

一种“准拉格朗日法”和“欧拉法” 统一算法时间积分方案^{* 1}

辜旭赞

GU Xuzan

中国气象局武汉暴雨研究所, 武汉, 430074

Institute of Heavy Rain, China Meteorological Administration, Wuhan 430074, China

2009-03-05 收稿, 2009-06-12 改回.

Gu Xuzan. 2011. A new quasi-Lagrangian time integration scheme with the interpolation of fitting bicubic surface. *Acta Meteorologica Sinica*, 69(3):440-446

Abstract Starting from the Eulerian operator, the forecasting equations with 2-order time and space differential remainder are derived in light of the Taylor series expansion. The quasi-Lagrangian integration scheme with an algorithm of numerical analysis the - bicubic surface interpolation - for a new meteorological numerical model is then suggested. It describes atmospheric motions just as non-linear cubic waves, with fitting different bicubic surfaces to physical scalar or vector variable fields in the model atmosphere, i. e. the pressure, temperature, humidity, wind and divergence as well as the generalized Newtonian force acting to unit air mass on the rotating earth (acceleration). With the procedure of “fitting bicubic surface - time step integration - fitting bicubic surface……” through one-to-one correspondence with the Hermite bicubic patches to parameterize the latitude-longitudinal meshes in light of rectangular topologies so as to get the second-order derivative, a new model’s dynamic core comes true. Because of that the bicubic surface has two numerical analysis laws of the convergence and the optimality of the second-order derivative, it is necessary and sufficient reason mathematically to select the bicubic surface interpolation for calculating the upstream point of a quasi-Lagrangian air parcel. It covers the slope, curvature and torsion of every non-linear variable in the atmospheric motions, that is, one Hermite bicubic patch is mathematically equivalent to one secondary derivative (bicubic) variable “mesh” in the model atmosphere, and the former is “convergent” to the latter with “optimality”. The quasi-Lagrangian integration of calculating the upstream point with interpolation on the Hermite bicubic patch is also equivalent to the Eulerian integration with the unitive CFL computational stability criterion. It’s easy to fit a holoscopic variable field to a global bicubic surface, and make some reasonable local area or single point smoothing, according to some conditions of its slope, curvature or torsion, which must conform to the physical constraints such as mass conservation for pressure smooth, energy conservation for temperature smooth, and momentum conservation for wind smooth. Obviously it’s easy to put a new “patch” of bicubic surface on the smoothed place.

Key words Fitting bicubic surface, Quasi-Lagrangian time integration scheme, Non-linear cubic atmospheric motion, CFL computational stability criterion, Bicubic surface smooth

摘要 从欧拉算符出发, 用泰勒级数展开, 给出二阶时空微商余项预报方程, 进而讨论一种数值分析新算法——双三次曲面拟合(插值)的准拉格朗日时间积分方案与数值模式。它是将大气运动描述成为非线性的“三次”运动, 即是对原始大气运动方程中包括标量、矢量的压、温、湿、风、以及“旋转地球上广义牛顿力”加速度场和散度场等, 做双三次曲面拟合, 实现对各个大气运动变量场的二阶可导, 即限定气块上游点在各个不同双三次曲面(片)、具有斜率、曲率和挠率的非线性“三次”变

* 资助课题: 国家自然科学基金项目(40575053)。

作者简介: 辜旭赞, 主要从事天气预报技术研究。E-mail: guxuzan@163.com

量场上活动,从而可对各个大气运动方程做时间离散积分,即为“双三次曲面拟合—时间步积分—双三次曲面拟合……”,实现成为一种新动力框架数值模式。由于双三次曲面具有数学定律“收敛性”和二阶可导“最优性”,故选用双三次曲面插值求算二阶余差“上游点”,具有“充分必要”的数学理由:它包含了大气运动变量场之斜率、曲率和挠率。因此,埃尔米特双三次曲面片具有对“网格”变量场二阶可导运算“等价性”、及其数学“收敛性”与最佳曲率“最优性”,并且将“准拉格朗日法”与“欧拉法”,以及柯朗-弗里德里希斯-列维判据统一起来。容易实现全球“网格”变量场的双三次曲面拟合,和可按双三次曲面变量场的斜率、曲率或挠率判断,作变量场局域或单点平滑,以此保持“三次”模式的时间积分稳定性。

