

大气数值预报模式中高度地形追随坐标的设计研究:理论分析与理想试验^{*1}

李 超^{1,2,3} 陈德辉³ 李兴良³
LI Chao^{1,2,3} CHEN Dehui³ LI Xingliang³

1. 中国气象科学研究院,北京,100081

2. 中国科学院大学,北京,100049

3. 中国气象局数值预报中心,北京,100081

1. Chinese Academy of Meteorological Sciences, Beijing 100081, China

2. University of Chinese Academy of Science, Beijing 100049, China

3. Center of Numerical Weather Prediction, China Meteorological Administration, Beijing 100081, China

2011-04-19 收稿,2012-03-07 改回.

Li Chao, Chen Dehui, Li Xingliang. 2012. A design of height-based terrain-following coordinates in the atmospheric numerical model: Theoretical analysis and idealized tests. *Acta Meteorologica Sinica*, 70(6): 1247-1259

Abstract Several kinds of typical height-based terrain-following coordinates, such as the Gal-Chen&Somerville coordinate (hereafter “Gal, C, S” coordinate), the smoothed level vertical coordinate (hereafter SLEVE coordinate) and a new coordinate called as the cosine-smoothed coordinate (hereafter “COS” coordinate), were theoretically analyzed and intercompared with each other via the induced errors by calculations of the PGF (Pressure Gradient Force) and the 2D-ADV (2-dimensional mass advection) tests. The results of calculation of the PGF showed that the errors of the calculation of the PGF induced by using a terrain following coordinates, were significantly decreased by using SLEVE1, SLEVE2 and COS coordinates in comparison to the Gal, C, S coordinate. SLEVE2 and COS coordinates were relatively better in reduction of the errors of the PGF calculation. The decaying coefficient “*b*” and its Jacobian derivative played a deterministic role in reduction of the errors. The similar remarks could be made for the tests of the 2D-ADV calculation. The errors of the 2D-ADV calculation by using the COS coordinate were the smallest as compared with those of the reference test in which there were no terrain. The COS coordinate was most advantageous among all the four coordinates in tests.

Key words Atmospheric numerical model, Height-based terrain-following coordinate, Pressure gradient error, Two-dimensional mass advection-diffusion

摘 要 采用一种统一的地形追随坐标的形式,对 Gal-Chen & Somerville(简称 Gal, C, S 坐标)、平缓坐标(smoothed level vertical coordinate,简称 SLEVE 坐标)等几种典型的高度地形追随坐标进行了气压梯度力计算误差影响和二维质量平流试验的理论分析,并与一种新提出的高度地形追随坐标——三角函数平缓坐标(简称 COS 坐标)进行比较。气压梯度力计算误差分析结果显示,与 Gal, C, S 坐标相比,单尺度平缓坐标(简称 SLEVE1 坐标)、双尺度平缓坐标(简称 SLEVE2 坐标)和 COS 坐标在减小气压梯度力计算误差上有不同程度的改进,SLEVE2 坐标和 COS 坐标比其他两种坐标更具优势,衰减系数 *b* 和坐标转换的雅可比项对减小误差起决定性作用。二维质量平流试验也有类似的结果,与无地形的参考试验结果相比,COS 坐标的

^{*} 资助课题:GRAPES 动力框架关键技术研究(2012BAC22B01)、无缝隙强对流天气临近短时预报关键技术和预报系统(2013CB430106)、GRAPES 中尺度模式改进与升级(201006016)、国家自然科学基金项目(41105068,40805045)。
作者简介:李超,从事数值天气预报研究。E-mail: cici86lc@126.com
通讯作者:陈德辉,主要从事数值天气预报研究。E-mail: chendh@cma.gov.cn

质量输送计算误差最小,且经优化的 COS 坐标的质量输送计算误差几乎和参考计算误差完全重合,在 4 种坐标中最优。

关键词 大气数值预报模式, 高度地形追随坐标, 气压梯度力计算误差, 二维质量平流扩散

中图法分类号 P435.1

1 引言

随着计算机性能的提高,高分辨率的非静力数值预报模式得到了迅速发展。例如,中国气象局的新一代全球区域同化预报多尺度统一模式 GRAPES、美国中尺度模式 WRF、德国 LM 模式等。在非静力模式的设计中,选取适当的垂直坐标描述非静力特性非常重要;同时,模式水平分辨率提高使得可分辨的地形尺度减小、地形坡度增大,选取的垂直坐标既要能描述地形影响,又要能够减小地形作用带来的计算误差显得很关键。

自数值天气预报系统产生以来,垂直坐标的发展经历了由“非归一化”坐标向“归一化”坐标的转变,这种转变主要是为了应对下边界处理中遇到的困难以及适应非静力模式的发展需求。“非归一化”垂直坐标主要有几何高度坐标(Richardson, 1965)、气压坐标(Eliassen, 1949)以及适用于锋面研究的位温坐标。但是,这 3 种坐标在地形起伏的地区很难给出准确的下边界条件。“归一化”垂直坐标主要有气压地形追随坐标和高度地形追随坐标。Philips(1957)首先提出了 σ 坐标系(即气压地形追随坐标),这种对气压归一化的坐标便于计算机在整个计算域内进行运算,地形层上的垂直风经坐标转换后消失,简化了下边界条件,同时可变化间距的计算层为模式动力与各种边界层的相关参数化方案的耦合提供了便利。Kasahara(1974)将 σ 坐标的特点引伸到几何高度坐标和位温坐标中,使用通用的坐标形式给出了静力大气下水平运动方程、静力平衡方程、质量守恒方程和热力学方程等一般表达式。为了描述大气的非静力特征, Gal-Chen 等(1975)提出了高度地形追随坐标。Schar 等(2002)提出了平缓坐标(SLEVE, smooth level vertical coordinate),考虑不同尺度地形的影响,在高层使坐标面更加平缓。李兴良等(2005)也分析比较了非静力模式中的气压地形追随坐标和高度地形追随坐标,发现高度地形追随坐标具备一定的预报优势。

尽管垂直坐标发展为“归一化”坐标解决了复杂

的下边界问题,但也带来了新的问题。气压梯度力的计算由一项变成了两个大项的小差,容易产生计算误差,尤其在地形复杂陡峭处这种误差更加明显,因而很大程度上影响数值预报的结果。为了解决这个问题,主要是从以下几个方向研究的:第一是不改变垂直坐标形式对气压梯度力项的计算方案进行改进,例如:回插等压面法、递推算法(杨晓娟等, 2003)、扣除法(钱永甫等, 1994;周天军等, 1995)、特殊差分格式法、差微差算法(钱永甫等, 1991)、气压回插法(Hu, et al, 2007)。第二是特别处理地形,典型例子就是 η 阶梯坐标(Mesinger, 1984)的提出, η 坐标将模式地形处理为“台阶地形”,简化了下边界条件。第三是为改变坐标面随高度的衰减状况提出新的地形追随坐标,将垂直坐标的选择转变为衰减系数的选择(Schar, et al, 2002)。第三种方法的优点是通过对衰减系数的调节,使垂直坐标在底层受到地形作用的影响,而在高层坐标面趋于平直,更接近大气的真实状况,这也是本文研究的出发点。

Gal-Chen & Somerville (Gal, C. S) 坐标、单尺度平缓坐标(SLEVE1)、双尺度平缓坐标(SLEVE2)以及三角函数平缓坐标(COS)都是比较典型的高度地形追随坐标,其性质因衰减系数而不同。本研究对这几种坐标进行了分析,比较了在有地形和无地形情况下不同坐标对气压梯度力计算误差以及质量平流输送的影响,为模式垂直坐标的选择提供参考。以下如无特别说明,所提到的坐标均为高度地形追随坐标。

2 高度地形追随坐标理论分析

Gal-Chen 等(1975)指出,地形追随坐标的设计必须满足两个条件:(1)坐标转换前后两者的计算域必须一致,即:在 $z = Z_s$ 处, $\hat{z} = 0$; 在 $z = Z_T$ 处, $\hat{z} = Z_T$; (2)坐标转换必须是单调可逆的,即坐标转换的 J_b^{-1} 项必须满足 $J_b^{-1} = \frac{\partial \hat{z}}{\partial z} > 0$ 。

J_b^{-1} 是坐标转换过程中的重要参数,在下面的理论分析中将重点讨论这个参数。

2.1 几种高度地形追随坐标

任何一种高度地形追随坐标可以写成统一形式

$$z = \hat{z} + bZ_s \quad (1)$$

式中, $\hat{z}$ 为高度地形追随坐标的高度(即模式层高度), z 为自然几何高度, Z_s 为模式地形高度。由式(1)可以看出, b 即是高度地形追随坐标的衰减系数。下面给出几种典型坐标的 b 的表达式。

