

Energy-Casimir 方法在中尺度扰动 稳定性研究中的应用^{* 1}

冉令坤¹ 楚艳丽² 高守亭¹

RAN Lingkun¹ CHU Yanli² GAO Shouting¹

1. 中国科学院大气物理研究所,北京,100029

2. 北京城市气象研究所,北京,100089

1. *Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China*

2. *Institute of Urban Meteorology, CMA, Beijing 100089, China*

2008-04-30 收稿,2008-06-18 改回.

Ran Lingkun, Chu Yanli, Gao Shouting. 2009. Application of Energy-Casimir method to the study of mesoscale disturbance stability. *Acta Meteorologica Sinica*, 67(4):530-539

Abstract Taking into account the effect of moisture, we derive a three-dimensional pseudoenergy wave-activity relation for moist atmosphere from the primitive zonal momentum and total energy equations in Cartesian coordinates by using Energy-Casimir method. In the derivation, a Casimir function is introduced which is a single-value function of virtual potential temperature. Since the pseudoenergy wave-activity relation is constructed in the ageostrophic and nonhydrostatic dynamical framework, it may be applicable to diagnosing the stability of mesoscale disturbance systems in a steady-stratification atmosphere. The theoretical analysis shows that the wave-activity relation presents a nonconservative form in which the pseudoenergy wave-activity density is composed of disturbance kinetic energy, available potential energy, and buoyant energy. The local change of pseudoenergy wave-activity density depends on the combination of shear of zonal basic flow, Coriolis force work, and wave-activity source or sink as well as wave-activity flux divergence. The diagnosis shows that the horizontal distribution and temporal trend of pseudoenergy wave-activity density are similar to that of the observation of 6-h accumulated surface rainfall, which indicates that the pseudoenergy wave-activity density in the middle and low levels is capable of representing the dynamical and thermodynamic vertical features of precipitable mesoscale systems so that the pseudoenergy wave-activity density is closely related to the observed surface rainfall. The calculation of the terms in wave-activity relation reveals that the wave-activity flux divergence shares a similar temporal trend with the local change of pseudoenergy wave-activity density and the observed surface rainfall. Although the terms associated with the shear of zonal basic flow and the Coriolis force make contribution to the local change of pseudoenergy wave-activity density, the contribution coming from wave-activity flux divergence is much more noticeable.

Key words pseudoenergy wave-activity density, wave-activity flux, steady-stratification, instability

摘 要 考虑湿空气中的水汽效应,引进 Casimir 函数(它是虚位温的单值函数),在 x 方向动量方程和总能量方程的基础上,采用 Energy-Casimir 方法建立了三维非地转平衡和非静力平衡的拟能量波作用方程,由于该方程建立在非地转平衡和非静力平衡的动力框架下,因此可用于讨论层结稳定大气中尺度扰动系统的发展演变。理论分析表明,拟能量波作用方程具有非守恒形式,其中的拟能量波作用密度主要由扰动动能、有效位能和浮力能三部分组成;拟能量波作用密度局地变化除了受拟能量波作用通量散度影响之外,纬向基本气流切变、科氏力做功以及由非绝热加热和水汽相变所构成的波作用源汇项对其也都有贡献。诊断分析结果表明,对流层中低层的拟能量波作用密度与观测的 6 h 累积地面降水在水平空间分布和时间演变趋

* 资助课题:国家自然科学基金面上项目(40405011 和 40875032)和国家自然科学基金重点项目(2004CB418301)。

作者简介:冉令坤,主要从事中尺度动力学和数值模拟研究。Email: rlk@mail.iap.ac.cn

势上比较接近,说明拟能量波作用密度能够较好地抓住强降水区上空对流层中低层动力场和热力场的扰动特征,并在一定程度上可以有效地表征降水系统的发展演变,因而与地面降水量存在紧密联系。波作用方程各项的计算分析表明,波作用通量散度与拟能量波作用密度局地变化的倾向以及强降水区的变化比较一致,并且在强度上强于纬向基本气流切变项和科氏力做功项,因此波作用通量散度对拟能量波作用密度的局地变化具有重要贡献。

关键词 拟能量波作用密度, 波作用通量, 层结稳定, 不稳定

中图法分类号 P456.7 P458.1

1 引言

稳定性问题是地球流体力学的重要研究内容。从线性、弱非线性到非线性,从保守系统到耗散系统,气象学家对这一问题进行了广泛深入的研究。Kuo(1949)最早把 Rayleigh 定理推广到旋转大气,得到正压大气不稳定的必要条件。Charney(1947)和 Eady(1949)提出了斜压大气稳定性理论。Stone(1966)研究了对称不稳定和亥姆霍兹-开尔文不稳定,建立了用理查逊数表示的稳定性判据。高守亭等(1986,1990)研究了中尺度波动的稳定性问题,并从波流相互作用的角度讨论了急流加速诱导低层锋生的动力学效应。陆维松(1989)考虑摩擦耗散和地形的作用,利用 Serrin-Joseph 能量方法推导了切变基流的非线性稳定性判据。黄弘等(2008)研究了热带气旋螺旋云带的动力学不稳定性。周玉淑等(2003)分析了长江流域暴雨过程中对流不稳定和条件性对称不稳定的有利条件。沈新勇等(2007)讨论了与基本气流方向成任意夹角的纬向线状扰动的斜交不稳定问题,其研究表明,线性切变基本气流中的斜交不稳定扰动主要是重力惯性内波;而非线性二阶切变基本气流中的斜交不稳定扰动,除了包含重力惯性内波之外,还包含涡旋 Rossby 波。丁一汇等(1998)研究了非纬向非平行基流中的对称不稳定问题,得到了存在横向切变时,无旋层结流体中扰动的对称不稳定判据条件。张颖等(1995)利用二维非静力平衡模式对线性和非线性对称不稳定进行数值模拟研究,结果表明当扰动增长到一定程度时非线性平流项的作用不可忽略,会破坏原来的对称环流结构。