关键词 双三次曲面拟合, 准拉格朗日时间积分方案, 非线性“三次”大气运动, 柯朗-弗里德里希斯-列维判据, 双三次曲面平滑

中图法分类号 P401

1 引言

Krishnamurti(1962)提出对于正压原始大气运动方程模式可采用准拉格朗日时间积分方案;Robert等(1982,1985)提出一种对平流项的半拉格朗日法和对重力波项的半隐式格式相结合的时间积分方案,并在相同空间分辨率条件下,与欧拉时间积分方案作比较,前者的时间步长取为后者10倍也可计算稳定,且两者计算结果相差不大;Semazzi等(1995)采用二时间层半隐式-半拉格朗日的非中央平均时间差分公式和利用外插与时间平滑求非线性项;Bates等(1990)、Qian等(1998)都认为,在球面上计算准拉格朗日气块上游点运动轨迹时,对标量场和矢量场应当作不同的时空离散化;Purser等(1991)、Noir等(1999)因认为采用传统的非线性插值、三次样条插值计算气块上游点太费计算时间,先后改进了一种计算精度较高和效率的“降阶插值法”,并已在业务数值模式当中得到应用;廖洞贤(1999)认为,半拉格朗日法不存在非线性(平流项)计算不稳定,因此可以取较大的时间步长;周毅等(2002)给出三时间层的一维线性迭代插值(可推广到二维的“双线性插值”)求解半拉格朗日上游点方法,和利用二时间层匀加速运动之距离与速度、加速度关系式,插值或迭代插值计算气块的上游点方法,并且认为半拉格朗日法可以避免计算平流项所产生的非线性不稳定,且与欧拉法同等计算精度相比较,半拉格朗日法可以使用较大时间步长,甚至可以突破柯朗-弗里德里希斯-列维(CFL)计算不稳定判据的限制,其计算相速误差和频散误差比较小并且具有较好守恒性,故已被应用到从有限区域模式到全球谱模式和非静力中尺度模式。陈德辉等(2004)认为,因在经纬网格模式中,一般空间离散差分比时间离散差分截断误差大得多,采用半拉格朗日法计

算平流项,有利于提高空间离散差分的计算精度,其所取时间步长只依据半拉格朗日法求上游点的计算精度,而不再依据欧拉法与其变量格式的计算稳定度;因欧拉法变量格式对于计算非线性平流项影响较大,也即模式守恒性,而半拉格朗日-半隐式差分方案将对于变量场的非线性平流项计算转化为求“上游点”及其变量值的计算,因此,非线性“平流”计算已不存在。近年来,采用半隐式-半拉格朗日时间积分方案的GRAPES数值模式已得到较快发展(朱红芳等,2007;郑永骏等,2008;马旭林等,2008,2009)。

三次插值函数有三次样条、双三次曲面和“三”三次曲体之分。“双三次曲面(片)”最早是由美国波音公司研究所的弗格森(Ferguson,1964)提出,并且被用于飞机制造设计,现已在计算机图形学里得到完整描述与实现。辜旭赞(2003)曾探讨在球面坐标系上做双三次曲面拟合与在大气科学可视化方面的应用。辜旭赞等(2006,2007,2008)讨论在数学 R^n 空间里存在三次样条/双三次曲面拟合的新算法数值模式。本文则讨论新算法数值模式中的二时间层变加速运动之双三次曲面插值的准(半)拉格朗日时间积分方案。

因数值分析定律:①三次插值函数及其一阶、二阶导数一起收敛于原函数(“收敛性”);②三次插值函数二阶导数对原函数二阶导数为最佳逼近(“最优性”);③三次插值函数存在多种数学边界,且存在周期三次插值函数(故存在全球二阶可导双三次曲面)。所以,与谱模式数学基础相当,用双三次曲面拟合也能够去做(全球)数值模式,且是最优空间二阶可导数值模式,其动力框架核心就是“双三次曲面插值的准拉格朗日时间积分方案”。双三次曲面包含了对于变量场的斜率(线性“平流”)、曲率(非线性“弯流”)和挠率(非线性“扭流”)拟合,就为对二阶余

差预报方程完成一个时间步积分,作好变量场二阶可导“充分必要”准备。这里将传统“双线性插值”、或“中央差分”一般只对线性“平流”作计算,转化为对具有斜率、曲率和挠率的“三次”变量场上的上游点值计算。这时上游点值将依赖于变量场的斜率、曲率和挠率(线性“平流”、非线性“弯流”和“扭流”的计算都存在),从而可将“准拉格朗日法”和“欧拉法”、以及 CFL 判据统一起来,并且可将标量场和矢量场的时空离散化结合起来,同时还能解决极区网格过密、极点水平风速无定义与矢量场(如风场)连续性问题的。

2 欧拉法与准拉格朗日法时间积分方案

按欧拉算符,大气运动方程可以写为如下微分通式

$$\frac{dP}{dt} \equiv \frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} + v \frac{\partial P}{\partial y} + w \frac{\partial P}{\partial z} = a \quad (1)$$