(1) Gal. C. S 坐标的定义式为 $\hat{z} = Z_T \frac{z - Z_s(x, y)}{Z_T - Z_s(x, y)}$, 将其对应式(1)转化为 $z = \hat{z} + (1 - \frac{\hat{z}}{Z_T})Z_s$, 可以看出衰减系数为

$$b = 1 - \frac{\hat{z}}{Z_T} \quad (2)$$

式中, Z_T 为模式层顶高度。

由式(2)可知, 衰减系数 b 随模式高度的衰减率

$$\frac{\partial b}{\partial \hat{z}} \text{ 为常数 } -\frac{1}{Z_T}.$$

(2) SLEVE 平缓坐标将地形分离为多种尺度, 对不同尺度的地形选择不同的衰减系数。SLEVE1 坐标地形未划分尺度, 其衰减系数为

$$b_{h^*} = \frac{\sinh[(Z_T - \hat{z})/h^*]}{\sinh[Z_T/h^*]} \quad (3)$$

式中, h^* 为模式地形高度的特征尺度, 模式坐标面均以这一特征尺度的地形高度进行衰减。这里的 h^* 相当于 Schar 等(2002)中的 s 。

(3) SLEVE 双尺度平缓坐标。事实上, 模式地形高度的差异很大, 高可达数千米(如珠穆朗玛峰), 低则只有几十米(如丘陵), 几乎可以用连续尺度谱 Z_{S_i} ($i = 1, 2, 3, \dots, L$) 来表示, 对于不同的模式地形高度“尺度谱段”, 式(3)中的 h^* 也应选择不同的地形高度特征尺度 h_i^* , 式(3)可以改写为更一般的形式

$$b_{h_i^*} = \frac{\sinh[(Z_T - \hat{z})/h_i^*]}{\sinh[Z_T/h_i^*]} \quad (4)$$

其对应的坐标转换关系式(1)则改写为

$$z = \hat{z} + \sum_{i=1}^L b_{h_i^*} Z_{S_i}(x, y) \quad (5)$$

该坐标称为 SLEVE 多尺度平缓坐标。若取 $L = 2$, 这时的坐标称为 SLEVE 双尺度平缓坐标(SLEVE2 坐标), 该坐标将地形划分为大尺度地形 $Z_{h_1^*}$ 和小尺度地形 $Z_{h_2^*}$, 其对应的衰减系数分别为

$$\begin{cases} b_{h_1^*} = \frac{\sinh[(Z_T - \hat{z})/h_1^*]}{\sinh[Z_T/h_1^*]} \\ b_{h_2^*} = \frac{\sinh[(Z_T - \hat{z})/h_2^*]}{\sinh[Z_T/h_2^*]} \end{cases} \quad (6)$$

(4) COS 坐标。SLEVE 坐标是以“双曲函数”为衰减函数基的高度地形追随坐标, 这里选择“三角函数”为衰减函数基构造高度地形追随坐标(Kl-emp, 2011), 即

$$b_A = bA(\hat{z}) \quad (7)$$

$$\text{式中, } b = 1 - \frac{\hat{z}}{Z_T}, A(\hat{z}) = \begin{cases} \left[\cos\left(\frac{\pi \hat{z}}{2Z_c}\right) \right]^n & \hat{z} \leq Z_c \\ 0 & \hat{z} > Z_c \end{cases},$$

Z_c 是临界衰减高度, n 是正整数。

衰减系数 b 将随模式层高度 $\hat{z}$ 升高而减小, 其使坐标面随 $\hat{z}$ 增大由曲面向平面衰减。当 $b = 0$ 时, 模式面变成了水平面, 取不同的 b 有不同的衰减影响。这样对垂直坐标的改进和选择问题就转化成了对衰减系数的改进和选择问题。在统一的坐标形式下, 只对衰减系数 b 进行改变, 程序实现更加方便简洁。衰减系数 b 成为坐标转换过程中的重要参数, 下面分析中将着重讨论这个参数。图 1 是衰减系数 b 各不相同的 4 种坐标的坐标面分布情况。

2.2 几种坐标的性质分析

可以较容易证明在 4 种坐标中 $z = Z_s$ 处, $\hat{z} = 0$, 在 $z = Z_T$ 处, $\hat{z} = Z_T$, Gal. C. S 和 SLEVE1 坐标满足坐标转换的单调性条件为 $J_b^{-1} > 0$, 对于 SLEVE2 和 COS 坐标还需要一些约束条件才能满足 $J_b^{-1} > 0$ 。

SLEVE2 坐标的坐标转换项为

$$J_b^{-1} = \frac{\partial \hat{z}}{\partial z} = 1 - \frac{Z_{h_1^*}(x, y)}{h_1^*} \frac{\cosh[(Z_T - \hat{z})]}{\sinh[Z_T/h_1^*]} - \frac{Z_{h_2^*}(x, y)}{h_2^*} \frac{\cosh[(Z_T - \hat{z})]}{\sinh[Z_T/h_2^*]} \quad (8)$$

这是由分离出的两种尺度的地形高度 $Z_{h_1^*}$ 和 $Z_{h_2^*}$ 及它们对应的衰减高度 h_1^* 和 h_2^* 共同约束的。不等式 $J_b^{-1} \geq 1 - \frac{Z_{h_1^*, \max}}{Z_T} \frac{Z_T}{h_1^*} \coth\left(\frac{Z_T}{h_1^*}\right) - \frac{Z_{h_2^*, \max}}{Z_T} \frac{Z_T}{h_2^*} \cdot \coth\left(\frac{Z_T}{h_2^*}\right) \geq 0$ 是上式成立的必要但不充分条件, 其中, $Z_{h_1^*, \max}$ 和 $Z_{h_2^*, \max}$ 分别为大尺度地形和小尺度地形的最大高度。可见只需要找到 $\frac{Z_T}{h_1^*}$ 和 $\frac{Z_T}{h_2^*}$ 的合理组合即可满足 $J_b^{-1} > 0$ 。实践上, h_1^* 一般取值为 10 km 左右, 然后再基于此给出使小尺度地形迅速衰减的 h_2^* 的值。