Energy-Casimir 方法是 20 世纪 80 年代以来研究流体运动非线性稳定性的重要方法之一,它是在前苏联著名学者 Arnold 20 世纪 60 年代工作基础之上发展起来的。Arnold(1965,1966)把变分原理与先验估计(也称为“积分估计”)方法结合起来,研究了两维、无粘和不可压缩流体的非线性稳定性问

题,建立了两个非线性稳定性判据,即 Arnold 第一定理和第二定理,他所采用的方法被称为 Arnold 方法,也被称为“Energy-Casimir”方法。曾庆存(1989)在 Arnold 方法的基础上发展了一种广义变分方法,对大气动力学中各种基本模式(正压与斜压准地转模式,分层模式和原始方程组等)作了深入系统的研究,建立了一系列非线性稳定性判据。Mu 等(1991,1992,1998,1999)、Liu 等(1994)和 Li 等(1996)深化和发展了 Energy-Casimir 方法,建立起二维正压准地转模式与多层准地转模式非线性稳定性和三维连续层结准地转运动稳定性的判据,并讨论了扰动发展的上界估计与饱和问题。Ren(2000)研究了半地转浅水方程的有限振幅波作用不变量,得到非线性不稳定判据。

Energy-Casimir 方法的另一个重要应用是建立波作用方程,波作用方程也是诊断分析波稳定性的重要工具,其基本思想是:首先通过选取适当形式的 Casimir 函数 C (它是某守恒量 η 的函数,即 $C(\eta)$),使得 Hamilton 不变量 $(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + C(\eta))$ 的扰动量

$$\frac{1}{2}|\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_e|^2 - \frac{1}{2}|\mathbf{v}_0|^2 + C(\eta_0 + \eta_e) - C(\eta_0)$$

可以写成扰动振幅的平方项与一阶扰动散度项之和的形式(下标“0”表示基本态,下标“e”表示偏离基本态的扰动态),然后把 Hamilton 不变量的扰动量代入 Hamilton 不变量倾向方程,推导出如下形式的波作用方程

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = S$$

其中, A 称为波作用密度, \mathbf{F} 称为波作用通量, S 为源汇项。波作用方程是研究波流相互作用和波稳定性的重要工具。对于小振幅扰动, A 和 \mathbf{F} 通常是扰动振幅的平方项,如果此时 A 的符号是确定的,那么上述波作用方程可以表征小振幅扰动能量的局地集中或局地发散,因而可以被用来分析扰动的稳定性。McIntyre 等(1987)从准地转正压位涡方程出发,利用 Energy-Casimir 方法研究了非平行切变基

本气流中有限振幅扰动的波作用守恒方程。Haynes(1988)以 McIntyre 等(1987)的工作为基础,摒弃 Hamilton 动力学系统的约束条件,考虑强迫耗散效应,在等熵坐标系中推导了纬向对称和非纬向对称基本气流中有限振幅扰动波作用方程。

在以往很多研究中,Energy-Casimir 方法主要被用于准地转平衡和静力平衡的干空气动力系统,没有考虑水汽效应,因此获得的研究结果适用于大尺度运动系统,不适用于容易造成暴雨的非静力平衡中尺度系统。如果把 Energy-Casimir 方法应用到中尺度湿空气动力系统,研究中尺度扰动的稳定性,将有助于增加对中尺度系统发展演变本质的认识。基于这种理解,本文利用 Energy-Casimir 方法推导非静力平衡的湿空气拟能量波作用方程,讨论层结稳定的基本态大气中中尺度扰动的稳定性问题。

2 控制方程

对于非绝热和无摩擦的湿空气,考虑地球旋转效应,局地直角坐标系中非静力平衡的控制方程组可以写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla u - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta = \frac{\theta}{c_p T} Q \quad (5)$$

$$\frac{\partial q_v}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla q_v = S_{q_v} \quad (6)$$

$$p = \rho R T (1 + \lambda q_v) \quad (7)$$

$$\theta = T \left(\frac{p_s}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}} \quad (8)$$

其中, $\mathbf{v} = (u, v, w)$ 为三维速度矢量, q_v 为水汽比湿, Q 为非绝热加热率, $\lambda = 0.61$ 为常数, S_{q_v} 为水汽相变源汇项,其他符号为气象上常用符号。利用质量连续性方程(4)、热力学方程(5)和水汽方程(6)以及位温定义(8),可以推导出虚温方程和虚位温方程

$$\frac{\partial \ln T_v}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \ln T_v = -\frac{R}{c_v} \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{c_v} \left(\frac{Q}{T} + \lambda c_p \frac{T}{T_v} S_{q_v} \right) \quad (9)$$

$$\frac{\partial \theta_v}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta_v = \theta_v \left(\frac{Q}{c_p T} + \lambda \frac{T}{T_v} S_{q_v} \right) \quad (10)$$

