

# 单多普勒天气雷达反演降水粒子 垂直速度 I: 算法分析<sup>\*1</sup>

周生辉<sup>1</sup> 魏 鸣<sup>1,2</sup> 张培昌<sup>1</sup> 徐洪雄<sup>2</sup> 赵 畅<sup>1</sup>

ZHOU Shenghui<sup>1</sup> WEI Ming<sup>1,2</sup> ZHANG Peichang<sup>1</sup> XU Hongxiong<sup>2</sup> ZHAO Chang<sup>1</sup>

1. 气象灾害预报预警与评估协同创新中心, 南京信息工程大学, 南京, 210044

2. 灾害天气国家重点实验室, 中国气象科学研究院, 北京, 100081

1. Collaborative Innovation Center on Forecast and Evaluation of Meteorological Disasters, Nanjing University of Information Science & Technology, NUIST, Nanjing 210044, China

2. State Key Laboratory of Severe Weather, Chinese Academy of Meteorological Sciences, Beijing 100081, China

2013-12-30 收稿, 2014-04-28 改回.

周生辉, 魏鸣, 张培昌, 徐洪雄, 赵畅. 2014. 单多普勒天气雷达反演降水粒子垂直速度 I: 算法分析. 气象学报, 72(4): 760-771  
Zhou Shenghui, Wei Ming, Zhang Peichang, Xu Hongxiong, Zhao Chang. 2014. The precipitation particles' vertical velocity retrieval with single Doppler weather radar. Part I: Retrieval methods analysis. Acta Meteorologica Sinica, 72(4): 760-771

**Abstract** The ill-conditioned coefficient matrix and error sensitivities of the Volume Velocity Processing (VVP) wind retrieval method with Doppler radar are analyzed in mathematics, and the equations for resolving vertical velocity are modified especially. Given the condition number varies largely when the different fitted parameters chosen, the partial parameters with small magnitude are always neglected in retrieval. The analysis of error's norm verified that model errors might be introduced, but simplified wind model can decrease the difficulty in solving and stabilize the retrieval results. In the VVP retrieval algorithm, the linear correlation among the coefficient matrix vectors caused the matrix singularity. It is demonstrated that the accuracy of the fitted parameters could be affected when combining or abandoning linear correlation items in the coefficient matrix, and the model bias varied along with the position of analyzed points, not with the magnitude of parameters only, but the partial fitted parameters could remain accuracy. Based on the error analysis of VVP retrieval method, the errors when abandoning some parameters are analyzed and examined. The demonstrations of solving equations' modification further provide a fundamental understanding for the accurate retrieval of the vertical velocity.

**Key words** Single Doppler weather radar, Modified VVP method, Ill-conditioned matrix, Vertical velocity, Sensitivity analysis

**摘 要** 针对多普勒雷达风场反演的体积速度处理 (Volume Velocity Processing, VVP) 方法中系数矩阵的病态问题, 从数学上进行了分析和论证, 对反演的误差进行了敏感性分析, 并对垂直速度的求解方程作了改进. 系数矩阵的条件数将随着待反演参量的不同而差别很大, 通常的处理方法是舍弃量级较小的参量, 通过对误差范数的分析, 证明这种处理尽管存在模型误差, 但能够降低求解难度和结果误差. 对系数矩阵病态原因的分析发现, 系数矩阵矢量的线性相关造成了矩阵奇异, 当合并或舍弃线性相关项时, 待反演参量会受模型误差的影响, 并且这种模型误差的大小并不仅与待反演参量的量级有关, 而且随

\* 资助课题: 江苏省普通高校研究生科研创新计划项目 (CXZZ12\_0501, CXLX12\_0501)、国家重点基础研究发展计划 973 项目 (2013CB430102)、江苏省高校自然科学重大基础研究项目 (10KJA170030)、国家高技术研究发展计划 863 项目 (2007AA061901, 2012AA091801)、公益性行业 (气象) 科研专项 (GYHY201206038, GYHY201306040)、灾害天气国家重点实验室开放课题 (2013LASW-B16)、北极阁基金 (BJG201208)、中国气象局 2014 年关键技术项目 (CMAGJ2014M21)、航空科学基金项目 (201320R2001)、水利部公益性行业科研专项 (201201063)、国家自然科学基金 (41165008)。

作者简介: 周生辉, 从事大气探测和灾害性天气分析研究. E-mail: shenghui321@163.com

通讯作者: 魏鸣, 主要从事大气探测和灾害性天气分析研究. E-mail: mingwei@nuist.edu.cn

着位置的不同而改变,但是部分待参量仍然可以保持准确值。在对 VVP 算法误差分析的基础上,分析并验证了舍弃部分参量时的反演误差,改进的算法为准确反演降水粒子的垂直速度提供了理论基础。

**关键词** 单多普勒天气雷达,改进的 VVP 方法,病态矩阵,垂直速度,敏感性分析

**中图法分类号** P415.2

## 1 引言

多普勒雷达是探测中小尺度降水的重要手段,有助于了解降水区内的风场结构。多普勒雷达探测的径向速度包含了水平风场和垂直风场信息,由于其仅探测径向速度分布,而不能直接得到三维风场结构的信息,所以理论上直接获取大气的三维风场结构至少需要 3 部雷达同时探测(Armijo, 1969; Miller, et al, 1974),但多部雷达联合探测需要同步观测区域,这种探测模式不仅耗资巨大,而且探测的范围有限。在利用单多普勒天气雷达反演风场的研究中,Lhermitte 等(1961)提出了基于均匀风场假设下的速度方位显示(VAD)方法,但 VAD 方法的风场模型不适用于复杂风场的反演,为了能够得到更多的风场信息和更精细的风场结构,随后相继出现了 VARD (Velocity area display)(Easterbrook, 1975),体积速度处理(Volum Velcaty Processing, VVP)(Waldteufel, et al, 1979),EVAD (Extend-VAD)(Srivastava, et al, 1986; Matejka, et al, 1991),VAP (Velocity-azimuth processing)(陶祖钰, 1992),CEVAD (Concurrent extend-VAD)(Matejka, 1993),涡度-散度法(姜海燕等, 1997),AVAD (Airbone-VAD)(Leon, et al, 1998),TREC (Tracking radar echo by correlation)(Tuttle, et al, 1999),VPP (Velocity Plan Processing)(郎需兴等, 2001),GVAD (Gao, et al, 2004),T-IVAP (Integrating VAP)(Liang, 2007),EVPP(Extended VPP)(方德贤等, 2007),TREC (Typhoon circulation TREC)(王明筠等, 2010),反演热带气旋近中心风场的 VAP 扩展应用方法(罗昌荣等, 2011),反射率因子和径向速度共同约束法(韩丰等, 2013)等基于各种简单假设下的风场反演算法。

假设风场满足运动学或动力学规律而构建的三维或四维变分反演方法可以同时使用多部多普勒雷达的观测数据。在变分方法中不仅可以融合多种观测资料作为背景场,而且还可以将动力学方程或者