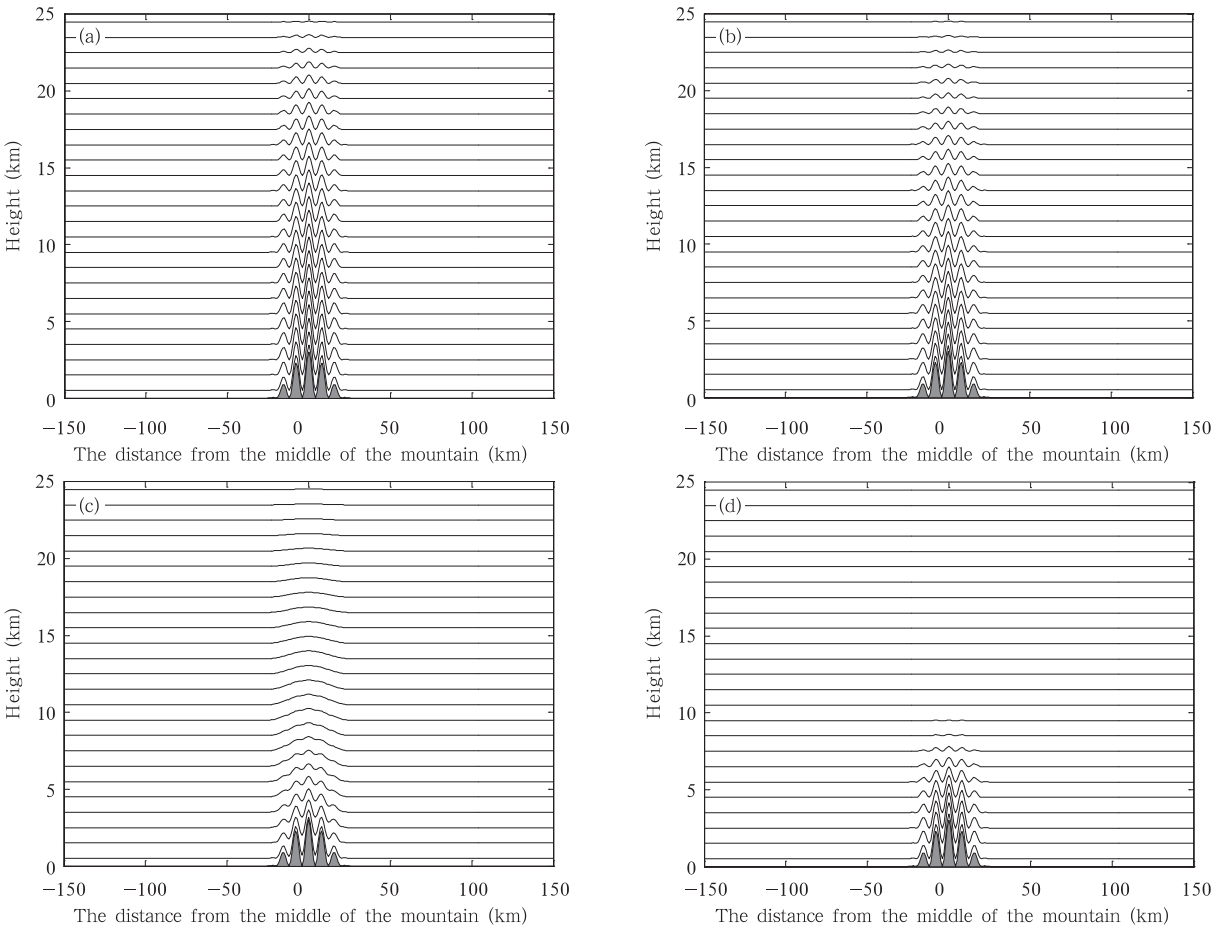


图1 (a)Gal. C. S、(b)SLEVE1、(c)SLEVE2 和(d)COS 坐标($Z_c = 15\text{ km}$, $n = 6$)的坐标面分布

Fig.1 Vertical cross section showing the four coordinates surfaces of the Gal. C. S (a), SLEVE1 (b), SLEVE2 (c), and COS coordinate ($Z_c = 15\text{ km}$, $n = 6$) (d)

COS 坐标的转换项为

$$J_b^{-1} = \begin{cases} 1 - \frac{Z_s}{Z_T} \left[\cos\left(\frac{\pi \hat{z}}{2Z_c}\right) \right]^n - n \frac{\pi}{2} \frac{Z_s}{Z_c} \left(1 - \frac{\hat{z}}{Z_T}\right) \left[\cos\left(\frac{\pi \hat{z}}{2Z_c}\right) \right]^{n-1} \sin\left(\frac{\pi \hat{z}}{2Z_c}\right) & \hat{z} \leq Z_c \\ 1 & \hat{z} > Z_c \end{cases} \quad (9)$$

由式(9)可知, J_b^{-1} 受到 Z_s 、 Z_c 、 n 的共同约束。例如,模式层顶高度 Z_T 为 25 km,临界衰减高度 Z_c 为 10 km 时, n 若为 1,则 J_b^{-1} 在临界衰减高度处不连续, n 取值要大于 1。如图 2 所示, $n \leq 12$ 时, $J_b^{-1} > 0$; $n \geq 13$ (虚线为 $n = 13$)时, $J_b^{-1} < 0$,则 n 取值不可大于 12。倘若模式层顶高度、地形高度、临界衰减高度等发生变化,满足 $J_b^{-1} > 0$ 的 n 的最大值也会发生变化。下面二维质量平流试验中 n 取值 6 时,设置临界衰减高度分别为 10 和 15 km 均可满足 $J_b^{-1} > 0$,其对应的最大地形高度分别约为 4.1 和 6.1 km。

2.3 不同坐标地形高度衰减率的比较

由式(1)可知,不同坐标的差别在于对地形作用

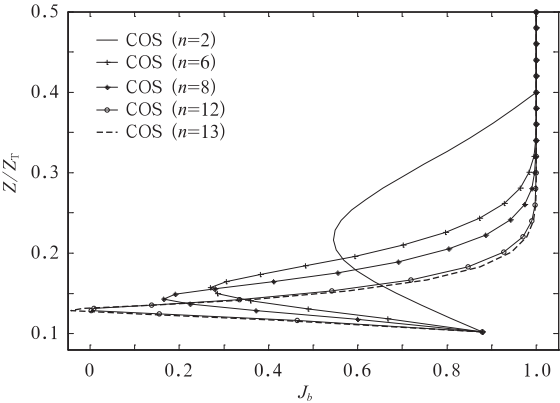


图2 $n = 2, 6, 8, 12, 13$ 时的 COS 坐标的 J_b 分布
Fig.2 J_b for the COS coordinates with the different values of $n = 2, 6, 8, 12$ and 13

的衰减效果的不同,即 bZ_s 的差别。下面选择地形坡度最大的点比较 4 种坐标的地形高度衰减率 $\partial[bZ_s(x,y)]/\partial z$ 。首先从地形高度衰减率的角度对 SLEVE2 坐标进行理论分析,其次比较 COS 坐标中 n 取不同值时地形高度衰减率的分布,最后选择合适的 n 值比较 4 种坐标的地形高度衰减率。

地形函数满足

$$Z_s = \cos^2\left(\frac{\pi x}{\lambda_s}\right) Z^* \tag{10}$$

式中, $Z^*(x) = \begin{cases} Z_{s_TOP} \cos^2\left(\frac{\pi x}{2a}\right) & |x| \leq 25 \text{ km} \\ 0 & |x| > 25 \text{ km} \end{cases}$, $Z_{s_TOP} = 3 \text{ km}$, $a = 2.5 \text{ km}$, $\lambda_s = 8 \text{ km}$, 最大地形坡度约为 1.4698。

SLEVE2 坐标选取的大尺度和小尺度地形分

别为

$$\begin{cases} Z_{h_1^*} = \frac{1}{2} Z^* \\ Z_{h_2^*} = Z_s(x) - Z_{h_1^*} = \left[\cos^2\left(\frac{\pi x}{\lambda_s}\right) - 0.5 \right] Z^* \end{cases} \tag{11}$$

图 3a 为从 SLEVE2 坐标中分离出的大、小尺度地形分布。根据实践和坐标转换的单调性要求分别取大尺度和小尺度地形的衰减高度 h_1^* 和 h_2^* 为 15 和 2.5 km, 对应式(4)中的衰减系数, 这样大尺度地形和小尺度地形的衰减状况将有所不同。图 3b 为实际地形、大尺度和小尺度地形的地形高度衰减率分布。可以看出, 在 15 km 以下小尺度地形的衰减远快于大尺度地形, 在低层, 实际地形衰减主要体现在小尺度地形的衰减上。

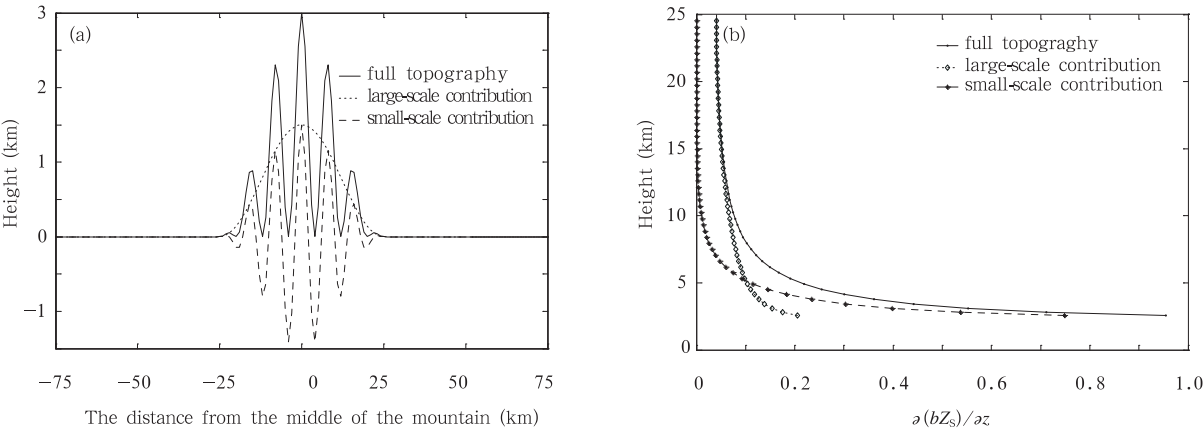


图 3 (a)SLEVE2 坐标中实际地形和大、小尺度地形的划分及

(b)实际地形和大、小尺度地形的高度衰减率 $\partial(\sum_{i=1}^2 b_{h_i^*} Z_{h_i^*})/\partial z$ 和 $\partial(b_{h_1^*} Z_{h_1^*})/\partial z$ 、 $\partial(b_{h_2^*} Z_{h_2^*})/\partial z$ 的分布

Fig. 3 (a)Topography and its larger-and smaller scale contributions,

(b) Vertical derivatives of the decay function $\sum_{i=1}^2 b_{h_i^*} Z_{h_i^*}$, $b_{h_1^*} Z_{h_1^*}$,

and $b_{h_2^*} Z_{h_2^*}$ for the topography and its larger-and smaller scale contributions