式中, P 表示气压 p 、气温 T 、比湿 q 、水平风速 u 、 v 、和垂直速度 w 等, t 为时间。而 a 为源汇变率强迫项,对 u 、 v 方程,其为旋转地球上的单位质量空气所受广义牛顿力(加速度,以下分别设为 a_u 、 a_v);对 w 方程,其为非静力强迫作用(以下设为 a_w);对 p 、 T 方程,其为散度场强迫项;对 q 方程,其为水汽源汇。

对式(1)欧拉点上预报变量 $P(t, x, y, z)$ 作时间步长 Δt 泰勒级数展开,有欧拉向前差分

$$P(t + \Delta t, x, y, z) = P(t, x, y, z) + \Delta t \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\Delta^2 t}{2!} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \dots + R_n(t + \Delta t, x, y, z) \quad (2)$$

式中, $R_n(t + \Delta t, x, y, z)$ 是数量级为 $\Delta^{n+1}t$ 的高阶余项,气象上常用 $O(\Delta^n t)$ 符号表示,称为余差。

用欧拉算符,可以将式(2)中的所有时间偏导数都转换为空间偏导数与强迫项及其时空(偏)导数之和。则式(2)略去 $P(t, x, y, z)$ 的时空二阶以上高阶导数项,同时略去速度(u 、 v 、 w)和广义加速度(a)的空间(偏)导数项,则容易得到时空微商余差为 $O(\Delta^2 t, \Delta^2 x, \Delta^2 y, \Delta^2 z)$ 的欧拉向前差分预报方程。

$$P(t + \Delta t, x, y, z) \approx P(t, x, y, z) - \Delta x \frac{\partial P}{\partial x} - \Delta y \frac{\partial P}{\partial y} - \Delta z \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\Delta^2 x}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\Delta^2 y}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\Delta^2 z}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \Delta x \Delta z \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} +$$

$$\Delta y \Delta z \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} + a \Delta t = \hat{P}(t, x - \Delta x, y - \Delta y, z - \Delta z) + a \Delta t \quad (3)$$

式(3)欧拉向前差分的位移为

$$\begin{aligned} \Delta x &= u \Delta t + a_u \frac{\Delta^2 t}{2} \\ \Delta y &= v \Delta t + a_v \frac{\Delta^2 t}{2} \\ \Delta z &= w \Delta t + a_w \frac{\Delta^2 t}{2} \end{aligned}$$

显然,式(3)中 $\hat{P}(t, x - \Delta x, y - \Delta y, z - \Delta z)$ 就是空间三维上游点 $P(t, x - \Delta x, y - \Delta y, z - \Delta z)$ 取其泰勒级数 $O(\Delta^2 x, \Delta^2 y, \Delta^2 z)$ 余差近似。式(3)表明:若准拉格朗日气块不与外界发生任何交换(取变率 $a = 0$),则在欧拉点的变量预报值等于气块在上游点的变量值,但是,上游点运动路径必须是经过各个变量场的非线性平流,而式(3)为路径经过了“三次”平流(近似)。

由式(3)知,若准拉格朗日气块的路径取与欧拉位移一致,则准拉格朗日法与前差欧拉法计算结果可以一致。只是对于式(3),传统欧拉法是设计采用空间一、二阶中央差近似,而准拉格朗日法是用“双线性插值”(计算精度相当于空间一阶中央差)求上游点,也有用所谓“降阶插值”求上游点,致使二者计算结果有所区别。下面考虑采用“三次插值函数”拟合,既可求得一、二阶空间(偏)导数用于欧拉法,又可直接求得二阶可导变量场上的上游点用于准拉格朗日法,这时二者的计算结果完全一样。

为减少三次插值函数计算量,可运用“尺度分析法”。因大尺度水平运动远大于垂直运动,即 $\Delta x \gg \Delta z, \Delta y \gg \Delta z$,则可略去式(3)中含 Δz 的空间二阶(偏)导数小项,式(3)变为

$$\begin{aligned} P(t + \Delta t, x, y, z) &\approx P(t, x, y, z) - \Delta x \frac{\partial P}{\partial x} - \Delta y \frac{\partial P}{\partial y} - \Delta z \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\Delta^2 x}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\Delta^2 y}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \\ &\Delta x \Delta y \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + a \Delta t = \hat{P}(t, x - \Delta x, y - \Delta y, z) - \Delta z \frac{\partial P}{\partial z} + a \Delta t \quad (4) \end{aligned}$$

式中, $\hat{P}(t, x - \Delta x, y - \Delta y, z)$ 就是等高面(z)上的空间二维“水平”上游点 $P(t, x - \Delta x, y - \Delta y, z)$ 取其泰勒级数 $O(\Delta^2 x, \Delta^2 y)$ 余差近似。则是式(4)用双三次曲面拟合求 \hat{P} , 取代了式(3)用“三”三次曲面拟合求 \hat{P} 。