诊断方程作为约束条件。因而部分非观测的大气参量与小尺度的大气结构都可通过反演得到(Gao, et al, 1999, 2006; Huang, et al, 2010; Protat, et al, 1999; Qiu, et al, 1992; Rihan, et al, 2005; Shapiro, et al, 1995, 2003, 2009; Sun, et al, 1997; Sun, 1998; Liu, et al, 2005; Weygandt, et al, 2002)。但由于观测误差与约束方程引入的模型误差等因素的影响,变分方法的泛函数在选取合适的权重系数时仍存在困难(Shapiro, et al, 2009)。若风场模型存在偏差,如风场结构在雷达扫描过程中不变的假设不成立时,反演的精度会大幅度降低。对于早期利用单多普勒雷达反演风场的方法,主要是基于简单风场模型假设提出的。因此在处理简单风场时,往往能得到较好的反演效果(Shapiro, et al, 1995)。另外,简单风场模型得到的反演结果,还可以作为变分方法的初始条件。在实际业务应用中,如变分方法等算法由于计算过程较复杂、耗时相对较多也限制了其使用(Caya, et al, 2002; Gao, et al, 2006)。另外,多普勒雷达网间距较大,能够实现多部雷达联合观测的区域有限,因而利用简单风场假设的单多普勒雷达反演方法,在实时分析天气过程中仍有优势。

由于风场模型的假设条件不同,各种反演方法的适用范围也不同,实际应用中大多数反演算法在低仰角的二维水平风场反演中,往往忽略垂直速度对反演精度的影响。相比其他反演算法,基于线性风场假设的体积速度处理(VVP)算法可以较好地描述真实风场,使用体积扫描资料能够得到较多的三维风场信息,因此在国际上被广泛应用。但 VVP 方法包含的待反演参量较多,反演过程中系数矩阵的病态问题会造成求解困难,使反演结果的误差较大,甚至不能直接求解。针对这种求解时遇到的困难,一般的做法是减少反演参数的个数以降低计算难度(Xin, et al, 1998; Holleman, 2005),这样的处理不仅能求解,而且可使解更稳定。在算法求解方面的研究中,Waldteufel 等(1979)根据反演参量

的量级大小,选择舍弃了较小的量,简化了求解矩阵。Boccippio (1995) 选取了其中 6 个参量,应用奇异矩阵分解的方法进行反演,同时对忽略其他变量进行了敏感试验,指出被忽略的变量在反演时会成为潜在的误差来源。魏鸣(1998)对系数矩阵的特点进行了分析,指出反演垂直速度中的病态矩阵问题,用矩阵平衡的方法减少条件数,并根据共轭梯度算法迭代求解。Li 等(2007) 提出了分步计算的方法,先求出均匀风场下的反演结果,然后通过风场参量之间的假设关系进一步得出其他参量。

虽然通过 VVP 反演方法理论上可以得到完整的三维风场信息,但反演时风场模型的完整性与系数矩阵的复杂程度会明显影响反演结果,因而也限制了对垂直速度的反演。当建立风场模型选取较多的反演参数时,虽然减小了模型误差的影响(王鹏飞等,2011),但 VVP 算法中由于复杂系数矩阵的条件数过多,会将计算误差与观测误差放大而影响反演精度。同样,若选取较少的反演参数,虽可避免因条件数过多引起的计算误差,但由于风场模型过于简单,也会限制其在复杂风场反演中的应用。由系数矩阵对反演精度的影响,已有研究指出系数矩阵中基函数的线性相关是造成矩阵病态的原因(Boccippio, 1995; Waldteufel, et al, 1979),但线性相关的项及其成因并未确定。

本研究从数学上分析和论证了造成系数矩阵病态的原因,针对垂直速度的反演,提出了改进的 VVP 算法,并验证了求解方程。

## 2 VVP 算法及系数矩阵病态的原因

### 2.1 VVP 算法简介

VVP 算法利用多普勒天气雷达多个 PPI(plane position indicator)扫描资料进行反演,将径向、切向和垂直方向构成的一个三维空间作为分析体积(Waldteufel, et al, 1979)。由于选取的分析对象是一个三维的空间区域,因而适用于高仰角的情况。在选定的分析体积中假设:(1)风场结构呈线性分布,(2)在雷达扫描期间风场不随时间变化。

在直角坐标系中以雷达为原点,分析体积的中心坐标为 $(x_0, y_0, z_0)$ ,并认为降水粒子(以下简称粒子)的水平速度等于风场的水平速度,分析体积中心

的粒子速度大小为 $V = (u_0, v_0, w_0)$ ,则分析体积内各点的粒子速度大小可表示为

$$\begin{cases} u = u_0 + u_x(x - x_0) + u_y(y - y_0) + u_z(z - z_0) \\ v = v_0 + v_x(x - x_0) + v_y(y - y_0) + v_z(z - z_0) \\ w = w_0 + w_x(x - x_0) + w_y(y - y_0) + w_z(z - z_0) \\ w_0 = w_w + W_f \end{cases} \quad (1)$$

式中, $(x, y, z)$ 为分析体积内各点坐标, $(u, v, w)$ 为各点处粒子速度的 3 个分量, $w_w$ 为分析体积中心的垂直风速, $W_f$ 为粒子的下落末速度。

由风场在雷达径向上的投影关系,雷达观测到的径向速度为

$$V_r = u \cos \varphi \sin \theta + v \cos \varphi \cos \theta + w \sin \varphi \quad (2)$$

式中, $\theta$ 为雷达探测的方位角,正北方向为起点; $\varphi$ 为仰角。

由于多普勒雷达探测到的是降水粒子的有效回波,当粒子的尺寸较小时,粒子的运动状态可认为是大气的状态。而当粒子脱离大气开始下落后,粒子的垂直速度则为大气的垂直速度与粒子下落速度之和。而在建立反演风场的算法模型时,将粒子下落末速度这一常量与垂直风速 $w_w$ 合并,仍将式(1)中的参量 $(u_0, v_0, w_0, u_x, u_y, u_z, v_x, v_y, v_z, w_x, w_y, w_z)$ 作为风场模型的待反演参量,对应式(2)中的系数分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= [p_1, p_2, \dots, p_{12}] \\ &= [H_x, H_y, H_z, \\ &\quad dxH_x, dyH_x, dzH_x, \\ &\quad dxH_y, dyH_y, dzH_y, \\ &\quad dxH_z, dyH_z, dzH_z] \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix}$$

因此,为求解式(2),可构建求解方程

$$\mathbf{P}\mathbf{X} = V_r \quad (3)$$

即

$$\mathbf{X} = (\mathbf{P}^T \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^T V_r \quad (4)$$

将式(3)简化,在一个分析体积内,则有

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (5)$$

式中,

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^N (P_i^T P_i) = \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} p_{1i} \times p_{1i} & p_{2i} \times p_{1i} & p_{3i} \times p_{1i} & \cdots & p_{11i} \times p_{1i} & p_{12i} \times p_{1i} \\ p_{1i} \times p_{2i} & p_{2i} \times p_{2i} & p_{3i} \times p_{2i} & \cdots & p_{11i} \times p_{2i} & p_{12i} \times p_{2i} \\ p_{1i} \times p_{3i} & p_{2i} \times p_{3i} & p_{3i} \times p_{3i} & \cdots & p_{11i} \times p_{3i} & p_{12i} \times p_{3i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{1i} \times p_{11i} & p_{2i} \times p_{11i} & p_{3i} \times p_{11i} & \cdots & p_{11i} \times p_{11i} & p_{12i} \times p_{11i} \\ p_{1i} \times p_{12i} & p_{2i} \times p_{12i} & p_{3i} \times p_{12i} & \cdots & p_{11i} \times p_{12i} & p_{12i} \times p_{12i} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^N (P_i^T \cdot v_{ri}) = \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} p_{1i} \times V_{ri} \\ p_{2i} \times V_{ri} \\ p_{3i} \times V_{ri} \\ \cdots \\ p_{11i} \times V_{ri} \\ p_{12i} \times V_{ri} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}^T = [u_0, v_0, w_0, u_x, u_y, u_z, v_x, v_y, v_z, w_x, w_y, w_z]$$