其中, $T_v = T(1 + \lambda q_v)$ 为虚温, $\theta_v = T_v \left(\frac{p_s}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}}$ 为虚位温。利用动量方程组(1)–(3),质量连续性方程(4)和虚温方程(9),总能量方程可以写为

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \nabla \cdot [\mathbf{v} (\rho E + p)] = \rho \left[(1 + \lambda q_v) Q + \lambda c_p T S_{q_v} \right] \quad (11)$$

其中, $E = \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) + gz + c_v T_v$ 为动能 $[\frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2)]$ 、位能 $[gz]$ 与内能 $[c_v T_v]$ 的总和,称之为总能量密度。方程(11)表明,湿空气总能量是不守恒的,这种非守恒性主要是由非绝热加热(右端第1项)和水汽相变(右端第2项)共同作用引起的。

为了利用 Energy-Casimir 方法推导拟能量波作用方程,我们引入一个 Casimir 函数,并假设它是虚位温的单值函数,即, $C = C(\theta_v)$ 。由虚位温方程可以证明 Casimir 函数满足如下方程

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho C) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} C) = \rho \frac{dC}{d\theta_v} \left(\frac{Q}{c_p T} + \lambda \frac{T}{T_v} S_{q_v} \right) \quad (12)$$

上述 Casimir 方程与 x 方向动量方程和总能量方程合并,可以得到

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left[E - u_0 \left(u - \frac{u_0}{2} \right) + C \right] \right\} + \\ & \nabla \cdot \left\{ \rho \mathbf{v} \left[E - u_0 \left(u - \frac{u_0}{2} \right) + C \right] + \rho \mathbf{v} p \right\} = \\ & u_0 \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \left[(u_0 - u) \left(v \frac{\partial u_0}{\partial y} + w \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) - u_0 f v \right] + \\ & \rho \left(\frac{T_v}{T} \frac{Q}{c_p} + \lambda T S_{q_v} \right) \left(\frac{dC}{d\theta_v} \frac{\theta_v}{T_v} + c_p \right) \end{aligned} \quad (13)$$

其中, $u_0 = u_0(y, z)$ 为纬向基本气流。本文在方程(13)的基础上,采用 Energy-Casimir 方法推导出可以讨论中尺度扰动稳定性的拟能量波作用方程。

3 拟能量波作用方程

假设物理量可以写成基本态与扰动态之和的形式,即

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ p \\ T \\ \rho \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 + u_e \\ v_e \\ w_e \\ p_0 + p_e \\ T_0 + T_e \\ \rho_0 + \rho_e \\ \theta_0 + \theta_e \end{pmatrix} \quad (14)$$

在这里,我们假设经向和垂直基本态速度都为零,即 $v_0=0$ 和 $w_0=0$,其他基本态都是 y 和 z 的函数,并且满足如下关系

$$fu_0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} \quad (15)$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = -\rho_0 g \quad (16)$$

$$p_0 = \rho_0 RT_{v0} \quad (17)$$

$$\theta_{v0} = T_{v0} \left(\frac{p_s}{p_0} \right)^{\frac{R}{c_p}} \quad (18)$$

由于 $\left| \frac{\theta_{ve}}{\theta_{v0}} \right| < 1$, $\left| \frac{\rho_e}{\rho_0} \right| < 1$, $\left| \frac{T_{ve}}{T_{v0}} \right| < 1$ 和 $\left| \frac{p_e}{p_0} \right| < 1$ 在一般情况下都是成立的,所以把变量式(14)代入方程(7)和(8)并分别减去基本态方程(17)和(18),然后略去二阶和二阶以上的扰动量,最后可以得到如下扰动热力学变量之间的线性关系

$$\frac{p_e}{p_0} \approx \frac{\rho_e}{\rho_0} + \frac{T_{ve}}{T_{v0}} \quad (19)$$

$$\frac{\theta_{ve}}{\theta_{v0}} \approx \frac{T_{ve}}{T_{v0}} - \frac{R}{c_p} \frac{p_e}{p_0} \quad (20)$$

由式(19)和(20)消去 $\frac{p_e}{p_0}$ 可以得到如下关于 T_{ve} 的近似表达式

$$T_{ve} \approx \frac{c_p}{c_v} \frac{T_{v0}}{\theta_{v0}} \theta_{ve} + \frac{R}{c_v} \frac{T_{v0}}{\rho_0} \rho_e \quad (21)$$

对 Casimir 函数在 $\theta_v = \theta_{v0}$ 处进行泰勒级数展开,考虑小振幅扰动,略去三阶和三阶以上的扰动,这样 $C(\theta_v)$ 的泰勒级数可以近似地写为

$$C(\theta_v) = C_0 + \frac{dC_0}{d\theta_{v0}} \theta_{ve} + \frac{1}{2} \frac{d^2 C_0}{d\theta_{v0}^2} \theta_{ve}^2 \quad (22)$$