3 埃尔米特双三次曲面片与孔斯双三次曲面

3.1 埃尔米特双三次曲面片

数值分析用于曲面拟合最简单的数学元素是曲面片。设 x, y 是曲面片 P 的两个独立参数, 分别定义在球面水平方向的经纬网格上, 可等分经、纬距, 并定义参数化的 $x \in [0, 1], y \in [0, 1]$, 即成为一“拓扑矩形”网格, 对应的埃尔米特 (Hermite) 双三次曲面片由一 16 个独立矢量矩阵完全确定

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{00}^y & P_{01}^y \\ P_{10} & P_{11} & P_{10}^y & P_{11}^y \\ P_{00}^x & P_{01}^x & P_{00}^{xy} & P_{01}^{xy} \\ P_{10}^x & P_{11}^x & P_{10}^{xy} & P_{11}^{xy} \end{pmatrix} \quad (5)$$

式中, P 的下标表示曲面片的 4 个角点位置, 上标表示对 P 在 x 或 y 方向求一阶、二阶 (偏) 导数。则矩阵 \mathbf{P} 左上角为 4 个角矢 (变量值); 右上角加左下角共 8 个切矢 (斜率), 以及 $P_{00}^{xx}, P_{01}^{xx}, P_{10}^{xx}, P_{11}^{xx}, P_{00}^{yy}, P_{01}^{yy}, P_{10}^{yy}, P_{11}^{yy}$ 共 8 个弯矢 (曲率), 是分别通过 P 场在 x 和 y 方向三次样条拟合求得, 但 8 个切矢与对应 8 个弯矢不相互独立; 右下角 4 个扭矢 (挠率), 是再做 x/y 方向切矢在 y/x 方向三次样条, 以便求得 P^{xy}/P^{yx} , 但在“拓扑矩形”网格上 $P^{xy} = P^{yx}$ 。

3.2 双三次曲面片与欧拉算符

上述埃尔米特双三次曲面片是对水平变量场 P 拟合。因双三次曲面具备数学定律“收敛性”和二阶可导“最优性”, 故这里近似认为其 $P^x = \partial P / \partial x, P^y = \partial P / \partial y, P^{xx} = \partial^2 P / \partial x^2, P^{yy} = \partial^2 P / \partial y^2$ 和 $P^{xy} = \partial^2 P / \partial x \partial y$, 其中拟合曲率是由拟合斜率完全确定, 反之亦然。故在水平分层的模式大气里, 埃尔米特双三次曲面片具有对“网格”变量场数学二阶可导运算 (拟合) “等价性”。这里若取 4 个扭矢均为零矢, 即成为所谓“ F 双三次曲面片”, 取 F 双三次曲面片可以减少 1/3 计算量 (挠率为零相当于双三次曲面片的连续性“降阶”), 扭矢在一定程度上也决定曲面片凹凸, 但扭矢与弯矢均比切矢小一个数量级。

3.3 孔斯双三次曲面

按双三次曲面连续性条件, 用埃尔米特双三次曲面片可以组合成全球 (或有限区) 孔斯 (Coons, 1964) 双三次曲面, 并使该孔斯双三次曲面在 x 和 y 方向均达到二阶可导。而在有限区的双三次曲面边界上, 是三次样条插值函数要求的边界条件之两条:

已知边界上的斜率或曲率。故通过三次样条拟合, 总可以实现全球大气运动变量场的双三次曲面拟合, 同时可为有限区变量场的双三次曲面拟合提供侧边界值与其斜率、曲率和挠率。

从而通过对大气运动方程中的所有变量场, 都做“双三次曲面拟合—时间步积分—双三次曲面拟合……”, 实现成为一种双三次曲面拟合 (插值) 的、准拉格朗日时间积分方案新算法数值模式。

3.4 双三次曲面片代数式

一般参数 (拓扑矩形网格: $x \in [0, 1], y \in [0, 1]$) 双三次曲面片的代数式为

$$P(x, y) = a_{33}x^3y^3 + a_{32}x^3y^2 + a_{23}x^2y^3 + a_{31}x^3y + a_{13}xy^3 + a_{30}x^3 + a_{03}y^3 + a_{22}x^2y^2 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + a_{11}xy + a_{10}x + a_{01}y + a_{00} \quad (6)$$