式中,  $\mathbf{A}$  为反演算法中的系数矩阵,  $N$  为分析体积内格点数,  $V_{ri}$  为每个格点上的径向速度值。通过求解式(4)即可得到各风场参量。

## 2.2 误差因素对反演精度的影响

从误差分析的角度来看,在反演过程中影响结果精度的误差可概括为:(1) 建立风场模型时,因数学模型不准确(忽略了次要因素)造成的误差,此为“模型误差”;(2) 观测得到的模型参数(坐标值)或者初始数据(径向风速)带有的误差,此为“观测误差”;(3) 在求解时,由于计算方式和计算机精度造成的误差,此为“计算误差”(王鹏飞等,2011)。

在计算机精度限制的情况下,系数矩阵的阶数越高、条件数越多、计算机字长越短,则舍入误差对解的影响越大。因而求解精度受限于矩阵的规模、矩阵的性态、选取的算法和计算机精度等因素。因此,系数矩阵运算时的复杂度越高,通过式(5)直接求解时反演结果的误差就会越大(Ward, 1977; Fischer, 2014)。将反演计算过程中的计算误差等因素归纳为系数矩阵的误差,并同时考虑存在观测误差,求解方程可以表示为

$$(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})(\mathbf{X} + \delta\mathbf{X}) = \mathbf{B} + \delta\mathbf{B} \quad (6)$$

通常当  $\|\mathbf{A}^{-1}\|_2 \|\delta\mathbf{A}\|_2 < 1$  时,误差的二范数估计形式为

$$\frac{\|\delta\mathbf{X}\|_2}{\|\mathbf{X}\|_2} \leq \frac{n_{\text{cond2}}(\mathbf{A})}{1 - n_{\text{cond2}}(\mathbf{A})} \left( \frac{\|\delta\mathbf{A}\|_2}{\|\mathbf{A}\|_2} + \frac{\|\delta\mathbf{B}\|_2}{\|\mathbf{B}\|_2} \right) \quad (7)$$

式中,  $n_{\text{cond2}}(\mathbf{A})$  为矩阵的二范数的条件数(以下简称为条件数,并均指矩阵二范数的条件数)。

但若假设条件不成立时,利用式(7)对误差范数的估计也就不再合适。因此,将带有误差的系数矩阵作为分析对象时,令

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \delta\mathbf{A} \quad (8)$$

所以,对式(7)的误差范数的估计可改写为

$$\frac{\|\delta\mathbf{X}\|_2}{\|\mathbf{X}\|_2} \leq \frac{n_{\text{cond2}}(\mathbf{C}) \cdot \|\mathbf{A}\|_2}{\|\mathbf{C}\|_2} \left( \frac{\|\delta\mathbf{A}\|_2}{\|\mathbf{A}\|_2} + \frac{\|\delta\mathbf{B}\|_2}{\|\mathbf{B}\|_2} \right) \quad (9)$$

观察式(7)、(9)可以发现,当  $\delta\mathbf{A} = 0$  时,两式相等。

由式(6)中  $\delta\mathbf{A}$  的构成可知,由于雷达探测能力的限制,雷达方位角、距离库等观测误差会引入到求解的矩阵方程中;另外,当风场模型不准确时,选取的待反演量不完整也会造成模型误差。所以,不考虑计算误差时,反演结果求解的难易程度和精度主要取决于选取的系数矩阵和雷达的探测能力两个方面。通过误差范数上界的估计可以发现,选取合适的系数矩阵( $\mathbf{C}$ )不仅可以提高求解的精度,而且可以降低求解难度。较大的矩阵条件数不仅使求解计算的难度增大,并且会将误差等因素的影响放大,使最终结果变差。由式(9)可知,当选取较少反演参量时,虽引入了模型误差,但在一定程度上对系数矩阵改善可以抵消模型误差造成的影响,即选取较少反演参数时,反演结果往往会比反演较多参数时的效果好。

### 2.3 系数矩阵的条件数

为比较选取不同的风场模型时系数矩阵条件数的差异,将式(1)中的待反演参量进行分组(表1)。

根据参量量级的大小来分组(Waldteufel, et al, 1979),通过逐渐增加待反演参量的个数,来构建含有不同参量的系数矩阵。

表1 待反演参量的分组

Table 1 Grouping of the fitted parameters

| 组   | 参数                   | 组   | 参数                          | 组   | 参数                          |
|-----|----------------------|-----|-----------------------------|-----|-----------------------------|
| 3P  | $u_0, v_0, w_0$      | 5P2 | $3P + (u_y, v_x)$           | 9P1 | $7P + (w_x, w_y)$           |
| 4P1 | $u_0, v_0, u_x, v_y$ | 6P1 | $3P + (u_x, v_y, w_z)$      | 9P2 | $7P + (u_z, v_z)$           |
| 4P2 | $u_0, v_0, u_y, v_x$ | 6P2 | $4P1 + (u_y, v_x)$          | 11P | $7P + (w_x, w_y, u_z, v_z)$ |
| 5P1 | $3P + (u_x, v_y)$    | 7P  | $3P + (u_x, v_y, u_y, v_x)$ | 12P | All                         |

由条件数本身的特点可知,条件数是对计算难易程度的一种衡量,也代表了解对误差或是不确定度的敏感性,条件数越大,代表求解的问题越病态。同理,在VVP的反演算法中,系数矩阵的条件数越大,说明反演结果越不稳定,误差会越大。

从条件数大小的分布变化(图1)可以看出:

(1) 反演参量个数的增多,会使系数矩阵的条

件数发生急剧变化。在反演变量个数较少时,各方位角处差别不明显。但随着参数个数的增多,条件数的大小以指数的形式增多。因此,选取较多的反演参量进行计算,虽可以获得较多的风场信息,但求解会变得更加困难。若选用条件数较大的系数矩阵进行计算,得到的结果误差势必会很大。

