 1, 2, 3$ )。以上方程可以用矩阵形式表示

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} I_0(\tau) \\ I_1(\tau) \\ I_2(\tau) \\ I_3(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & -\frac{2}{3}a_3 \\ a_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}a_3 \\ -\frac{2}{3}a_0 & 0 & \frac{1}{3}a_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0(\tau) \\ I_1(\tau) \\ I_2(\tau) \\ I_3(\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3}b_3 - b_1 \\ -b_0 \\ -\frac{1}{3}b_3 \\ \frac{2}{3}b_0 - \frac{1}{3}b_2 \end{bmatrix} e^{-\tau/\mu_0} \quad (\text{A10})$$

利用一阶线性微分方程组基本理论, 求得以上方程的解

$$\begin{bmatrix} I_0(\tau) \\ I_1(\tau) \\ I_2(\tau) \\ I_3(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_3 & e_2 & e_4 \\ R_1 e_1 & -R_1 e_3 & R_2 e_2 & -R_2 e_4 \\ \hat{P}_1 e_1 & \hat{P}_1 e_3 & \hat{P}_2 e_2 & \hat{P}_2 e_4 \\ Q_1 e_1 & -Q_1 e_3 & Q_2 e_2 & -Q_2 e_4 \end{bmatrix} \mathbf{G} + \begin{bmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} \mathbf{E}^{-f_0 \tau} \quad (\text{A11})$$

式中, 参数  $f_0 = 1/\mu_0$ ,  $\mathbf{G} = [C_1 \ D_1 \ C_2 \ D_2]^T$ ,  $e_1 = e^{-k_1 \tau}$ ,  $e_2 = e^{-k_2 \tau}$ ,  $e_3 = e^{-k_1(\tau_0 - \tau)}$ ,  $e_4 = e^{-k_2(\tau_0 - \tau)}$ ,  $R_{1,2} = -a_0/k_{1,2}$ ,  $\hat{P}_{1,2} = \frac{1}{2}(a_0 a_1/k_{1,2}^2 - 1)$ ,  $Q_{1,2} = -\frac{3}{2}(a_0 a_1/k_{1,2} - k_{1,2})/a_3$ , 其他相关参数  $k_{1,2}$  和  $\eta_{0,1,2,3}$  相关定义见 Zhang F 等(2013a)和张峰(2013)。 $\mathbf{G} = [C_1 \ D_1 \ C_2 \ D_2]^T$  可由边界条件式(A2)–(A3)得到。根据式(A5)并取  $N=3$ , 可得向上、向下的辐射通量为

$$F^+(\tau) = \pi [I_0(\tau) + 2I_1(\tau) + \frac{5}{4}I_2(\tau)] \quad (\text{A12})$$

$$F^-(\tau) = \pi[I_0(\tau) - 2I_1(\tau) + \frac{5}{4}I_2(\tau)] \quad (\text{A13})$$

因此,该层介质的反射率  $r(\tau_0, \mu_0)$ 、透射率  $t(\tau_0, \mu_0)$ 、吸收率  $a(\tau_0, \mu_0)$  为

$$r(\tau_0, \mu_0) = F^+(0)/(\mu_0 F_0) \quad (\text{A14})$$

$$t(\tau_0, \mu_0) = F^-(\tau_0)/(\mu_0 F_0) + e^{-\tau_0/\mu_0} \quad (\text{A15})$$

$$a(\tau_0, \mu_0) = 1 - r(\tau_0, \mu_0) - t(\tau_0, \mu_0) \quad (\text{A16})$$

对于计算多层非均匀介质联合辐射通量,可采用累加法进行计算。首先,从第 1 层开始不断向下迭代,得到第 1 层至第  $k$  层联合的透射矩阵  $\mathbf{T}_{1,k}(\mu_0)$  和反射矩阵  $\bar{\mathbf{R}}_{1,k}^*$

$$\mathbf{T}_{1,k}(\mu_0) = \mathbf{T}_k(\mu_0)e^{-\tau_{1,k-1}/\mu_0} + \bar{\mathbf{T}}_k \mathbf{T}_{1,k-1}(\mu_0) + \bar{\mathbf{T}}_k \bar{\mathbf{R}}_{1,k-1}^* [\mathbf{E} - \bar{\mathbf{R}}_k \bar{\mathbf{R}}_{1,k-1}^*]^{-1} [\mathbf{R}_k(\mu_0)e^{-\tau_{1,k-1}/\mu_0} + \bar{\mathbf{R}}_k \mathbf{T}_{1,k-1}(\mu_0)] \quad (\text{A17})$$

$$\bar{\mathbf{R}}_{1,k}^* = \bar{\mathbf{R}}_k^* + \bar{\mathbf{T}}_k \bar{\mathbf{R}}_{1,k-1}^* [\mathbf{E} - \bar{\mathbf{R}}_{1,k-1}^* \bar{\mathbf{R}}_k]^{-1} \bar{\mathbf{T}}_k^* \quad (\text{A18})$$