COS 坐标中涉及到参数 n 的选择,从 COS 坐标中参数 n 分别取 2、6、8、12 时, $\partial(bZ_s)/\partial z$ 的比较(图 4)可以看出, COS 坐标在临界衰减高度以下将按地形作用进行衰减,且 n 取不同值时最大衰减率出现的高度不同, n 越大这个高度越低,地形衰减相对就越快。

下面分析 Gal. C. S、SLEVE1、SLEVE2 和 COS 坐标($Z_c = 10 \text{ km}$, $n = 6$)的地形高度衰减率。图 5a

为 4 种坐标下各层坐标面的坡度分布。Gal. C. S 坐标各层坐标面坡度线性递减; SLEVE2 坐标的坐标面坡度比 Gal. C. S 坐标和 SLEVE1 坐标减小得快, 15 km 时 SLEVE2 坐标的坐标面坡度已经减小到很小; COS 坐标在大约 4 km 以上坐标面坡度小于 SLEVE2 坐标, 4 km 以下则大于 SLEVE2 坐标。图 5b 为 4 种坐标下地形高度衰减率 $\partial(bZ_s)/\partial z$ 的分布。Gal. C. S 坐标地形高度衰减率为常值; 在

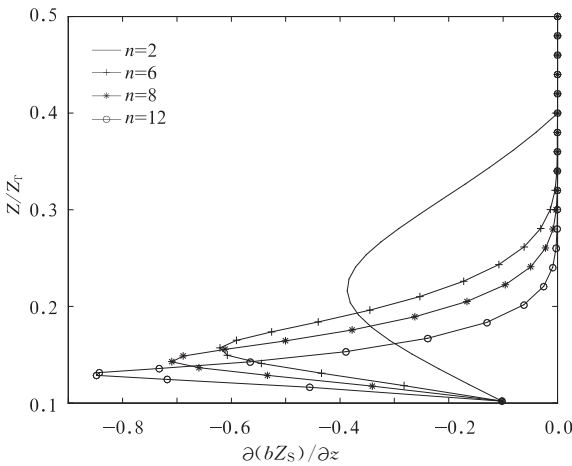
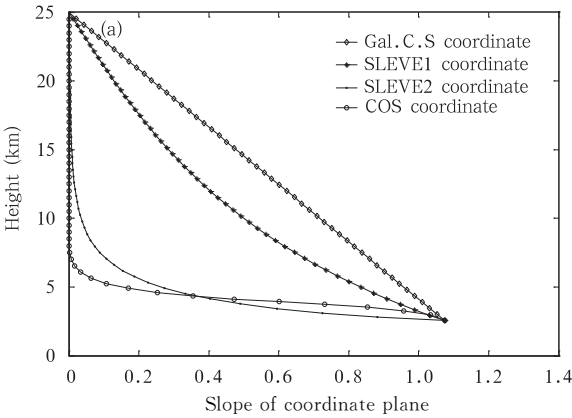


图 4 $n = 2, 6, 8, 12$ 时 COS 坐标 $\partial(bZ_s)/\partial z$ 的分布
Fig. 4 Vertical derivatives of the decay function $\partial(bZ_s)/\partial z$ for the COS coordinates with the different values of $n = 2, 6, 8$, and 12



同一高度上 SLEVE2 坐标和 COS 坐标的地形高度衰减率比其他两种坐标都要大,对地形作用的衰减相对快一些;COS 坐标在大约 4 km 出现地形高度衰减率的最大值,在这一高度以上比 SLEVE2 坐标衰减快,但这一高度以下则相对较慢。可见,地形高度衰减率的分布与各层坐标面的坡度有很好的对应关系,地形高度衰减率直接影响坐标面的平滑程度。

从理论分析的结果可以看出, SLEVE2 坐标将地形区分尺度考虑,把尺度较小的地形迅速衰减掉。与地形滤波相比,在保持地形最大高度不变的前提下,降低了可识别的地形坡度的量级,比只考虑单一尺度地形的 SLEVE1 坐标有优势。COS 坐标给出了连续的衰减系数,在高层随高度增加对地形的衰减比 SLEVE2 坐标更快。

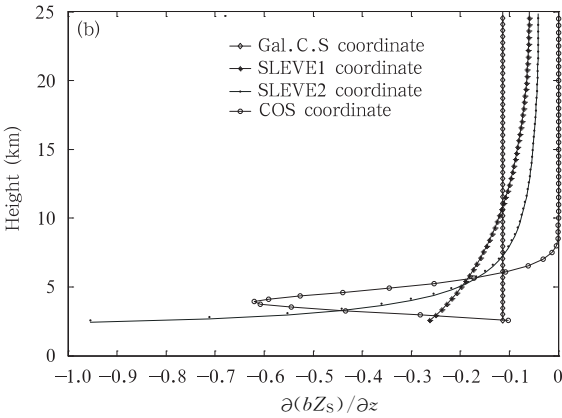


图 5 Gal. C. S、SLEVE1、SLEVE2、COS 坐标的 (a) 各层坐标面坡度及
(b) 地形高度衰减率 $\partial(bZ_s)/\partial z$

Fig. 5 (a) Slope of the coordinate planes for the Gal. C. S coordinates, the SLEVE1 coordinates, the SLEVE2 coordinates and COS coordinates, and (b) Vertical derivatives of the decay function bZ_s for the Gal. C. S coordinates, the SLEVE1 coordinates, the SLEVE2 coordinates and the COS coordinates

3 不同坐标气压梯度力计算误差分析

“归一化”坐标带来的主要问题是气压梯度力的计算误差变大,特别是在地形起伏较大的地区。下面比较 4 种坐标下气压梯度力的计算对地形坡度的敏感性。

试验比较在有地形的静止大气中,4 种坐标气压梯度力的计算误差的差异。基于理论分析的结果,COS 坐标中参数设置为 $Z_c = 10 \text{ km}$, $n = 6$,地形分布满足式(10),参考大气取为

$$\begin{cases} \bar{\Pi} = \exp\left(-\frac{gz}{c_p T_0}\right) \\ \bar{\theta} = T_0 \exp\left(\frac{gz}{c_p T_0}\right) \end{cases} \quad (12)$$

式中, $\bar{\Pi}$ 和 $\bar{\theta}$ 为 z 的函数。可以证明,在参考大气下气压梯度力为

$$-c_p \theta \nabla_z \Pi = -c_p \theta \nabla_z \Pi + c_p \theta J_b \frac{\partial \Pi}{\partial z} b \nabla_z (Z_s(x, y)) \quad (13)$$