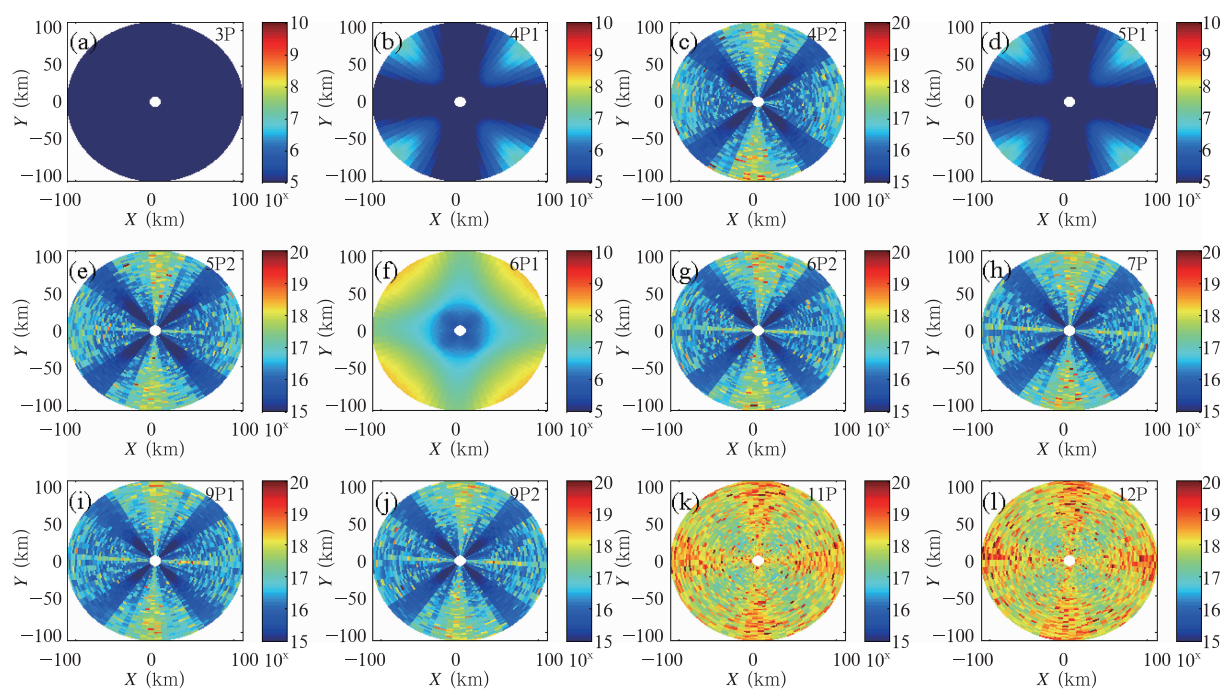


图1 不同反演参数对应的系数矩阵的条件数

(分析体积:  $10^\circ \times 20$  Gates; 仰角:  $2.5^\circ$ ; a—l 的系数矩阵分组见表1)

Fig. 1 Variations of coefficient matrix condition number with the different retrieved parameters.

The size of analysis volume is specified as the sector gap of  $10^\circ \times 20$  gates for each radial.

The elevation is  $2.5^\circ$ . The grouped retrieved parameters of (a) – (l) are shown in Table 1

(2) 当待反演参数不同时,系数矩阵条件数差别较大。通过观察 4P2、5P2、6P2 的条件数分布可以发现,含有  $u_y$ 、 $v_x$  的系数矩阵的条件数远大于 4P1、5P1、6P1 的条件数。同样通过观察 11P、12P 的条件数也可以发现,加入  $w_x$ 、 $w_y$  后的条件数比其他分组大出许多量级。由此也可说明,风场模型直接决定了反演计算的精度和求解的难易程度。

(3) 在不同方位角、距离雷达不同的位置,系数矩阵的条件数亦不相同。4P1、5P1、6P1 在方位角为  $45^\circ$ 、 $135^\circ$ 、 $225^\circ$ 、 $315^\circ$  附近的条件数大于其他位置,并且随着距离雷达中心越远,半径越大处条件数越大。而 4P2、5P2、6P2 在上述位置的条件数相对较小,但在方位角为  $0^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $180^\circ$ 、 $270^\circ$  附近的条件数相对较大。通过计算矩阵矢量的相关性发现(图略),上述位置处的相关系数大于其他方位角处。因此可以判断,矩阵矢量的线性相关,造成了系数矩阵病态。

#### 2.4 系数矩阵病态原因的分析

在已有研究成果(Boccippio, 1995; Waldteufel, et al, 1979)中曾指出,系数矩阵中基函数的线性相关可能是造成矩阵病态的原因,但线性相关的项及其函数关系仍未确定。由图 1 中系数矩阵条件数的变化可以发现,含有  $u_y$ 、 $v_x$  与  $w_x$ 、 $w_y$  的系数矩阵相比于其他参量组合,条件数会有较大的增加,因此需将这两组参数对应的矩阵矢量进行比较分析。

以  $u_y$ 、 $v_x$  的系数  $dyH_x$ 、 $dxH_y$  为例,与其他任意待反演参量  $H_m$  构成的系数矩阵为

$$H_m dyH_x = H_m \times y \times H_x - H_m \times y_0 \times H_x \quad (10)$$

$$H_m dxH_y = H_m \times x \times H_y - H_m \times x_0 \times H_y \quad (11)$$

由于式中  $H_m \times y \times H_x = H_m \times x \times H_y = H_m \times R \times H_x \times H_y$ ,不难发现,与其他矩阵矢量的线性函数关系式可表示为

$$A_{u_y} = A_{v_x} + x_0 \times A_{v_0} - y_0 \times A_{u_0} \quad (12)$$

$$A_{v_x} = A_{u_y} + y_0 \times A_{u_0} - x_0 \times A_{v_0} \quad (13)$$

因此可知,同时含有  $u_y$  与  $v_x$  的矩阵矢量,其系数矩阵是奇异的。当含有部分参量时,矩阵矢量的这种线性关系会使得系数矩阵奇异,由此可以解释和证明图 1c 中 4P2 组的条件数较大的原因。而在

利用计算机计算时,由于实际反演中观测误差和计算误差的影响,系数矩阵表现出的病态只是计算的结果。

同理可知,同时含有  $u_z$ 、 $w_x$  与  $v_z$ 、 $w_y$  对应的矩阵矢量时,系数矩阵同样是奇异的,证明过程不再赘述。

### 3 舍弃参量对反演结果的敏感性

在利用 VVP 方法反演求解过程中,当系数矩阵  $\mathbf{A}$  的条件数过大时,会造成求解困难,反演误差较大。为了简化求解步骤,降低求解难度,往往选取其中几个变量进行求解。Waldteufel 等(1979)通过对比各反演参量的量级大小,选取了在实际风场中量值较大的参量来构成系数矩阵。Boccippio (1995)通过敏感试验计算了舍去某些反演参量后的结果误差,指出分析体积的大小、位置和待反演量的线性相关性等多种因素都会对反演结果产生影响。为了便于观察舍弃参量对求解的影响,令风场模型参量及其对应的矩阵矢量为

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_L, \mathbf{x}_{LM}], \mathbf{P} = [\mathbf{P}_L, \mathbf{P}_{LM}] \quad (14)$$

式中,  $L$  为选取的反演参量个数,  $LM$  为  $M$  个未被选取的参量。由式(4)可知

$$\mathbf{P}_L \mathbf{X}_L + \mathbf{P}_{LM} \mathbf{x}_{LM} = \mathbf{V}_r \quad (15)$$

当舍弃部分反演参量后,反演结果的误差大小为

$$\delta \mathbf{X}_L = \underbrace{(\mathbf{P}_L^T \mathbf{P}_L)^{-1} \mathbf{P}_L^T}_{\gamma_1} \underbrace{\mathbf{P}_{LM}}_{\gamma_2} \underbrace{\mathbf{x}_{LM}}_{\gamma_3} \quad (16)$$

观察上式可以发现,由于求解计算中的系数矩阵为位置坐标的函数,因此当选取的反演参量不完全时,产生的误差大小取决于舍弃参量的大小  $\mathbf{x}_{LM}$  和其对应的系数矩阵  $\mathbf{P}_{LM}$ 。所以,选择舍弃量级较小的参量对反演效果的影响将会相对较小。

同理可知,被忽略的量  $x_{Lj}$  对  $X_i$  造成的误差  $\delta X_{i,Lj}$  可表示为

$$p_i \delta X_{i,Lj} = p_{Lj} \alpha_{Lj,i} x_{Lj} \quad (17)$$

式中,  $\alpha_{Lj,i}$  为舍弃后  $x_{Lj}$  在  $X_i$  上的分量比例,

$$\sum_{j=1}^M \delta X_{i,Lj} = \delta X_i, \sum_{i=1}^L \alpha_{Lj,i} = 1。$$

令,  $\delta X_{i,Lj} = \xi_{Lj} x_{Lj}$ , 则有

$$\xi_{Lj} = \frac{p_{Lj}}{p_i} \alpha_{Lj,i}, \text{ 即 } \xi_{Lj} = k_{i,Lj} \alpha_{Lj,i} \quad (18)$$