其中, $C_0 = C(\theta_{v0})$ 为基本态 Casimir 函数。把式(14)、(21)和(22)代入表达式 $\rho[E - u_0(u - \frac{u_0}{2}) + C]$,略去三阶扰动后可以得到

$$\begin{aligned} \rho[E - u_0(u - \frac{u_0}{2}) + C] = & \rho_0(c_v T_{v0} + gz + C_0) + \rho_0 \left(\frac{dC_0}{d\theta_{v0}} + \frac{T_{v0} c_p}{\theta_{v0}} \right) \theta_{ve} + \\ & \rho_e(c_p T_{v0} + gz + C_0) + p_0 \left(\frac{\rho_e}{\rho_0} \right)^2 + \\ & \frac{\rho_0}{2} (u_e^2 + v_e^2 + w_e^2 + \frac{d^2 C_0}{d\theta_{v0}^2} \theta_{ve}^2) + \\ & \left(\frac{dC_0}{d\theta_{v0}} + \frac{T_{v0} c_p}{\theta_{v0}} \right) \rho_e \theta_{ve} \end{aligned} \quad (23)$$

根据 Energy-Casimir 方法的基本思想,为了把式

(23)右端写成基本态与二阶扰动态之和的形式,我们选取适当形式的基本态 Casimir 函数 C_0 ,使之满足

$$c_p T_{v0} + gz + C_0 = 0 \quad (24)$$

对上式取关于 z 的偏导数,然后利用等式 $\frac{\partial \theta_{v0}}{\partial z} = \frac{\theta_{v0}}{T_{v0}}$ ($\frac{\partial T_{v0}}{\partial z} + \frac{R}{c_p} g$),可以得到

$$\frac{dC_0}{d\theta_{v0}} = -\frac{c_p T_{v0}}{\theta_{v0}} \quad (25)$$

$$\frac{d^2 C_0}{d\theta_{v0}^2} = \frac{g}{\theta_{v0}} \frac{\partial \theta_{v0}}{\partial z} \quad (26)$$

把式(24)–(26)代入(23)可以得到

$$\rho[E - u_0(u - \frac{u_0}{2}) + C] = A - p_0 \quad (27)$$

其中, $A = \frac{\rho_0}{2} (u_e^2 + v_e^2 + w_e^2 + \frac{g}{\theta_{v0}} \theta_{ve}^2) + p_0 \left(\frac{\rho_e}{\rho_0} \right)^2$

为扰动动能 $[\frac{\rho_0}{2} (u_e^2 + v_e^2 + w_e^2)]$ 、有效位能 $[\frac{\rho_0}{2}$

$-\frac{g}{\theta_{v0}} \theta_{ve}^2]$ 与浮力能 $[p_0 \left(\frac{\rho_e}{\rho_0} \right)^2]$ 的总和,称之为拟能

量波作用密度。值得注意的是,式(27)成立的前提条件是基本态 Casimir 函数 C_0 满足式(24)。

把式(14)和(27)代入方程(13)并略去三阶扰动量,可以得到如下拟能量波作用方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = & -\rho_0 u_e (v_e \frac{\partial u_0}{\partial y} + w_e \frac{\partial u_0}{\partial z}) - \rho u_0 f v_e + \\ & \rho \left(\frac{T_v}{T} \frac{Q}{c_p} + \lambda T S_{qv} \right) \left(\frac{dC}{d\theta_v} \frac{\theta_v}{T_v} + c_p \right) \end{aligned} \quad (28)$$

其中,三维矢量 $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} u_0 A + u_e p_e \\ v_e p_e \\ w_e p_e \end{bmatrix}$ 为二阶扰动量,

称之为拟能量波作用通量。由于波作用方程(28)建立在非静力平衡的动力框架内,所以该方程适用于中尺度扰动系统。从该方程可以看出,湿空气拟能量波作用密度是局地不守恒的,除了拟能量波作用通量散度之外,纬向基本气流切变(式(28)右端第1项),科氏力做功(式(28)右端第2项)以及由非绝热加热和水汽相变所构成的波作用源汇项(式(28)右端第3项)对湿空气拟能量波作用密度的局地变化

都有贡献,其中纬向基本气流切变项和科氏力做功项以及波作用通量中的 $u_0 A$ 既含有扰动量又包含基本气流,因而这些表征扰动涡旋与基本气流耦合的项体现了基本气流对扰动发展演变的影响。

这里需要强调的是,若基本态大气是层结稳定,即 $\frac{\partial \theta_0}{\partial z} > 0$,那么 A 的符号是确定的,始终大于零,它在本质上代表一种扰动能量,当扰动系统发展时, A 增加;当扰动系统衰减时, A 减小。若基本态大气是层结不稳定的,即 $\frac{\partial \theta_0}{\partial z} < 0$,那么 A 的符号不确定,它可以是正数也可以是负数,在扰动系统发展或衰减过程中, A 可以增加也可以减小,这取决于 A 表达式中扰动动能,浮力能与有效位能之差,因此这时 A 不能有效地表征扰动系统的发展演变。