式中,  $\tau_{1,k} = \sum_{j=1}^k \tau_j$  为第 1 层至  $N$  层累积的光学厚度,  $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  为  $2 \times 2$  的单位矩阵。其次,从地表(第  $N$

层)开始不断向上迭代,得到第  $N$  至第  $k$  层联合的反射矩阵  $\mathbf{R}_{k,N}(\mu_0)$  和  $\bar{\mathbf{R}}_{k,N}$

$$\mathbf{R}_{k,N}(\mu_0) = \mathbf{R}_k(\mu_0) + \bar{\mathbf{T}}_k^* [\mathbf{E} - \bar{\mathbf{R}}_{k+1,N} \bar{\mathbf{R}}_k^*]^{-1} [\mathbf{R}_{k+1,N}(\mu_0)e^{-\tau_{k+1}/\mu_0} + \bar{\mathbf{R}}_{k+1,N} \mathbf{T}_k(\mu_0)] \quad (\text{A19})$$

$$\bar{\mathbf{R}}_{k,N} = \bar{\mathbf{R}}_k + \bar{\mathbf{T}}_k^* \bar{\mathbf{R}}_{k+1,N} [\mathbf{E} - \bar{\mathbf{R}}_k^* \bar{\mathbf{R}}_{k+1,N}]^{-1} \bar{\mathbf{T}}_k \quad (\text{A20})$$

式中,  $\mathbf{R}_N(\mu_0) = \begin{bmatrix} r_s \\ \gamma_N(\mu_0) \end{bmatrix}$ ,  $\bar{\mathbf{R}}_N(\mu_0) = \begin{bmatrix} r_s & 0 \\ \bar{\gamma}_N^a & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\gamma_N(\mu_0) = \bar{\gamma}_N^a = 2 \int_0^1 r_s P_3(\mu) d\mu = -\frac{1}{4} r_s$ ,  $r_s$  为朗伯地表反照率。

在  $k+1$  层次处(第  $k$  层的下边界)向上和向下的无量纲的辐射强度  $\mathbf{U}_{k+1}(\mu_0) = \begin{bmatrix} u_{k+1}(\mu_0) \\ v_{k+1}(\mu_0) \end{bmatrix}$  和  $\mathbf{D}_{k+1}(\mu_0) = \begin{bmatrix} d_{k+1}(\mu_0) \\ \sigma_{k+1}(\mu_0) \end{bmatrix}$  为

$$\mathbf{U}_{k+1}(\mu_0) = [\mathbf{E} - \bar{\mathbf{R}}_{k+1,N} \bar{\mathbf{R}}_{1,k}^*]^{-1} [\mathbf{R}_{k+1,N}(\mu_0)e^{-\tau_{1,k}/\mu_0} + \bar{\mathbf{R}}_{k+1,N} \mathbf{T}_{1,k}(\mu_0)] \quad (\text{A21})$$

$$\mathbf{D}_{k+1}(\mu_0) = \mathbf{T}_{1,k}(\mu_0) + \bar{\mathbf{R}}_{1,k}^* [\mathbf{E} - \bar{\mathbf{R}}_{k+1,N} \bar{\mathbf{R}}_{1,k}^*]^{-1} [\mathbf{R}_{k+1,N}(\mu_0)e^{-\tau_{1,k}/\mu_0} + \bar{\mathbf{R}}_{k+1,N} \mathbf{T}_{1,k}(\mu_0)] \quad (\text{A22})$$

因此,在  $k+1$  层(第  $k$  层的下边界)处向上和向下的辐射通量分别

$$F_{k+1}^+ = \mu_0 F_0 u_{k+1}(\mu_0) \quad (\text{A23})$$

$$F_{k+1}^- = \mu_0 F_0 d_{k+1}(\mu_0) + \mu_0 F_0 e^{-\tau_{1,k}/\mu_0} \quad (\text{A24})$$

大气层顶向上和向下的辐射通量为

$$F_1^+ = \mu_0 F_0 r_{1,N}(\mu_0) \quad (\text{A25})$$

$$F_1^- = \mu_0 F_0 \quad (\text{A26})$$

式中,  $u_{k+1}$ 、 $d_{k+1}$  和  $r_{1,N}$  为矩阵  $\mathbf{U}_{k+1}(\mu_0)$ 、 $\mathbf{D}_{k+1}(\mu_0)$  和  $\mathbf{R}_{1,N}(\mu_0)$  的第 1 个元素。关于  $\mathbf{T}_{1,k}(\mu_0)$ 、 $\bar{\mathbf{R}}_{1,k}^*$ 、 $\mathbf{R}_{k,N}(\mu_0)$ 、 $\bar{\mathbf{R}}_{k,N}$ 、 $\mathbf{U}_{k+1}(\mu_0)$  和  $\mathbf{D}_{k+1}(\mu_0)$  的相关定义见 Zhang F 等(2013a)和张峰(2013)。