由式(18)可看出,理论上被舍弃的参量对其他待反演参量产生的误差,可以用其系数的比值  $k_{i,Lj}$  与舍弃参量在各待反演参量的分量比例  $\alpha_{Lj,i}$  直接来估算反演结果误差的变化。由于系数矩阵为分析体积内各点坐标位置的函数,各矩阵元的大小随位置的不同而改变。但在选定待反演参量的情况下,在固定位置上的系数矩阵仍是确定的。因此,进一步可容易判断,当系数  $\xi_{Lj}$  的绝对值越小时,舍弃参量对反演的影响越小,由此可知这种影响并不仅仅与舍弃参量的量级有关。

表2 模拟风场的各参量

Table 2 Parameter settings of the synthetic data

| 名称              | 参量值                                       |
|-----------------|-------------------------------------------|
| $u_0, v_0$      | 3.0 m/s, 2.0 m/s                          |
| $u_x, v_y$      | $-0.3 \text{ s}^{-1}, 0.3 \text{ s}^{-1}$ |
| $x_0, y_0, z_0$ | 0, 0, 0                                   |
| $w_0$           | 1.0 m/s                                   |

表3 分别舍弃  $v_y$  与  $u_x$  时在不同方位角处垂直速度的反演结果(仰角 =  $4^\circ$ , 半径为 50 个距离库)Table 3 Retrieval results at the different azimuth when  $u_x$  and  $v_y$  neglected (Elevation =  $4^\circ$ , R = 50 Gates)

|       |                 | $5^\circ$ | $15^\circ$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ | $75^\circ$ | $90^\circ$ |
|-------|-----------------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $v_y$ | $w(\text{m/s})$ | 2.19      | 2.47       | 1.61       | 1.01       | 0.80       | 0.72       | 0.70       |
|       | $\xi_w$         | -3.97     | -4.91      | -2.04      | -0.06      | 0.65       | 0.93       | 1.00       |
| $u_x$ | $w(\text{m/s})$ | 0.70      | 0.73       | 0.81       | 1.04       | 1.67       | 2.47       | 2.09       |
|       | $\xi_w$         | 0.99      | 0.92       | 0.62       | -0.14      | -2.25      | -4.91      | -3.65      |

#### 4 对垂直速度求解方程的分析和改进

由于真实的风场中大气垂直速度的量级小,对雷达径向风速的贡献也小,因而也增加了反演垂直速度的难度,风场反演中为了简化求解方程往往将其忽略(Gao, et al, 2004; Li, et al, 2007)。在垂直速度的风场反演方法中,基于动力学方程的变分反演方法,可以根据多个时次的观测资料求解出垂直速度,但变分方法所依赖大气动力学方程仍是真实风场的理想模型,并对背景场和代价函数中的权重系数较为敏感(Wei, et al, 1998; Gao, et al, 2006; Shapiro, et al, 2003, 2009; Huang, et al, 2010)。相比之下,基于空间几何方法的 VVP 算法具有统计学特征,能够利用空间多个格点上的风场信息,并且风场模型的参量不依赖权重系数,反演结果比较客观。

选用表 1 中的 5P1 模型来构建模拟风场,其中径向风场共 10 层,每层仰角间隔  $1^\circ$ ;方位角个数为 360 个,间隔  $1^\circ$ ;每条径向有 460 个距离库,库长为 250 m,分析体积大小为  $20^\circ \times 40^\circ$  个距离库  $\times$  两层仰角。模拟风场的参数设置如表 2 所示,其中将  $u_x$  与  $v_y$  设置为相等大小,同时垂直速度设定为固定值,依此来观察在不同位置处舍弃参量对反演效果的影响。

如表 3 所示,尽管模拟风场中  $u_x$  与  $v_y$  的值是相同的,但在反演中分别舍弃  $u_x$  或  $v_y$  时,首先可以发现反演结果在不同方位角处的不同,另外,对比两组结果还可以看到,在相同方位角处反演结果的误差也不相等。通过比较反演结果误差的大小可知,  $\xi_w$  的绝对值越小,则反演得到的垂直速度误差越小,如在方位角  $45^\circ$  时的  $\xi_w$  在舍弃  $v_y$  与  $u_x$  分别为  $-0.06$  和  $-0.14$ ,而垂直速度的反演结果误差  $45^\circ$  时也为最小,由此也验证了上述的分析结果。

在建立风场模型时为了更好地描述真实的风场,风场模型中需尽可能选择较多的参量。但由 2.4 节中对 VVP 系数矩阵病态原因的分析 and 论证可知,矩阵矢量之间的线性关系会造成矩阵奇异和求解困难,若舍弃部分相关的参量又会引入模型误差。由此可判断,为避免求解困难而选择舍弃部分参量的情况下,如能将反演结果再修正,即可得到准确的风场参量。

##### 4.1 对求解方程的分析

由实际风场的连续性特点,假定在一个小的分析体积内风场变化不太大,并考虑到风场模型要尽可能准确,同时尽量避免因系数矩阵矢量直接的线性关系而造成系数矩阵奇异,选择表 1 中 7P 的风场模型进行分析。由表 1 中 7P 模型的参量可知,该风场模型包括  $u_0, v_0, w_0$  三个量级较大的分量与  $u, v$  在水平方向上的变化项  $u_x, u_y, v_x, v_y$ ,并假设分析体

积内垂直风速在水平方向上保持不变。观察式(1)不难发现,当 $(x_0, y_0, z_0)$ 为坐标原点时,即将风场的“起点”设定在坐标原点, $(u_0, v_0, w_0)$ 则为雷达处的风场。因此,式(2)可写为

$$u_{\text{Radar}} \times H_x + u_x \times H_x + (u_y + v_x)R \times H_x \times H_y + v_{\text{Radar}} \times H_y + v_y \times H_y + w_{\text{Radar}} \times H_z = V_r \quad (19)$$

式中, $u_{\text{Radar}} = u_0 - u_x \times x_0 - u_y \times y_0$ ,  $v_{\text{Radar}} = v_0 - v_x \times x_0 - v_y \times y_0$ ,  $w_{\text{Radar}} = w_0$ ,  $R$ 为观测点到雷达的距离。

由式(19)可以看出, $u_y$ 与 $v_x$ 此时合并为一个参量,因而其系数矩阵不再奇异,这可以降低求解的难度。同时注意,通过式(19)得到的 $u_{\text{radar}}$ 与 $v_{\text{radar}}$ 为风场模型中雷达处的值,并不是分析体积处的风场分量。因此,仍将 $(x_0, y_0, z_0)$ 选择在分析体积的中心,由第3节对系数矩阵的分析可知,同时含有 $u_y$ 与 $v_x$ 的矩阵矢量会造成系数矩阵奇异,为此只选择 $u_y$ 与 $v_x$ 其中的一个,并观察反演结果的变化。待反演参量的分组见表4。

表4 7P模型中待反演参量的分组

Table 4 Grouping of the fitted parameters in the 7P model

| 组别   | 待反演参量                                |
|------|--------------------------------------|
| 6PM  | $u_0, v_0, w_0, u_x, v_y, u_y + v_x$ |
| 6PM1 | $u_0, v_0, w_0, u_x, v_y, u_y$       |
| 6PM2 | $u_0, v_0, w_0, u_x, v_x, v_x$       |