对于基本态层结稳定 ($\frac{\partial \theta_{e0}}{\partial z} > 0$) 的湿空气,拟能量波作用通量的辐合 ($\nabla \cdot \mathbf{F} < 0$) 有利于扰动系统能量的局地增加,促进扰动系统不稳定发展;拟能量波作用通量的辐散 ($\nabla \cdot \mathbf{F} > 0$) 倾向于减少扰动系统能量,抑制扰动系统不稳定发展。如果纬向基本气流为纬向基本西风,那么扰动北风引起的科氏力做功有利于增加拟能量波作用密度,而扰动南风引起的科氏力做功倾向于削弱拟能量波作用密度。纬向基本气流切变项和波作用源汇项对拟能量波作用密度局地变化的影响比较复杂。若垂直于边界的速度分量为零,那么体积分的湿空气拟能量波作用量为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_V A dV = & \iiint_V [u_0 (\frac{\partial \rho_0 u_e v_e}{\partial y} + \frac{\partial \rho_0 u_e w_e}{\partial z}) - \rho u_0 f v_e + \\ & \rho (\frac{T_v}{T} \frac{Q}{c_p} + \lambda T S_{qv}) (\frac{\partial C}{\partial \theta_v} \frac{\theta_v}{T_v} + c_p)] dV \end{aligned} \quad (29)$$

上式用到了如下变换关系

$$\begin{aligned} -\rho_0 u_e (v_e \frac{\partial u_0}{\partial y} + w_e \frac{\partial u_0}{\partial z}) = & \\ -(\frac{\partial \rho_0 u_0 u_e v_e}{\partial y} + \frac{\partial \rho_0 u_0 u_e w_e}{\partial z}) + & \\ u_0 (\frac{\partial \rho_0 u_e v_e}{\partial y} + \frac{\partial \rho_0 u_e w_e}{\partial z}) & \end{aligned}$$

由方程(29)可见,闭合区域内湿空气扰动系统的能量主要来自扰动纬向动量通量散度(式(29)右端第1项)和科氏力做功以及波作用源汇项;在纬向基本

西风背景下,扰动纬向动量通量的辐散有利于扰动发展,而扰动纬向动量通量的辐合抑制扰动的发展。

对于绝热无摩擦的干空气 ($Q=0, S_{qv}=0$),波作用方程(28)变为

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = -\rho_0 u_e (v_e \frac{\partial u_0}{\partial y} + w_e \frac{\partial u_0}{\partial z}) - \rho u_0 f v_e \quad (30)$$

若垂直于边界的扰动速度分量为零,那么闭合区域内干空气拟能量波作用量是非守恒的,闭合区域内扰动系统的发展演变取决于扰动纬向动量通量散度和科氏力做功,即

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_V A dV = & \\ \iiint_V [u_0 (\frac{\partial \rho_0 u_e v_e}{\partial y} + \frac{\partial \rho_0 u_e w_e}{\partial z}) - \rho u_0 f v_e] dV & \end{aligned} \quad (31)$$

由上式可见,当纬向基本气流为常数(即 $u_0=c$)时,闭合区域内拟能量波作用量仍然是不守恒的,其变化仅由科氏力做功项决定;只有在 $u_0=0$ 条件下,闭合区域内干空气拟能量波作用量才是守恒的。

上述分析表明,层结稳定大气中的中尺度扰动系统可以是局地稳定的,也可以是局地不稳定的,这取决于拟能量波作用通量散度,纬向基本气流切变和科氏力做功以及由非绝热加热水汽相变所构成的波作用源汇项的共同作用。

4 个例分析

2003年7月上旬江淮流域发生暴雨和大暴雨,局部地区出现特大暴雨,导致自1991年以来江淮流域最严重的洪涝灾害,给当地造成重大经济损失。本文根据拟能量波作用方程(28)对2003年7月4日00时—5日12时发生在中国江淮流域的强降水过程进行诊断分析,这里采用的资料是利用ARPS模式的ADAS模块读入NCEP/NCAR实时分析资料和常规地面探空观测资料产生的客观分析资料。

2003年7月5日00时观测的6h累积地面强降水区主要位于 30.5° — 34.0° N 纬度带内(图1)。在3km以下高度的对流层低层,雨区两侧为拟能量波作用密度的正高值区,其中南侧的正高值区向北倾斜垂直伸展,在对流层中低层跨过雨区上空,一直倾斜延伸到 38° N 以北的对流层高层。分析表明,雨区南侧对流层低层的正高值区主要是由有效位能异常造成的。

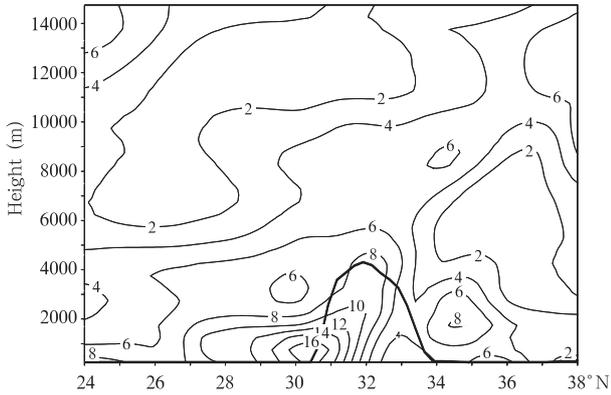


图1 2003年7月5日00时118°—121°E经度带平均的拟能量波作用密度在经向-垂直剖面内的分布(单位: $10 \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2)$) (粗实线为118°—121°E平均的观测6h累积地面降水, 单位: mm)
 Fig.1 The meridional-vertical cross-section of pseudoenergy wave-activity density averaged along 118°—121°E at 00:00 UTC 5 July 2003 (unit: $10 \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2)$). The thick solid line denotes the observed 6-h accumulated surface rainfall averaged along 118°—121°E, unit: mm