式 (6) 应与已知的埃尔米特双三次曲面片式 (5) 等价, 则由式 (5) 中的 16 个独立矢量反解出式 (6) 中的 16 个代数系数。可代入式 (6) 中 4 个已知值和 12 个定点 (偏) 导数, 得到 16 个线性方程 (组), 并解出式 (6) 中 16 个代数系数 (设 $C = P_{00} - P_{01} - P_{10} + P_{11}$)

$$\begin{aligned} a_{00} &= P_{00} \\ a_{10} &= P_{00}^x \\ a_{01} &= P_{00}^y \\ a_{11} &= P_{00}^{xy} \\ a_{02} &= -3P_{00} + 3P_{01} - 2P_{00}^y - P_{01}^y \\ a_{03} &= 2P_{00} - 2P_{01} + P_{00}^y + P_{01}^y \\ a_{20} &= -3P_{00} + 3P_{10} - 2P_{00}^x - P_{10}^x \\ a_{30} &= 2P_{00} - 2P_{10} + P_{00}^x + P_{10}^x \\ a_{12} &= -3P_{00}^x + 3P_{01}^x - 2P_{00}^{xy} - P_{01}^{xy} \\ a_{13} &= 2P_{00}^x - 2P_{01}^x + P_{00}^{xy} + P_{01}^{xy} \\ a_{21} &= -3P_{00}^y + 3P_{10}^y - 2P_{00}^{xy} - P_{10}^{xy} \\ a_{31} &= 2P_{00}^y - 2P_{10}^y + P_{00}^{xy} + P_{10}^{xy} \\ a_{22} &= 9C + 6(P_{00}^x - P_{01}^x + P_{00}^y - P_{10}^y) + 3(P_{10}^x - P_{11}^x + P_{01}^y - P_{11}^y) + 4P_{00}^{xy} + 2P_{01}^{xy} + 2P_{10}^{xy} + P_{11}^{xy} \\ a_{23} &= -6C - 4P_{00}^x + 4P_{01}^x - 2P_{10}^x + 2P_{11}^x - 3(P_{00}^y + P_{01}^y - P_{10}^y - P_{11}^y) - 2P_{00}^{xy} - 2P_{01}^{xy} - P_{10}^{xy} - P_{11}^{xy} \\ a_{32} &= -6C - 4P_{00}^y + 4P_{10}^y - 2P_{01}^y + 2P_{11}^y - 3(P_{00}^x - P_{01}^x + P_{10}^x - P_{11}^x) - 2P_{00}^{xy} - 2P_{01}^{xy} - P_{10}^{xy} - P_{11}^{xy} \end{aligned}$$

$$a_{33} = 4C + 2(P_{00}^x - P_{01}^x + P_{10}^x - P_{11}^x) + 2(P_{00}^y + P_{01}^y - P_{10}^y - P_{11}^y) + P_{00}^{xy} + P_{01}^{xy} + P_{10}^{xy} + P_{11}^{xy} \quad (7)$$

可见,由埃尔米特双三次曲面片即决定了大气运动为非线性“三次”运动。“双三次曲面(片)插值的准拉格朗日时间积分方案”是:其水平上游点运动轨迹始终是在包含斜率(线性“平流”)、曲率和挠率(非线性“弯流”和“扭流”)的非线性“双三次曲面”变量场上运动。

4 双三次曲面片与“三”三次曲体元

若要实现求得三维空间上游点的准拉格朗日时间积分方案(对于水平尺度与垂直尺度相当的天气系统,如龙卷风,需要该方案),先要实现三维(“三”)三次曲体元拟合,而“三”三次曲体元将由64个独立矢量矩阵(64个系数的三元三次代数式)确定。则“三”三次曲体元拟合包含三维变量场的全部二阶、三阶(偏)导数。显然,“三”三次曲体元计算量应是双三次曲面片的4(16×4=64)倍。

5 双三次曲面上的准拉格朗日时间积分

全球拓扑矩形的经纬网格设计,以及高纬度与极区的纬向网格点过密和定义极点水平风速等问题,可参见有关文献。

在全球(或有限区)拓扑矩形的经纬网格之上,可以实现全球(或有限区)水平变量场的双三次曲面拟合。因做双三次曲面拟合的数学前提条件是:作为源函数的变量场为“C³”(三阶可导)连续。故对于大气运动物理量 p, T, q, u, v, w 、以及散度场、广义加速度场等,都可做其双三次曲面拟合,但要注意 p, T, q (均非负)的不连续性。

5.1 准拉格朗日法

在计算准拉格朗日气块运动轨迹时,需要不断求得气块的位置与位移速度。而双三次曲面插值的准拉格朗日时间积分特征是,限定气块路径在各个水平变量场的双三次曲面上,变量场包括气压、温度、湿度、风、散度和加速度(广义牛顿力)等。同时作垂直气柱的气压、温度、湿度、风三次样条,以便完成水平方向准拉格朗日法/垂直方向欧拉法、适当时间步长的一步时间积分。