通过对比表4中6PM、6PM1和6PM2的条件数可以发现(图略),这3种风场模型的系数矩阵的条件数相比7P减小许多量级。为验证上述推断和求解方程的普适性,选择6PM1中的参量作为待反演量,并对求解方程进行分析。

由式(19)可知,当选择6PM1的参数时,式(2)

$$u_0 = \begin{cases} u^* \\ (u^* \times x_0 + v^* \times y_0 - v_0 \times y_0)/x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_0 = 0 \\ x_0 \neq 0, y_0 \neq 0 \end{cases} \quad (25)$$

$$v_0 = \begin{cases} v^* \\ (u^* \times x_0 + v^* \times y_0 - u_0 \times x_0)/y_0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 \neq 0, y_0 \neq 0 \end{cases} \quad (26)$$

通过以上分析可知,由于系数矩阵中矩阵矢量存在线性相关,因而在选择风场模型时不能将VVP方法中的参量全部包含。但若风场模型对实际风场描述得不准确,这样又会引入模型误差。对于7P的风场模型而言,可以比较准确地描绘风场结构,符合实际的风场特征。但选择7P模型时系数矩阵却

可变为

$$u^* \times H_x + u_x^* dx \times H_x + u_y^* dy \times H_x + v^* \times H_y + v_y^* dy \times H_y + w^* \times H_z = V_r \quad (20)$$

式中,上标\*为带有误差的近似值。将式(20)进一步整理,得

$$u^{**} \times H_x + u_x^* \times x \times H_x + u_y^* \times R \times H_x \times H_y + v^{**} \times H_y + v_y^* \times y \times H_y + w^* \times H_z = V_r \quad (21)$$

式中, $u^{**} = u^* - u_x^* \times x_0 - u_y^* \times y_0$ ,  $v^{**} = v^* - v_y^* \times y_0$ 。

观察式(20)、(21)的系数项不难发现,两式解的形式相同,即

$$\begin{cases} u^* - u_x^* \times x_0 - u_y^* y_0 = u_0 - u_x \times x_0 - u_y \times y_0 \\ v^* - v_y^* \times y_0 = v_0 - v_x \times x_0 - v_y \times y_0 \\ w^* = w_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} u_y^* = u_y + v_x \\ u_x^* = u_x \\ v_y^* = v_y \end{cases} \quad (22)$$

整理可得

$$\begin{cases} u_0 = u^* - v_x \times y_0 \\ v_0 = v^* + v_x \times x_0 \\ w^* = w_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} u_y^* = u_y + v_x \\ u_x^* = u_x \\ v_y^* = v_y \end{cases} \quad (23)$$

同理可知,选择6PM2时(推导过程不再赘述),则得到的反演结果为

$$\begin{cases} u_0 = u^* + u_x \times y_0 \\ v_0 = v^* - u_y \times x_0 \\ w^* = w_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} u_y^* = u_y + v_x \\ u_x^* = u_x \\ v_y^* = v_y \end{cases} \quad (24)$$

由式(23)、(24)即可得

是奇异的,并且由于观测误差和计算误差的影响,使得在实际反演中看到的系数矩阵是病态的,因而反演结果的误差很大。倘若采用其他数学方法,如用奇异值分解(SVD)来求解(Bocippio, 1995),计算的结果仍是通过对病态矩阵在数学上的近似处理后得到的,这种数学的近似处理方法仅避开对病态

矩阵直接求解,但待求方程中的参量因为矩阵奇异仍不能全部解出,并且还会引入计算误差。对 SVD 处理方法进一步分析可知,系数矩阵分解后可表示为

$$A = U \Sigma V^T \quad (27)$$

式中,  $U^T U = I$ ,  $V^T V = I$ ,  $\Sigma = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ ,  $\delta_i$  为奇异值。并且,  $\Sigma$  可写为

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_0 & 0 \\ 0 & \Sigma_n \end{bmatrix} \quad (28)$$

式中,  $\Sigma_n$  为数值很小的奇异值。

在计算中为了避免病态矩阵造成求解不稳定的问题,近似处理的方法是将  $\Sigma_n$  舍去。观察舍弃相对较小奇异值后的式(27)不难发现,舍弃奇异值只是对病态矩阵的近似处理,但对于本身就奇异的系数矩阵而言并没有实质性改变,因为被舍弃的奇异值对应的是奇异矩阵中为 0 的矩阵矢量。因而,这种处理方式的结果与舍弃  $u_y$  或  $v_x$  构建的系数矩阵等效,但后一种处理可以使用更准确的风场模型,并且避免引入新的计算误差。

由式(23)、(24)可知,由于缺少其他条件,  $u_0$  与  $v_0$  不能直接反演得到,但可以通过观测值或其他约束条件由式(25)或(26)解出  $u_0$  或  $v_0$ ,从而进一步解出其他参量。另外,通过以上分析可以发现,虽然求解方程中舍弃了  $u_y$  或  $v_x$ ,但风场模型仍为 7P

的模型,对求解方程的调整使反演结果中  $w_0$ 、 $u_x$  与  $v_y$  并不受影响,所以改进后的求解方程避免了系数矩阵奇异的问题,因而反演结果的精度得到提高,上述 3 个参量也可以得到较准确的值。

## 4.2 模拟风场的检验

构建的模拟线性风场为:雷达探测的径向风场,共 10 层,每层仰角间隔  $1^\circ$ ;方位角个数为 360 个,间隔  $1^\circ$ ;每条径向有 460 个距离库,库长 250 m;选取的分析体积大小为  $10^\circ \times 20^\circ$  个距离库  $\times$  两层仰角。7P 的模拟风场中各参量的值如表 5。

表 5 模拟风场的各参量

Table 5 Parameter settings of the synthetic data

| 名称              | 参量值                                       |
|-----------------|-------------------------------------------|
| $u_0, v_0$      | 3.0 m/s, 2.0 m/s                          |
| $u_x, v_y$      | $-0.1 \text{ s}^{-1}, 0.1 \text{ s}^{-1}$ |
| $u_y, v_x$      | $-0.2 \text{ s}^{-1}, 0.1 \text{ s}^{-1}$ |
| $x_0, y_0, z_0$ | 0, 0, 0                                   |
| $w_0$           | 3.0 m/s                                   |

由图 2 中计算结果可以发现,当选择 6PM 中的参量时,反演得到的  $u$ 、 $v$ 、 $w$  为雷达位置处的值,这与式(22)的分析结论一致。当选择 6PM1 或 6PM2 中的参量时,反演得到的  $u$  和  $v$  带有偏差,但垂直速度  $w$  及  $u_x$ 、 $v_y$  (图略)的结果与模拟数据相等,由此说明调整后的求解方程得到的这 3 个参量没有受到风场模型的影响,验证了式(23)和(24)的分析结论。