从图2可见,强降水区上空3 km以下高度的波作用通量是辐合的,意味着波作用通量有利于增加拟能量波作用密度,促进扰动的发展;波作用通量散度在强降水区上空3—12 km高度范围内垂直伸展,该区域内的波作用通量是辐散的,表明波作用通量倾向于削弱拟能量波作用密度,抑制扰动的发展。纬向基本气流切变项主要表现为负值,不利于拟能量波作用密度的增长,其负值区在雨区上空3 km以上高度倾斜向北垂直伸展,一直延伸到37°N以北的对流层高层;在强度上纬向基本气流切变项弱于波作用通量散度。科氏力作功项的作用在于抑制拟能量波作用密度的增长,其负值区从雨区上空向北倾斜伸展,负高值区出现在34°N以北的对流层高层,该负高值区与基本态高空急流密切相关;相对而言,雨区上空的科氏力作功项略弱于波作用通量散度。

2003年7月5日00时观测的6h累积地面降水基本上呈东北—西南走向的带状分布(图3),雨带主体从四川省西南部经湖北省中部伸展到浙江省中南部的大部分地区,其中强降水中心位于(32°N,

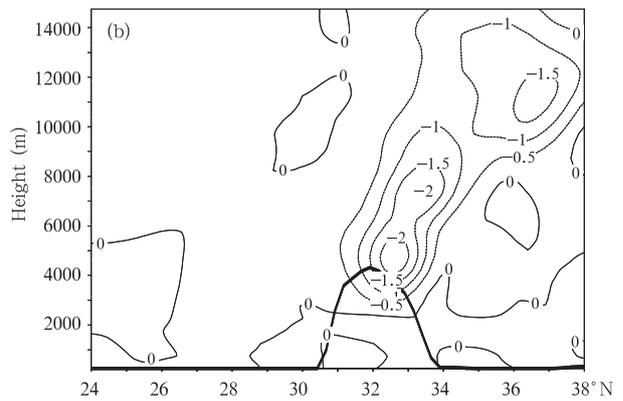
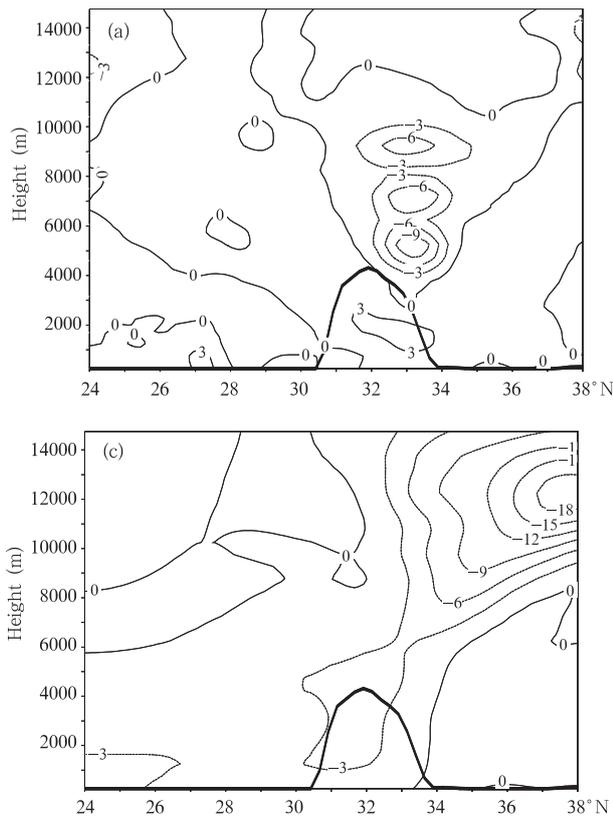


图2 2003年7月5日00时118°—121°E平均的 $-\nabla \cdot F$ (a), $-\rho_0 u_e (v_e \frac{\partial u_0}{\partial y} + w_e \frac{\partial u_0}{\partial z})$ (b) 和 $-\rho_0 f v_e$ (c) 在经向-垂直剖面内的分布 (单位: 10^{-3} Pa/s ; 粗实线为118°—121°E平均的观测6h累积地面降水, 单位: mm)
 Fig.2 The meridional-vertical cross-section of $-\nabla \cdot F$ (a), $-\rho_0 u_e (v_e \frac{\partial u_0}{\partial y} + w_e \frac{\partial u_0}{\partial z})$ (b), and $-\rho_0 f v_e$ (c) averaged along 118°—121°E at 00:00 UTC 5 July 2003 (Unit: 10^{-3} Pa/s). The thick solid line denotes the observation of 6-h accumulated surface rainfall averaged along 118°—121°E (unit: mm)

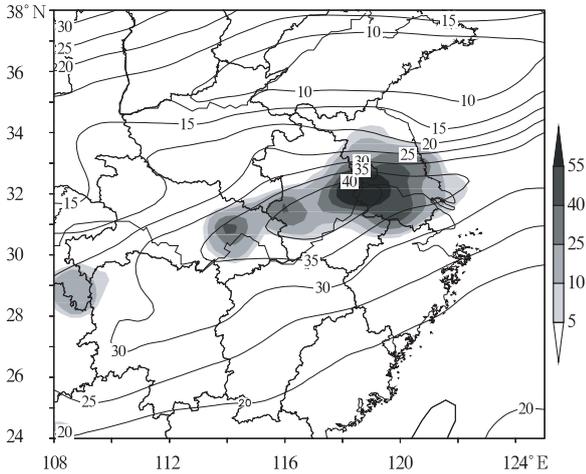


图3 2003年7月5日00时3.25—7.25 km垂直积分的拟能量波作用密度水平分布(单位: 10^4 kg/s^2) (灰度填色区为观测6 h累积地面降水, 单位: mm)