式(13)的离散采用气压梯度力计算的经典法,即对温度计算格点的值,其余各项采用中央差分(钱永甫

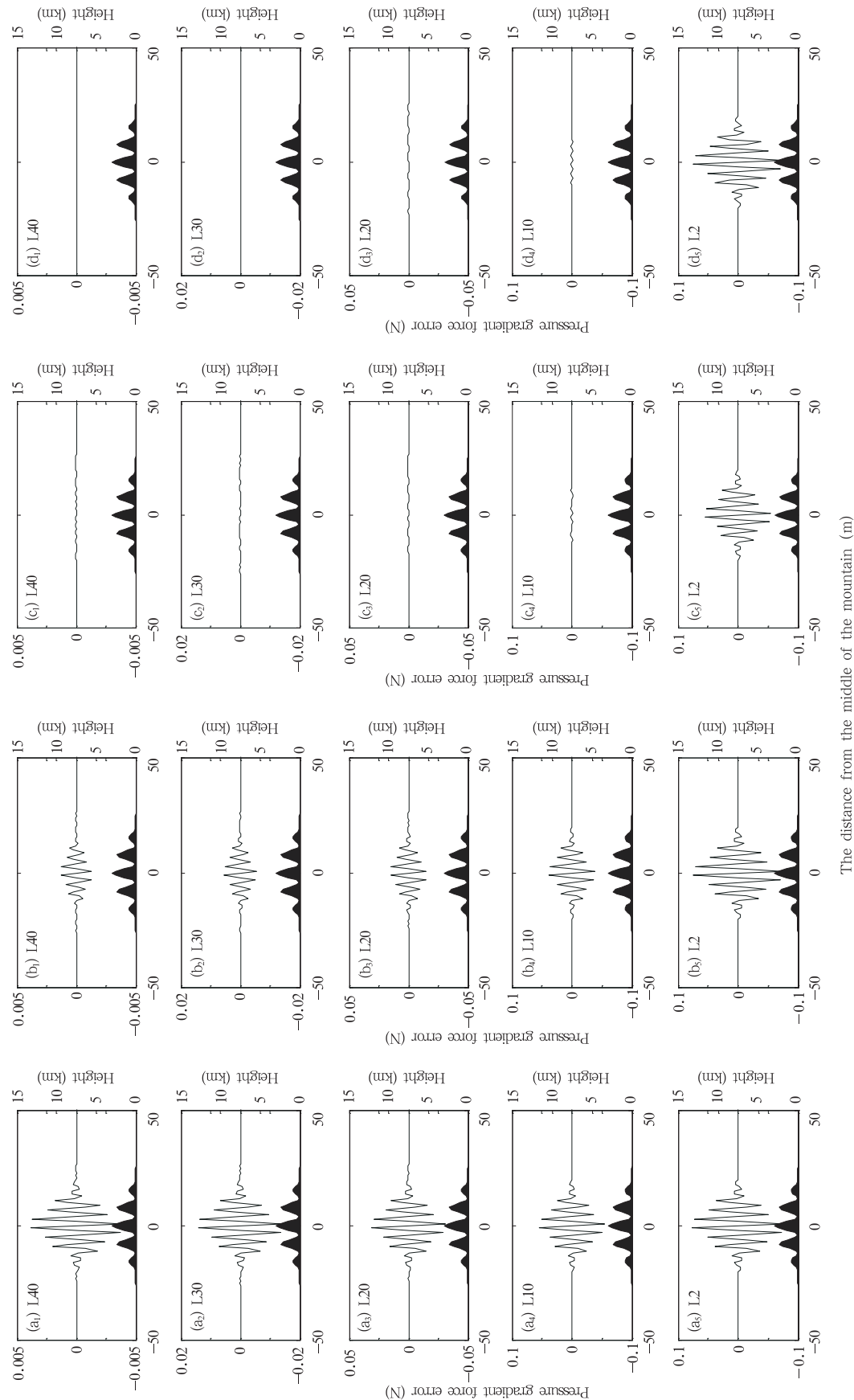


图6 (a₁ - a₅) Gal.C.S. (b₁ - b₅) SLEVE1、(c₁ - c₅) SLEVE2、(d₁ - d₅) COS 坐标 (Z_c=10 km, n=6) 在第2 (a₅, b₅, c₅, d₅)、10 (a₄, b₄, c₄, d₄)、20 (a₃, b₃, c₃, d₃)、30 (a₂, b₂, c₂, d₂)、40 (a₁, b₁, c₁, d₁) 模式层 (即0.5、4.5、9.5、14.5、19.5 km) 上气压梯度力的计算误差

Fig.6 Pressure gradient force errors for Gal.C.S (a₁ - a₅) , SLEVE1 (b₁ - b₅) , SLEVE2 (c₁ - c₅) and COS (d₁ - d₅) coordinates (Z_c=10 km, n=6) at 2nd (a₅ - a₅) , 10th (a₄ - a₄) , 20th (a₃ - a₃) , 30th (a₂ - a₂) and 40th (a₁ - a₁) coordinate planes (that are 0.5, 4.5, 9.5, 14.5 and 19.5 km, respectively)

等,1995)。试验模式层顶高度为 25 km,垂直均匀分 50 层,第 1 层为地表面;水平方向分辨率为 1 km。从第 2、10、20、30、40 模式层(即 0.5、4.5、9.5、14.5、19.5 km)上气压梯度力计算误差(图 6)可以看出,在相同的地形和计算差分格式下,同一坐标在不同模式层上引起的气压梯度力误差不同,不同坐标在相同的模式层上引起的气压梯度力误差不同。在纵向上,4 种坐标的气压梯度力误差均随高度减小,这与图 5a 坐标面坡度的变化相符;4 种坐标气压梯度力计算误差的减小速度是不一样的,SLEVE2 和 COS 坐标比 Gal. C. S 和 SLEVE1 坐标减小快得多。在横向上,第 2 层(0.5 km)SLEVE2 比其余 3 种坐标的误差小,第 10 层(4.5 km)以上 SLEVE2 和 COS 坐标比其他 2 种坐标误差小很多;在第 20 层以上的某一高度上 COS 坐标的误差减小为 0。

与图 6 气压梯度力误差直观图相比,下面将其误差量化,选择气压梯度力误差最大的点,依据相对误差计算公式

$$\epsilon = \frac{E_{Gal} - E_{SLEVE1/SLEVE2/COS}}{E_{Gal}} \times 100\% \quad (14)$$

式中, E_{Gal} 是 Gal. C. S 坐标的误差, $E_{SLEVE1/SLEVE2/COS}$ 是 SLEVE1、SLEVE2 或 COS 坐标的误差。比较该点处的第 2、10、20、30、40 模式层上 SLEVE1、SLEVE2、COS 坐标相对于 Gal. C. S 坐标的误差减小量。如表 1 所示,在 4.5 km (10 层) 以上, SLEVE2、COS 相对 Gal. C. S 坐标误差减小率迅速增大到 75% 以上,远大于 SLEVE1 坐标的 31%;在 0.5 km (2 层) 处与 Gal. C. S 相比,COS、SLEVE1 坐标误差减小的效果不明显,仅为 2% 和 4%,但 14.5 km (30 层) 以上, COS 坐标气压梯度力误

表 1 SLEVE1、SLEVE2、COS 坐标在第 2、10、20、30、40 模式层(0.5、4.5、9.5、14.5、19.5 km)上气压梯度力误差相对减小量(%)
Table 1 The relative errors of PGF calculations with SLEVE1, SLEVE2 and COS coordinates in comparison to that with G. C. S coordinate at 2nd, 10th, 20th, 30th and 40th vertical levels (0.5, 4.5, 9.5, 14.5, 19.5 km)(%)

层次	SLEVE1	SLEVE2	COS
40	67	99	100
30	62	99	100
20	51	99	99
10	31	95	75
2	4	30	2

差减小率为 100%, SLEVE2 坐标也达到了 99%。

比较 SLEVE2 和 COS 坐标在第 20 层(9.5 km)以下的气压梯度力误差分布(图 7)可知, COS 坐标在各个层上气压梯度力误差的分布和地形坡度有很好的对应,地形坡度大(小)之处气压梯度力计算误差也大(小),但 SLEVE2 坐标中却不存在这种对应关系,这是因为 SLEVE2 坐标对不同尺度谱段的地形高度的衰减不同。在实践中可以根据需要对有可能产生大的气压梯度力计算误差的地形影响进行快速衰减。在第 10 层(4.5 km)以下, COS 比 SLEVE2 坐标的误差要大一些,而在第 10 层以上比 SLEVE2 坐标小。

综上所述, SLEVE2、COS 坐标($Z_c = 10\text{ km}$, $n = 6$)与 Gal. C. S、SLEVE1 坐标相比,可以更好地减小坐标面上的气压梯度力计算误差。SLEVE2 坐标可以解决地形精细化引发的问题, COS 坐标可以在一定限度内让地形影响迅速衰减,两种坐标各具优势。

4 不同坐标下的二维质量平流试验

由上述理论分析可知,大气数值预报模式中不同坐标对地形作用的衰减性质不同。二维质量平流试验可较好地检验大气数值预报模式中采用上述不同高度地形追随坐标时地形对物质输送的影响。该试验采用密度通量方程,坐标转换后其通用表达式为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{J_b^{-1}} \left[\frac{\partial (J_b^{-1} u \rho)}{\partial x} + \frac{\partial (J_b^{-1} \hat{w} \rho)}{\partial \hat{z}} \right] = 0 \quad (15)$$

为了计算水平风速 u, v , 需要在方程中引入流函数来估算速度场, 设流函数为 $\varphi(z) = - \int_0^z u(z) dz$, 由

$(u, w) = \left(- \frac{\partial \varphi(z)}{\partial \hat{z}} \Big|_z, 0 \right)$ 坐标转换后, 气团的平流速度改写为 $(u, \hat{w}) = J_b \left(- \frac{\partial \varphi(z)}{\partial \hat{z}}, \frac{\partial \varphi(z)}{\partial x} \right)_z$, 整理后密度通量方程转化为

$$\frac{\partial (J_b^{-1} \rho)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(- \frac{\partial \varphi(z)}{\partial \hat{z}} \rho \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \left(\frac{\partial \varphi(z)}{\partial x} \rho \right) = 0 \quad (16)$$