5.2 在双三次曲面片上求上游点与 CFL 条件

参见图 1,一般气块上游点的水平路径(坐标

$L(\Delta x, \Delta y)$),只在与欧拉预报点相邻的4个拓扑矩形之上的埃尔米特双三次曲面片上求算。即在各个 P 双三次曲面片上,插值求得水平上游点的 p, T, q, u, v 和 a_u, a_v 等,其中 a_u, a_v 还是各自的气压梯度力与地转偏向力及地球离心力(曲率项)和摩擦力的叠加场。

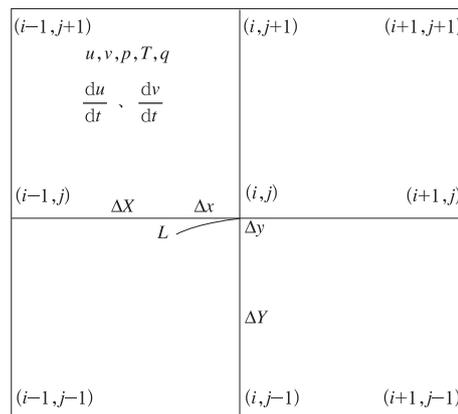


图 1 在双三次曲面(片)上的水平运动路径 $L(\Delta x, \Delta y)$ 和 CFL 计算稳定性条件

($\Delta X, \Delta Y$ 为经/纬网格)

Fig. 1 An air parcel's locus $L(\Delta x, \Delta y)$ on the bicubic patch mesh ($\Delta X, \Delta Y$), and the "CFL" calculation stability condition (see the text for further details)

可将 Δt 再分为 M 个时间段,以便更精确地求

得 $L: (\Delta x, \Delta y) = \sum_{l=1}^M (\Delta x_l, \Delta y_l)$ 。在编程上,可以依据 $\Delta x, \Delta y$ 正负符号,确定路径 L 所处双三次曲面片的“象限”。这里认为 L 点就是气块的上游点,它在 Δt 时间步长内,带着它的物理属性,一路上受到各自源汇变率(a)的强迫作用,沿着路径 L 到达欧拉预报点。

从而可求得上游点的参数化坐标(即式(6)中的 (x, y)): $x = |\Delta x / \Delta X|$ 和 $y = |\Delta y / \Delta Y|$,这里 ΔX 和 ΔY 分别对应拓扑矩形的“长”(纬距)和“宽”(经距)。从而求得上游点式(6)的所有变量 $P: p, T, q, u, v$ 和 a_u, a_v 等。

显然,求路径 L 时,必须满足著名的 CFL 计算稳定性条件。这里应是: $|\Delta x| \leq \Delta X$ 和 $|\Delta y| \leq \Delta Y$; 或 $0 \leq x \leq 1$ 和 $0 \leq y \leq 1$ 。否则,上游点将到了与该4个双三次曲面片相邻的某一外“片”上,该上游点已脱离了原(全球或有限区)双三次曲面 P 。但是,上

游点值仍将外延原路径某“片”双三次曲面片的斜率、曲率和挠率。所以，超长的时间步长也有一定的计算稳定性，这里就解释了为什么准拉格朗日法能够突破 CFL 判据。

若求得上游点的参数化坐标有 $1 \leq x \leq 2$ 或 $1 \leq y \leq 2$ (突破“一层时间”CFL 判据)，则上游点将位于 (参见图 1) 与原 4“片”相邻之外的 12“片”中的某一“片”上，同样求得位于该“片”上的上游点变量值。可知，这时的上游点值不同于外延“片”上的值，它是仍然保留在原 (全球或有限区) 双三次曲面 P 上的值。

突破“二层时间”、“三层时间”CFL 判据之情形，可以与此类推。但是，使用过长的时间步长作预报，其计算准确度有待将来研究。

5.3 上游点的矢量坐标转换

双三次曲面拟合不仅将标量场 (p, T, q 及散度场) 拟合成为二阶可导连续场，同时也将矢量分量场 (u, v 及 u, v 的加速度分量场) 拟合成为二阶可导连续场。但是，这时变量 u, v 的球面局地笛卡儿坐标的单位矢量将随着气块上游点的位置变化而变化 (其速度和加速度都在不断变化)。设已求得上游点气块的水平风速为 (u'_0, v'_0) ，到达欧拉点后应该转换为 (u', v') ，又欧拉点纬度为 φ ，地球平均半径为 r ，而气块在走过路径 L 后，其水平单位矢量发生弧度变化为 (α, β) ，则 $\beta = \delta y / r$ 和 $\alpha = \delta x / [r \cdot \cos(\varphi + \beta)]$ 。因 α 和 β 都只能是锐角，例如在低纬度，对于水平 $1^\circ \times 1^\circ$ 拓扑矩形的“纬-经”网格，在 CFL 判据约束下，有 $|\alpha| \leq \pi/180$ 和 $|\beta| \leq \pi/180$ ；而在某高纬度，若取 $15^\circ \times 1^\circ$ 的“纬-经”网格，则有 $|\alpha| \leq \pi/12$ 和 $|\beta| \leq \pi/180$ 。这时都有