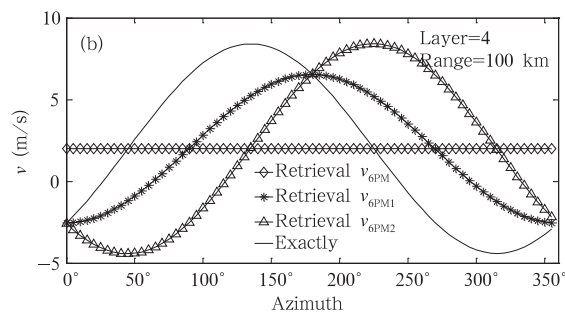
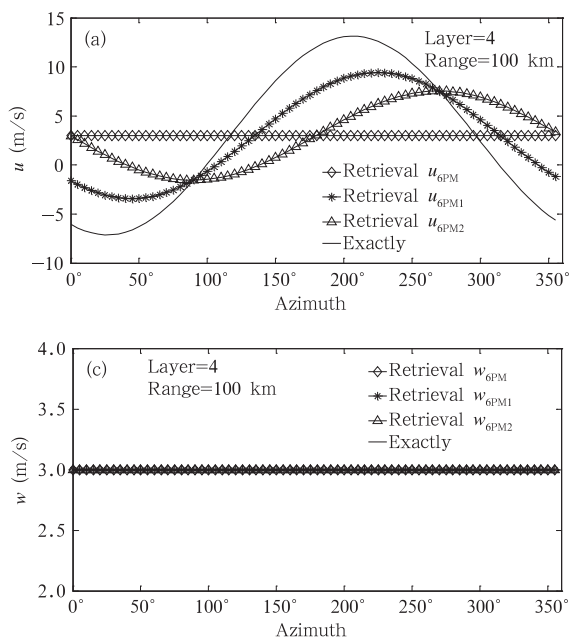


图 2 分别选择 6PM、6PM1 和 6PM2 中的参量时  $u$ 、 $v$  和  $w$  的反演结果

(a.  $u$  分量, b.  $v$  分量, c.  $w$  分量;  
6PM、6PM1 和 6PM2 的参数见表 1)

Fig. 2 Retrieval results of  $u$ ,  $v$  and  $w$  when selecting the different parameters included in 6PM, 6PM1 and 6PM2

(a.  $u$  component, b.  $v$  component, c.  $w$  component; fitted parameter has shown in Table 1)

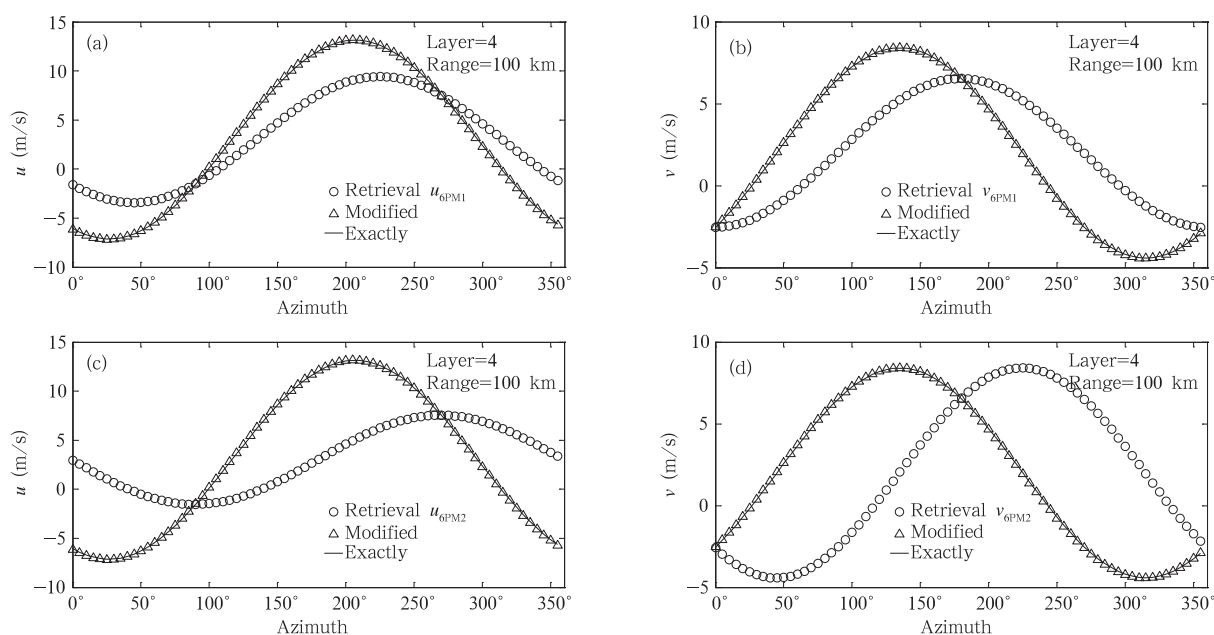


图3 对选择 6PM1(a,b)和 6PM2(c,d)参数时  $u$ (a,c)和  $v$ (b,d)分量反演结果的修正  
(6PM1,6PM2 参数见表 1)

Fig.3 Modification for  $u$  (a, c) and  $v$  (b, d) components' retrieval results when selecting the parameters of 6PM1 (a,b) and 6PM2 (c,d) (Fitted parameter has shown in Table 1)

当在求解方程中舍弃  $u_y$  或  $v_x$  参量时,由式(25)和(26)可知,反演得到的分析体积处的  $u^*$  与  $v^*$  是带有误差的,为此根据模拟风场的参量和式(23)、(24)的分析结果,分别对这两种求解方程的计算结果进行修正。如图3所示,修正后的结果与真值完全符合,由此也验证了4.1节中的分析和结论。

## 5 总 结

基于线性风场假设的 VVP 算法虽包含较多的风场信息,但其所含的待反演参量多,在实际反演中系数矩阵的病态问题会造成求解的困难,造成反演结果的误差较大,甚至不能直接求解。本研究从数学上分析和论证了造成系数矩阵病态的原因,改进并验证了针对垂直速度的求解方程,主要结论有:

(1)当选择较多的反演参量时,风场模型对实际风场的数学描述更准确,但构建的系数矩阵的条件数却呈指数增大,系数矩阵会愈加病态,以至于不可直接求解。另外,对于相等个数的反演参量,选择的模型不同,系数矩阵的条件数也会有较大差别。对误差范数上界的分析表明,为避免求解的困难,选取较少的反演参量时尽管会存在模型误差,但选择合适的系数矩阵能够降低求解难度和计算中的误

差,反演效果好于较多参量时。

(2)VVP 算法中系数矩阵矢量的线性相关造成了矩阵奇异,由于观测误差和计算误差的影响,在实际反演计算中系数矩阵则表现为病态。对比 SVD 分解处理的方法发现,舍弃的奇异值只是对病态矩阵的近似,而被舍弃的奇异值对应的是奇异矩阵中为 0 的矩阵矢量,原系数矩阵并没有实质性改变,并且还会引入新的计算误差。

(3)在 VVP 算法误差分析的基础上,分析并验证了舍弃部分参量时的反演误差。证明了合并或舍弃线性相关项时,其余待反演参量会受模型误差的影响,并且这种模型误差的大小并不仅与待反演参量的量级有关,而是会随着位置的不同而改变。对调整后求解方程的验证结果表明,如垂直速度等部分待参量仍然可以保持准确值。

本研究对单多普勒雷达的 VVP 反演算法进行了分析,改进并检验了垂直速度的求解方程,为准确反演垂直速度提供了理论基础。在实际风场反演中的应用,如对流单体、中尺度气旋和 0608“桑美”台风的风场分析结果,将在本论文的第二部分“单多普勒雷达反演降水粒子垂直速度 II:实例分析”中给出。