引入流函数后, 该式可以较好地描述坐标面上的无辐散运动, 可以看到 J_b^{-1} 在通量项中消失, 这样避免了计算。

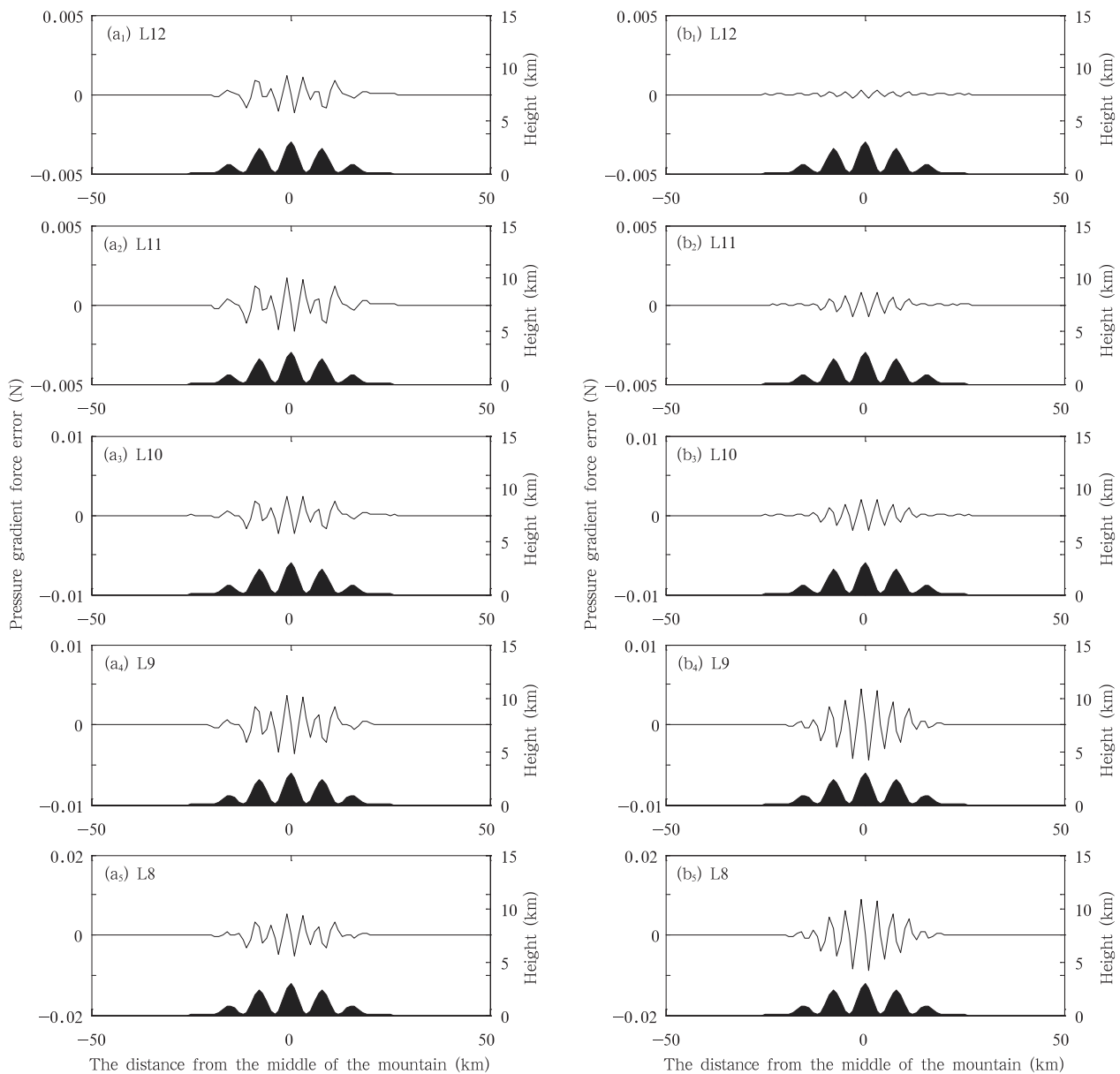


图 7 SLEVE2(a₁—a₅)与 COS(b₁—b₅)坐标(Z_c = 10 km,n = 6)在第 8、9、10、11、12 模式层上(即 3.5、4.4、5.5、5.5 km)气压梯度力计算误差

Fig.7 Pressure gradient force errors for SLEVE2 (a₁—a₅) and COS (b₁—b₅) coordinates at 8th, 9th, 10th, 11th and 12th coordinate planes (that are 3.5, 4.4, 5.5, 5.5 km, respectively)

4.1 平流试验设计和数值计算方案

试验设计如图 8 所示,有一气团初始时刻(t = 0 s)密度 ρ 分布满足

$$\rho(x,z)=\begin{cases} \rho_0 \cos^2(\frac{\pi r}{2}) & r \leq 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases} \quad (17)$$

式中,r = $\sqrt{(\frac{x-x_0}{R_x})^2 + (\frac{z-z_0}{R_z})^2}$, 密度 ρ₀ = 1, 气团半

径宽 R_x = 25 km, 高 R_z = 3 km, 气团位于(x₀, z₀) = (−50 km, 9 km)。无误差的情况下:平流运动 5000 s 后,气团位于山头之上,即(x₂, z₂) = (0 km, 9 km);平流运动 10000 s 后,气团位于山头的另一侧,与初始时刻的气团位置相对称,即(x₃, z₃) = (50 km, 9 km)。图 8 为平流试验的密度解析值分布,给定气团的平流速度为

$$u(z) = \begin{cases} u_0 & z_2 \leq z \\ \sin^2\left(\frac{\pi(z-z_1)}{2(z_2-z_1)}\right) & z_1 \leq z < z_2 \\ 0 & z \leq z_1 \end{cases} \quad (18)$$

式中, $u_0 = 10 \text{ m/s}$, $z_1 = 4 \text{ km}$, $z_2 = 5 \text{ km}$ 。

质量通量方程的差分计算采用 Arakawa-c 网格(Arakawa, et al, 1977)和有限体积的一阶迎风方案。令式(16)中 $q = J_b^{-1}\rho$, $F = -\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z}\rho$, $G = \frac{\partial \varphi(z)}{\partial x}\rho$, 对通量项采取分维算法

$$q^* = q^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+\frac{1}{2},k} - F_{i-\frac{1}{2},k})$$
$$q^{n+1} = q^* + \frac{\Delta t}{\Delta z} (G_{i,k+\frac{1}{2}}^* - G_{i,k-\frac{1}{2}}^*) \quad (19)$$

式(19)中通量计算公式为

$$F_{i-\frac{1}{2},k} = u^- q_{i,k}^n + u^+ q_{i-1,k}^n$$
$$G_{i,k-\frac{1}{2}}^* = w^- q_{i,k}^n + w^+ q_{i,k-1}^n \quad (20)$$

式中, $w^+ = \text{Max}(\hat{w}, 0)$, $w^- = \text{Min}(\hat{w}, 0)$, $u^+ = \text{Max}(u, 0)$, $u^- = \text{Min}(u, 0)$ 。

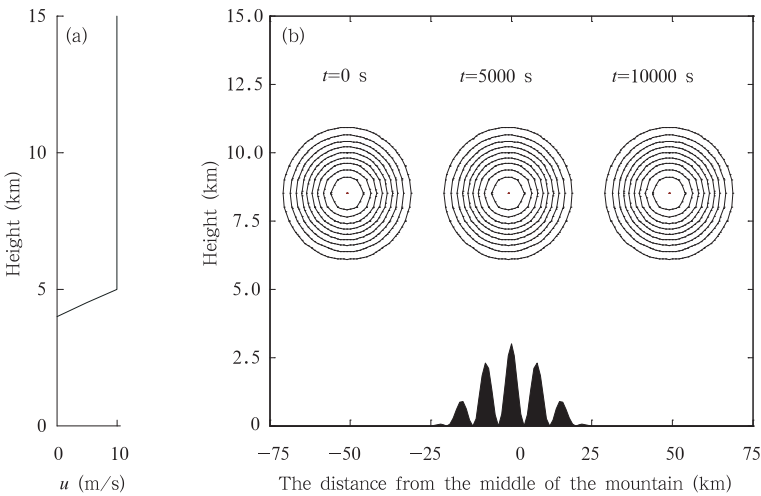


图 8 二维质量平流试验剖面
(a. 速度 u 的垂直分布, b. 气团经扰动平流运动后在 3 个时刻的密度解析值)
Fig. 8 Vertical cross section for the idealized two-dimensional mass advection test(a) the vertical distribution of velocity u , and (b) the analytical solution of the density as advected for the three instances