当上游点位于北半球时，

$$\begin{aligned} u' &= u'_0 \cos \alpha - v'_0 \sin \alpha \\ v' &= u'_0 \sin \alpha + v'_0 \cos \alpha \end{aligned}$$

当上游点位于南半球时，

$$\begin{aligned} u' &= u'_0 \cos \alpha + v'_0 \sin \alpha; \\ v' &= -u'_0 \sin \alpha + v'_0 \cos \alpha \end{aligned}$$

从而 (全球或有限区) 双三次曲面拟合可将标量场和矢量场的时空离散化结合起来。

6 大气非线性运动与双三次曲面平滑

原始大气运动方程描述非线性大气运动：它既不是线性运动，也不是“三次运动”。故在作准拉格

朗日法或欧拉法时间积分过程中，都将出现不同尺度的气压、温度、湿度、风不稳定“扰动”，表现在三次样条拟合也会出现所谓“尖点”或“环绕” (犹如河流中的“浪花”)。这时需要对各变量场双三次曲面，不断地做符合其物理意义的平滑。例如，在双三次曲面风场上做平滑，其物理诠释是：大气运动是以平滑 (平均) 速度输送大气质量并改变气压场。

因平滑 (尤其是全场平滑) 可能歪曲大气运动，故双三次曲面应当采取局域 (或单点) 平滑。因为已知各个变量场的双三次曲面连续性，可由判断其斜率、曲率和挠率去做局域 (或单点) 平滑：平滑气压场要保证质量守恒；平滑气温场要保证能量守恒；平滑风场要保证动量守恒，或因为摩擦，风场动能耗散为热能；以此保证时间积分过程的稳定性。并且容易重新求得平滑区的双三次曲面“补丁”。

7 结论和讨论

(1) 与谱模式的数学基础相当，因为双三次曲面具有对于原函数及其一阶、二阶导数“收敛性”，和对于原函数二阶导数最佳逼近“最优性”，故用双三次曲面拟合可以做数值模式，且它是最优空间二阶可导数值模式：通过对大气运动变量场，做“双三次曲面拟合—时间步积分—双三次曲面拟合……”，实现成为一种双三次曲面拟合 (插值) 的准拉格朗日时间积分方案新数值模式。

(2) 埃尔米特双三次曲面片具有对网格变量场二阶可导运算“等价性”：它不仅包含变量场“线性”斜率，还包含“非线性”曲率和挠率，故双三次曲面 (片) 插值的准拉格朗日时间积分方案，将大气运动近似描述成为“三次运动”，它优于传统“双线性插值”与中央差近似，并可“准拉格朗日法”与“欧拉法”时间积分方案统一起来。

(3) 若准拉格朗日气块在非线性运动过程中不与外界发生任何交换，则在欧拉点的变量预报值等于气块在上游点的变量值，若近似认为它就是在双三次曲面 (片) 上的“三次运动”上游点值，将具有时空微商余差为 $O(\Delta^2 t, \Delta^2 x, \Delta^2 y)$ 的计算精度和具有上述的运算简单 (二阶可导运算)，加之上述的数学“收敛性”和“最佳曲率”优点。

(4) 双三次曲面插值的准拉格朗日时间积分方案，仍须受 CFL 判据制约，所谓“突破 CFL 判据”，实际是指对于双三次曲面 (片) 变量场的数学特征

“外延”,因而仍具有一定的计算稳定性,但在双三次曲面变量场上,理论上可以作突破 CFL 判据上游点值的准确计算。

(5) 强迫项也随时空变化,也应对它作双三次曲面拟合,以便更加精确地计算强迫项作用。

(6) 球面经纬拓扑矩形网格与埃尔米特双三次曲面片一一对应,而埃尔米特双三次曲面片可通过参数化代数式予以求解,在球面矢量双三次曲面上,容易作上游点局地笛卡儿坐标水平单位矢量转换,且在全球拓扑矩形网格标量或矢量双三次曲面上,容易解决极区网格过密问题,故容易实现新算法全球数值模式。