Fig. 3 The horizontal distribution of pseudoenergy wave-activity density vertically integrated from 3.25 to 7.25 km at 00:00 UTC 5 July 2003 (unit: 10^4 kg/s^2), where the grey shaded denotes the observation of 6-h accumulated surface rainfall (unit: mm)

119°E)附近;3.25—7.25 km垂直积分的拟能量波作用密度正高值区也呈现明显的东北—西南向带状,并且在空间位置上与雨带相重叠,其中区域30.5°—32.5°N,116°—120°E内的拟能量波作用密度正高值区与强降水区相对应。另外,雨带上空3.25—7.25 km垂直积分的波作用通量散度,纬向基本气流切变项和科氏力作功项基本上都为负值(图4),并且波作用通量散度和纬向基本气流切变项的负高值区都位于强降水区附近,说明对流层中低层的波作用通量,纬向基本气流切变项和科氏力作功都倾向于减弱拟能量波作用密度,抑制扰动的发展。

从时间演变趋势来看(图5),在4日00:00 UTC—5日12:00 UTC,118°—121°E平均的观测6 h累积地面强降水区从33°—34.5°N逐渐南移至31°—33.5°N,(118°—121°E平均和3.25—7.25 km垂直积分的)拟能量波作用密度的正高值区覆盖强降水区,其时间演变趋势与强降水区的变化基本一致,都随时间缓慢地向南移动。如图6所示,在研究时段内,强降水区基本上被(118°—121°E平均和

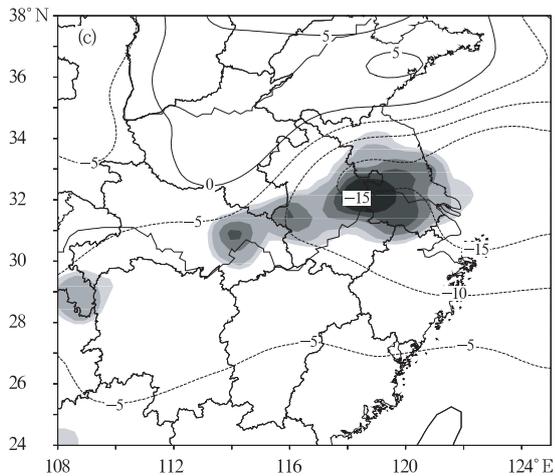
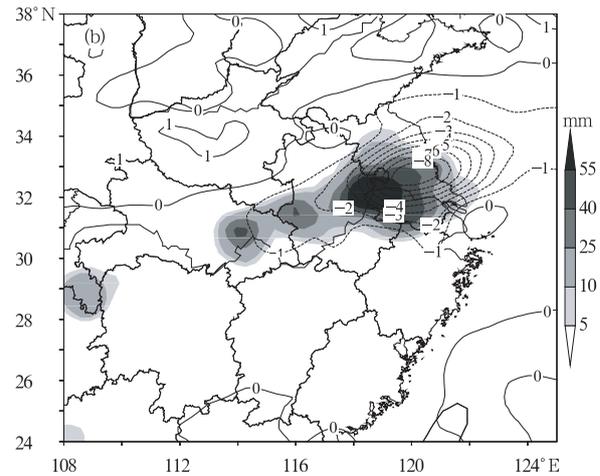
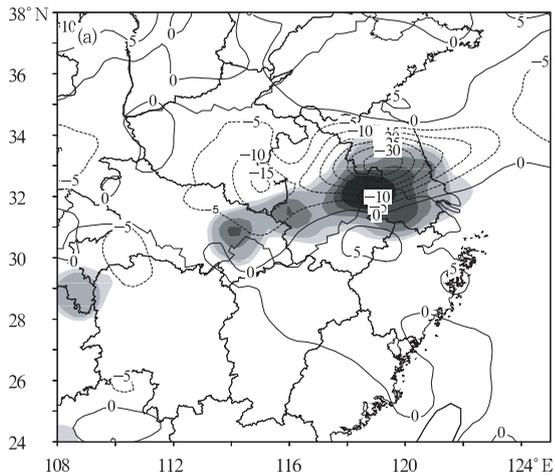


图4 2003年7月5日00时3.25—7.25 km垂直积分的 $-\nabla \cdot F$ (a), $-\rho_0 u_e (v_e \frac{\partial u_0}{\partial y} + w_e \frac{\partial u_0}{\partial z})$ (b)和 $-\rho_0 f v_e$ (c)水平分布(单位: $\text{Pa} \cdot \text{m/s}$) (灰度填色区为观测6 h累积地面降水, 单位: mm)

Fig. 4 The horizontal distribution of $-\nabla \cdot F$ (a), $-\rho_0 u_e (v_e \frac{\partial u_0}{\partial y} + w_e \frac{\partial u_0}{\partial z})$ (b), and $-\rho_0 f v_e$ (c) vertically integrated from 3.25 to 7.25 km at 00:00 UTC 5 July 2003 (unit: $\text{Pa} \cdot \text{m/s}$).