4.2 二维质量平流试验结果分析

由上述分析可知,在有地形情况下,不同坐标的坐标面起伏程度(亦称坡度)不同(图 1),因而对质量输送的影响也不相同,可以通过比较输送过程中某时刻的密度场及其变化状况来说明不同坐标对质量输送的影响。根据 Williamson 等(1992)提出的计算全球积分误差的方法,本研究定义衡量误差公式为

$$l_2 = \frac{\left\{ \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n [(\rho_{i,k})_{\text{num}} - (\rho_{i,k})_{\text{ana}}]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}{\left\{ \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n [(\rho_{i,k})_{\text{ana}}]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (21)$$

$$l_\infty = \frac{\text{Max}|(\rho_{i,k})_{\text{num}} - (\rho_{i,k})_{\text{ana}}|}{\text{Max}|(\rho_{i,k})_{\text{ana}}|} \quad (22)$$

式中, $(\rho_{i,k})_{\text{num}}$ 为数值计算结果, $(\rho_{i,k})_{\text{ana}}$ 为解析值, i 、 k 为水平和垂直方向的格点下标。

下面分别比较在有地形和无地形情况下, $t = 0$ 、5000、10000 s 时 4 种坐标的密度分布, $t = 10000 \text{ s}$ 时的质量平流误差分布,以及积分各个时刻质量平流标准化误差演变。

图 9 是一阶迎风方案下的 4 种坐标质量平流试验结果,其中图 9a₆、b₆ 是无地形数值模拟结果,可作为该数值计算方案的参考解。图 9a₁—a₆ 为不同坐标下对应于图 8 的 3 个时刻的密度场模拟结果。与图 8 的解析值比较可以看出,一阶迎风方案下无地形时质量气团随时间积分出现了水平拉伸,这主要是数值计算方案的耗散性决定的。COS 坐标($Z_c = 10 \text{ km}$)与无地形结果最接近,这是在临界衰

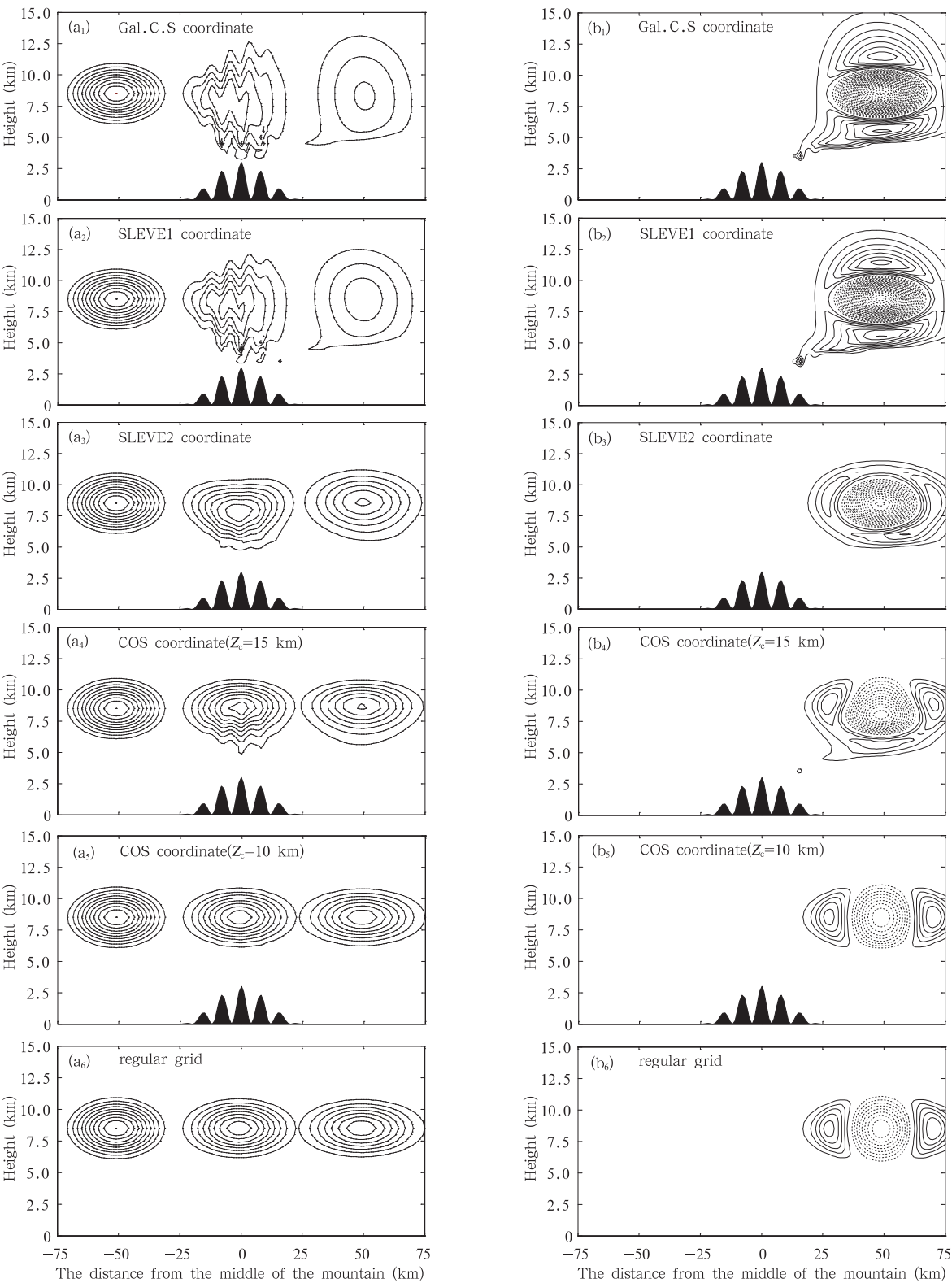


图9 一阶迎风方案的质量平流试验结果(a₁—a₆/b₁—b₆. Gal. C. S, SLEVE1, SLEVE2, COS(Z_c = 15 km)、COS(Z_c = 10 km)坐标、无地形均匀分层3个时刻的气团密度分布(等值线间隔为0.1)/t = 10000 s时的密度误差(数值结果—解析值,等值线间隔为0.025);气团初始密度量阶为1)

Fig. 9 Numerical solutions of the density to the advection test using the first-order upwind scheme. (a₁—a₆/b₁—b₆. The advected mass at the three consecutive times (0 s, 5000 s, 10000 s)/the error field at 10000 s (the numerical minus the analytical) for the Gal. C. S coordinates, the SLEVE1 coordinates, the SLEVE2 coordinates, the COS coordinates (Z_c = 15 km), the COS coordinates (Z_c = 10 km) The initial amplitude of the anomaly is 1; the contour interval in the left-hand panels is 0.1, and that in the right-hand panels is 0.025

减高度 $Z_c = 10\text{ km}$ 以下该坐标对地形平滑的结果; SLEVE2 与 COS 坐标($Z_c = 15\text{ km}$)在 $t = 5000\text{ s}$ 时气团形变相对于 Gal. C. S 与 SLEVE1 坐标都较小, 只在气团的下部有一些地形影响特征; Gal. C. S 与 SLEVE1 坐标在经过地形上方时气团形变较严重, 并带有明显的地形影响特征, $t = 10000\text{ s}$ 时气团形状与无地形时相差甚远。图 9b₁—b₆ 为 $t = 10000\text{ s}$ 的质量平流误差(即该时刻密度数值解与解析解之差)分布。4 种坐标与无地形时在该时刻有不同的质量平流误差, 且误差从 Gal. C. S、SLEVE1、SLEVE2 到 COS 坐标逐渐减小; 无地形情况下绝对误差最大值为 0.22, Gal. C. S、SLEVE1、SLEVE2 坐标绝对误差最大值分别为 0.65、0.61、0.38, 而 COS 坐标($Z_c = 10, 15\text{ km}$)与无地形最接近, 误差最大值为 0.32; 特别是 COS($Z_c = 15\text{ km}$)在较高层比 SLEVE2 坐标绝对误差小。

图 10 是 4 种坐标和无地形情况下标准化误差的时间演变。图 10a 为 l_2 误差演变, 可以看出, 4 种坐标下平流输送的 l_2 标准化误差均随时间增大, 在 2000—7000 s 误差迅速增大, 这是因为 2000—7000 s 气团恰好通过地形上方, 可以看出, 地形对平流误差的影响较大; 而 7000 s 以后误差变化不大。相比较而言, SLEVE2 和 COS 坐标的误差是 4 种坐标中较小的, 且 COS 坐标 $Z_c = 10\text{ km}$ 比 $Z_c = 15\text{ km}$ 时误差小, $Z_c = 10\text{ km}$ 时误差最接近无地形情况。图 10b 为误差演变 l_∞ 情况, 其误差分布与图 10a 大致类似, 它反映了最大误差(极值)随时间的演变。特别是 COS 坐标 $Z_c = 10\text{ km}$ 时误差与无地形时基本重合。不论是 l_2 还是 l_∞ , 10000 s 时 Gal. C. S 坐标的标准化误差比无地形大 50% 左右, 而 SLEVE2 和 COS 坐标相对更接近无地形情况。