(7) 可按双三次曲面变量场的斜率、曲率或挠率判断,作符合大气运动物理诠释的双三次曲面局部或单点平滑,以保持模式的时间积分稳定性。

参考文献

- 陈德辉,胡志晋,徐大海等. 2004. CAMS 大气数值预报模式系统研究. 北京:气象出版社,190pp
- 陈德辉,薛纪善. 2004. 数值天气预报业务模式现状与展望. 气象学报, 62(5):623-633
- 陈起英,管成功,姚明明等. 2007. 全球中期模式升级关键技术研发和预报试验. 气象学报, 65(4):478-492
- 丑纪范. 2002. 大气科学中的非线性与复杂性. 北京:气象出版社, 204pp
- 丑纪范. 2007. 数值天气预报的创新之路——从初值问题到反问题. 气象学报, 65(5):673-682
- 辜旭赞,张兵. 2006. 初论双三次数值模式. 气象科技, 34(4):353-357
- 辜旭赞,张兵. 2007. 双三次数值模式与理想 Lamd 波、龙卷扰动对比模拟分析. 气象科技, 35(5):613-620
- 辜旭赞,张兵. 2008. 全球(Z)双三次数值模式的设计与个例模拟(I)——模式动力框架设计. 高原气象, 27(3):474-480
- 辜旭赞,张兵. 2008. 全球(Z)双三次数值模式的设计与个例模拟(II)——个例模拟结果分析. 高原气象, 27(3):481-490
- 辜旭赞,张兵. 2008. 双三次数值模式引论. 北京:气象出版社,157pp
- 辜旭赞. 2003. 球面坐标系上双三次曲面拟合与大气科学应用. 暴雨灾害, (1):16-21
- 李建平. 1988. 计算机图形学原理教程. 成都:电子科技大学出版社, 328pp
- 廖洞贤. 1999. 大气数值模式的设计. 北京:气象出版社,291pp
- 马旭林,薛纪善,陆维松. 2008. GRAPES 全球集合预报的集合卡尔曼变换初始扰动方案初步研究. 气象学报, 66(4):526-536
- 马旭林,庄照荣,薛纪善等. 2009. GRAPES 非静力数值预报模式的三维变分资料同化系统的发展. 气象学报, 67(1):50-60
- 孙家广等. 1998. 计算机图形学(第三版). 北京:清华大学出版社, 595pp
- 奚梅成. 1995. 数值分析方法. 合肥:中国科学技术大学出版社, 377pp
- 张大林. 2005. 大气科学的世纪进展与未来展望. 气象学报, 63(5): 812-824
- 张全伙,张剑达. 2003. 计算机图形学. 北京:机械工业出版社,300pp
- 张玉玲,吴辉碇,王晓林. 1986. 数值天气预报. 北京:科学出版社, 472pp
- 郑永骏,金之雁,陈德辉. 2008. 半隐式半拉格朗日动力框架的动能谱分析. 气象学报, 66(2):143-157
- 周毅,侯志明,刘宇迪. 2003. 数值天气预报基础. 北京:气象出版社, 222pp
- 周毅,刘宇迪,桂祁军等. 2002. 现代数值天气预报. 北京:气象出版社,220pp
- 朱红芳,王东勇,管兆勇等. 2007. 不同初始场条件对 GRAPES 模式数值预报的影响. 气象学报, 65(4):493-502
- Bates J R, Semazzi F H M, Higgins R W, et al. 1990. Integration of the shallow water equations on the sphere using a vector semi-Lagrangian scheme with a multigrid solver. Mon Wea Rev, 118: 615-627
- Ferguson J C. 1964. Multivariable curve interpolation. J Association Computing Machinery, 2: 221-228
- Qian Jianhua, Fredrick Semazzi F H M, Jeffrey S S. 1998. A global non-hydrostatic semi-Lagrangian, atmospheric model with orography. Mon Wea Rev, 126: 747-771
- Krishnamurti T N. 1962. Numerical integration of primitive equations by a quasi-Lagrangian advective scheme. J Appl Meteor, 1: 508-521
- Noir R, Cote J, Staniforth A. 1999. Monotonic cascade interpolation for semi-Lagrangian advection. Quart J Roy Meteor Soc, 125: 197-212
- Purser R J, Leslie L M. 1991. An efficient interpolation procedure for high-order three-dimensional semi-Lagrangian models. Mon Wea Rev, 119: 2492-2498
- Robert A A. 1982. Semi-Lagrangian and semi-implicit numerical integration scheme for the primitive meteorological equations. J Meteor Soc Japan, 60: 319-325
- Robert A A, Yee T L, Ritchie H A. 1985. Semi-Lagrangian and semi-implicit numerical integration scheme for multilevel atmospheric models. Mon Wea Rev, 113: 388-394
- Semazzi F H M, Qian J H, Scroggs J S. 1995. A global non-hydrostatic, semi-Lagrangian, atmospheric model orography. Mon Wea Rev, 123:2534-2550