## 参考文献

- 方德贤, 刘国庆, 董新宁等. 2007. 单多普勒雷达二维风场反演-ExtendedVPP方法. 气象学报, 65(2): 231-240
- 韩丰, 魏鸣, 李南等. 2013. 反射率因子和径向速度共同约束的单多普勒雷达风场. 遥感学报, 17(3): 584-589
- 姜海燕, 葛润生. 1997. 一种新的单多普勒雷达反演技术. 应用气象学报, 8(2): 219-223
- 郎需兴, 魏鸣, 葛文忠等. 2001. 一种新的单多普勒雷达风场反演方法. 气象科学, 21(4): 417-424
- 罗昌荣, 孙照渤, 魏鸣等. 2011. 单多普勒雷达反演热带气旋近中心风场的 VAP 扩展应用方法. 气象学报, 69(1): 170-180
- 陶祖钰. 1992. 从单 Doppler 速度场反演风矢量场的 VAP 方法. 气象学报, 50(1): 81-90
- 王明筠, 赵坤, 吴丹. 2010. T-TREC 方法反演登陆中国台风风场结构. 气象学报, 68(1): 114-124
- 王鹏飞, 黄荣辉, 李建平. 2011. 数值积分过程中截断误差和舍入误差的分离方法及其效果检验. 大气科学, 35(3): 403-410
- 魏鸣. 1998. 单多普勒天气雷达资料的变分同化三维风场反演和 VVP 三维风场反演[D]. 南京: 南京大学, 97-105
- Armijo L. 1969. A theory for the determination of wind and precipitation velocities with Doppler radars. J Atmos Sci, 26(3): 570-573
- Boccippio D J. 1995. A diagnostic analysis of the VVP single-Doppler retrieval technique. J Atmos Ocean Tech, 12(2): 230-248
- Caya A, Laroche S, Zawadzki I, et al. 2002. Using single-Doppler data to obtain a mesoscale environmental field. J Atmos Ocean Tech, 19(1): 21-36
- Easterbrook C C. 1975. Estimating horizontal wind fields by two-dimensional curve fitting of single Doppler radar measurements// Preprints, 16th Conf. on Radar Meteorology. Houston: Amer Meteor Soc, 214-219
- Fischer T M. 2014. On the stability of some algorithms for computing the action of the matrix exponential. Linear Algebra and its Applications, 443: 1-20
- Gao J D, Xue M, Shapiro A, et al. 1999. A variational method for the analysis of three-dimensional wind fields from two Doppler radars. Mon Wea Rev, 127(9): 2128-2142
- Gao J D, Droegemeier K K, Gong J, et al. 2004. A method for retrieving mean horizontal wind profiles from single-Doppler radar observations contaminated by aliasing. Mon Wea Rev, 132(6): 1399-1409
- Gao J, Xue M, Lee S, et al. 2006. A three-dimensional variational single-Doppler velocity retrieval method with simple conservation equation constraint. Meteor Atmos Phys, 94(1-4): 11-26
- Holleman I. 2005. Quality control and verification of weather radar wind profiles. J Atmos Ocean Tech, 22(10): 1541-1550
- Huang S X, Cao X Q, Du H D, et al. 2010. Theoretical analyses and numerical experiments for two-dimensional wind retrievals from single-Doppler data. J Hydrol, Ser B, 22(2): 185-195
- Leon D, Vali G. 1998. Retrieval of three-dimensional particle velocity from airborne Doppler radar data. J Atmos Oceanic Tech, 15(4): 860-870
- Lhermitte R M, Atlas D. 1961. Precipitation motion by pulse Doppler radar // Preprints, 9th Conf. on Radar Meteorology. Kansas City: Amer Meteor Soc, 218-223
- Li N, Wei M, Tang X W, et al. 2007. An improved velocity volume processing method. Adv Atmos Sci, 24(5): 893-906
- Liang X D. 2007. An integrating velocity-azimuth process single-Doppler radar wind retrieval method. J Atmos Oceanic Tech, 24(4): 658-665
- Liu S, Qiu C H, Xu Q, et al. 2005. An improved method for Doppler wind and thermodynamic retrievals. Adv Atmos Sci, 22(1): 90-102
- Matejka T, Srivastava R C. 1991. An improved version of the extended velocity-azimuth display analysis of single-Doppler radar data. J Atmos Oceanic Tech, 8(4): 453-466
- Matejka T. 1993. Current Extended Vertical Velocity Azimuth Display (CEVAD) analysis of single-Doppler radar data // Preprints, 26th Int Conf. on Radar Meteorology. Norman OK: Amer Meteor Soc, 463-465
- Miller L J, Strauch R G. 1974. A dual Doppler radar method for the determination of wind velocities within precipitating weather systems. Remote Sens Environ, 3(4): 219-235
- Protat A, Zawadzki I. 1999. A variational method for real-time retrieval of three-dimensional wind field from multiple-Doppler bistatic radar network data. J Atmos Oceanic Tech, 16(4): 432-449
- Qiu C J, Xu Q. 1992. A simple adjoint method of wind analysis for single-Doppler data. J Atmos Oceanic Tech, 9(5): 588-598
- Rihan F A, Collier C G, Roulstone I. 2005. Four-dimensional variational data assimilation for Doppler radar wind data. J Comput Appl Math, 176(1): 15-34
- Shapiro A, Ellis S, Shaw J. 1995. Single-Doppler velocity retrievals with phoenix II data: Clear air and microburst wind retrievals in the planetary boundary layer. J Atmos Sci, 52(9): 1265-1287
- Shapiro A, Robinson P, Wurman J, et al. 2003. Single-Doppler velocity retrieval with rapid-scan radar data. J Atmos Oceanic Tech, 20(12): 1758-1775
- Shapiro A, Potvin C K, Gao J. 2009. Use of a vertical vorticity equation in variational dual-Doppler wind analysis. J Atmos Oceanic Tech, 26(10): 2089-2106
- Srivastava R C, Matejka T J, Lorello T J. 1986. Doppler radar study of the trailing anvil region associated with a squall line. J Aerosol Sci, 43(4): 356-377
- Sun J, Crook N A. 1997. Dynamical and microphysical retrieval from Doppler radar observations using a cloud model and its adjoint. Part I: Model development and simulated data experi-

- ments. *J Atmos Sci*, 54(12): 1642-1661
- Sun J. 1998. Dynamical and microphysical retrieval from Doppler radar observations using a cloud model and its adjoint. Part II: Retrieval experiments of an observed Florida convective storm. *J Atmos Sci*, 55(5): 835-852
- Tuttle J, Gall R. 1999. A single-radar technique for estimating the winds in tropical cyclones. *Bull Amer Meteor Soc*, 80(4): 653-668
- Waldteufel P, Corbin H. 1979. On the analysis of single-Doppler radar data. *J Appl Meteor*, 18(4): 532-542
- Ward R C. 1977. Numerical computation of the matrix exponential with accuracy estimate. *SIAM J Numer Anal*, 14(4): 600-610
- Wei M, Dang R Q, Ge W Z, et al. 1998. Retrieval single-Doppler radar wind with variational assimilation method-part I: Objective selection of functional weighting factors. *Adv Atmos Sci*, 15(4): 553-568
- Weygandt S S, Shapiro A, Droegemeier K K. 2002. Retrieval of model initial fields from single-Doppler observations of a supercell thunderstorm. Part I: Single-Doppler velocity retrieval. *Mon Wea Rev*, 130(3): 433-453
- Xin L, Reuter G W. 1998. VVP technique applied to an Alberta storm. *J Atmos Ocean Tech*, 15(2): 587-592