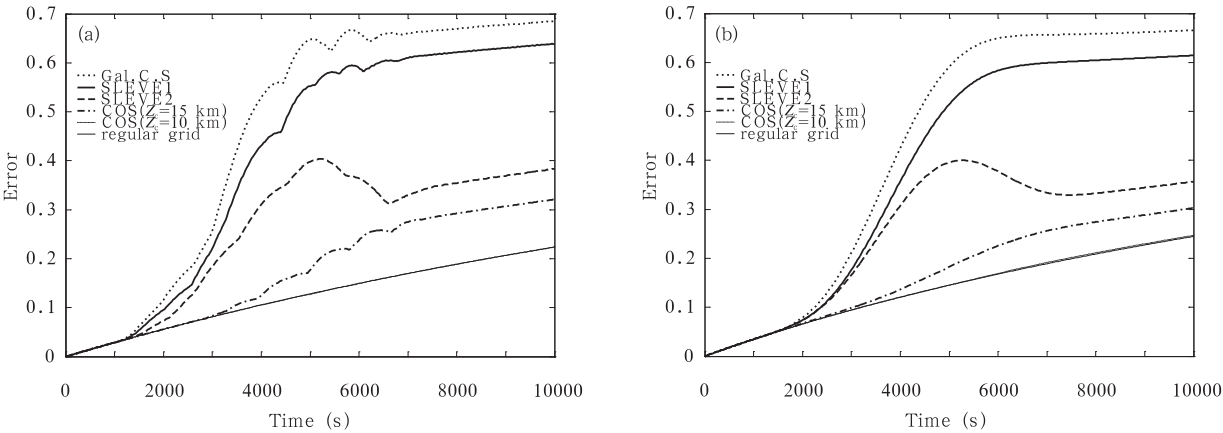


图 10 4 种坐标下一阶迎风方案的质量平流试验误差随时间演变(a. 均一化误差, b. 最大值误差)

Fig. 10 Temporal changes in the normalized errors and the maximum errors for the Gal. C. S coordinates, the SLEVE1 coordinates, the SLEVE2 coordinates and the COS coordinates ($Z_c = 15\text{ km}$ or 10 km) to the advection test using the first-order upwind scheme (a) the normalized mean error, and (b) the maximum value error

由试验结果和误差分析可以看出, 平流误差与坐标面的起伏有关。SLEVE2、COS 与 Gal. C. S、SLEVE1 坐标相比越往高层坐标面越平缓, 因而可以更好地减小平流误差; 并且, COS 坐标临界衰减高度 Z_c 越小越接近无地形时的误差。

5 结论和讨论

选取了 4 种典型的高度地形追随坐标, 将其化为统一的坐标形式, 分析其地形衰减系数 b 、坐标转

换的雅可比项 J_b 以及坐标面上气压梯度力计算误差, 然后分别进行了二维质量平流试验。通过理论分析和理想试验, 可以得到以下几个初步结论:

(1) 高度地形追随坐标可以转化为统一形式 $z = \hat{z} + bZ_s$, 将对坐标的研究简化为对地形衰减系数 b 的研究。

(2) SLEVE2 坐标要满足坐标转换的 $J_b^{-1} > 0$ 条件, 需要根据实践和理论合理地组合地形高度的各个尺度谱段 Z_{si} 及与其对应的特征尺度 h_i^* ($i =$

1,2)。

(3)COS 坐标的 J_b^{-1} 受到地形高度 Z_s 、衰减临界高度 Z_c 和参数 n 的约束。要满足坐标转换的 $J_b^{-1} > 0$ 条件: Z_s 和 Z_c 确定时, n 取值越大坐标面衰减效果越好, n 取值有上界, 且上界范围内 n 也不宜取值过大; Z_c 和 n 确定时, 地形高度也有上界, 若取临界衰减高度 Z_c 为 10 和 15 km, 地形最大高度分别约为 4.1 和 6.1 km。

(4)理论分析 Gal. C. S、SLEVE1、SLEVE2 和 COS 坐标可以发现, SLEVE2 和 COS 坐标的衰减效果要明显好于其他 2 种坐标; SLEVE2 和 COS 坐标相比, 高层 COS 坐标衰减快, 低层 SLEVE2 坐标衰减快。

(5)气压梯度力误差分析表明, 在同一模式层上, SLEVE2 和 COS 坐标比 Gal. C. S 和 SLEVE1 坐标的气压梯度力计算误差小; 在某一高度以上 COS 坐标气压梯度力计算误差小于 SLEVE2 坐标, 这一高度以下情况相反。

(6)二维理想平流试验结果表明, SLEVE2 和 COS 坐标减小平流误差效果优于 Gal. C. S 和 SLEVE1 坐标; COS 坐标中临界衰减高度 Z_c 的选择很重要, Z_c 越小越接近无地形的结果。

以上讨论的结果是基于理论分析和理想数值试验, 各种高度地形追随坐标在真实大气数值预报模式如 GRAPES 模式(张人禾等, 2008; 陈德辉等, 2008; 杨学胜等, 2008)中的表现还需要实际检验; 同时, 可以考虑结合各种坐标的优点设计新的高度地形追随坐标。

参考文献

- 陈德辉, 薛纪善, 杨学胜等. 2008. GRAPES 新一代全球/区域多尺度统一数值预报模式总体设计研究. 科学通报, 53(20): 2396-2407
- 李兴良, 陈德辉. 2005. 非静力中尺度高分辨率模式模拟中的垂直坐标影响研究. 气象学报, 63(2): 161-171
- 钱永甫, 王云峰. 1991. 数值模式中气压梯度力的算法试验. 气象学报, 49(3): 538-547

- 钱永甫, 周天军. 1995. 有地形模式中气压梯度力误差扣除法. 高原气象, 14(1): 1-9
- 钱永甫, 周天军. 1994. 陡峭地形区气压梯度力的误差扣除法. 热带气象学报, 10(4): 358-368
- 杨晓娟, 钱永甫. 2003. P- σ 坐标系数值模式中气压梯度力的递推算法. 大气科学, 27(2): 171-181
- 杨学胜, 胡江林, 陈德辉等. 2008. 全球有限区数值预报模式动力框架的试验验证. 科学通报, 53(20): 2418-2424
- 张人禾, 沈学顺. 2008. 中国国家级新一代业务数值预报系统 GRAPES 的发展. 科学通报, 53(20): 2393-2395
- 周天军, 钱永甫. 1996. 地形区两种典型气压梯度力计算方法的比较. 应用气象学报, 7(3): 377-380
- Arakawa A, Lamb V R. 1977. Computational design of the basic dynamical processes of the UCLA general circulation model// Methods in Computational Physics, General Circulation Models of the Atmosphere. New York: Academic Press, 17
- Eliassen A. 1949. The quasi-static equations of motion with pressure as independent variable. Geofys Publikasjoner, 17(3): 44p
- Gal-Chen T J, Somerville R C. 1975. On the use of a coordinate transformation for the solution of the Navier-Stokes equations. J Comput Phys, 17(2): 209-228
- Hu J L, Wang P X. 2007. The errors of pressure gradient force in high-resolution Meso-scale model with terrain-following coordinate and its revised scheme. J Atmos Sci, 31(1): 110-118
- Kasahara A. 1974. Various vertical coordinate systems used for numerical weather prediction. Mon Wea Rev, 102(7): 509-522
- Klemp J B. 2011. A terrain-following coordinate with smoothed coordinate surfaces. Mon Wea Rev, 139(7): 2163-2169
- Mesinger F. 1984. A blocking technique for representation of mountains in atmospheric models. Riv Meteor Aeronautica, 44(2): 195-20
- Phillips N A. 1957. A coordinate system having some special advantages for numerical forecasting. J Meteor, 14(2): 184-185
- Richardson L F. 1965. Weather Prediction by Numerical Process. New York: Cambridge University Press, 236pp
- Schar C, Leuenberger D, Fuhrer O, et al. 2002. A new terrain-following vertical coordinate formulation for atmospheric prediction models. Mon Wea Rev, 130(10): 2459-2480
- Williamson D L, Drake J B, Hack J J, et al. 1992. A standard test set for numerical approximations to the shallow water equations in spherical geometry. J Comput Phys, 102(1): 211-224