The grey shade denotes the observation of 6-h accumulated surface rainfall (unit: mm)

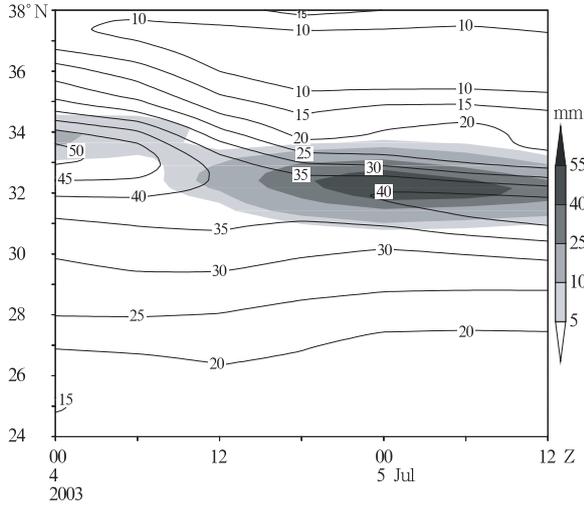


图5 2003年7月4日00时UTC—5日12时UTC 118°—121°E 平均和 3.25—7.25 km 垂直积分的拟能量波作用密度在时间-垂直剖面内的分布(单位: 10^4 kg/s^2) (灰度填色区为 118°—121°E 平均的观测 6 h 累积地面降水, 单位: mm)

Fig. 5 The temporal-vertical cross-section of pseudoenergy wave-activity density averaged along 118°—121°E and vertically integrated from 3.25 to 7.25 km in the period of 00:00 UTC 4—12:00 UTC 5 July 2003 (unit: 10^4 kg/s^2). The grey shade denotes the observation of 6-h accumulated surface rainfall zonally averaged over the longitude belt of 118°—121°E (unit: mm)

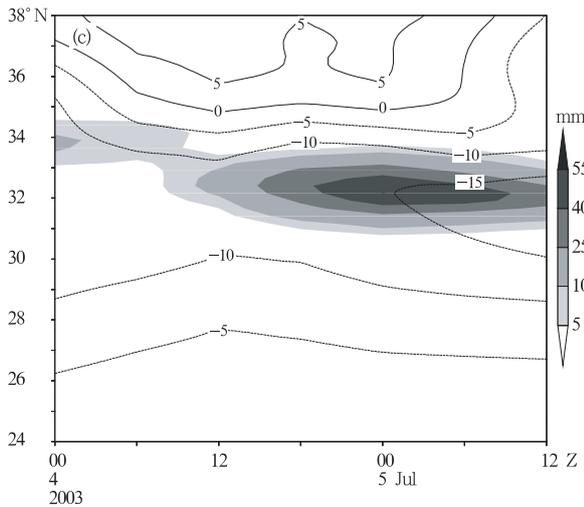
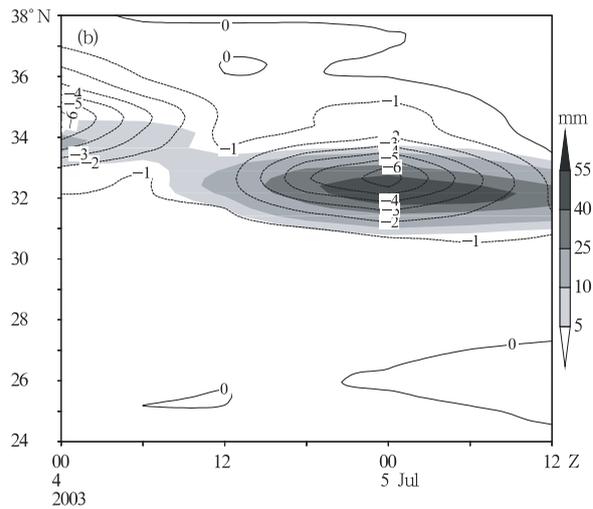
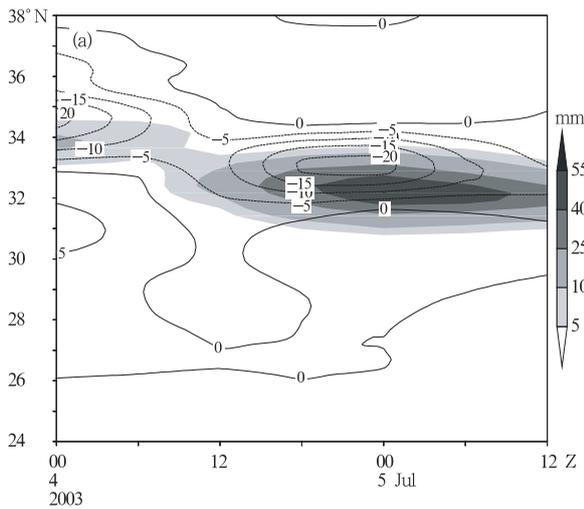


图6 2003年7月4日00时—5日12时 118°—121°E 平均和 3.25—7.25 km 垂直积分的 $-\nabla \cdot \mathbf{F}(a)$, $-\rho_0 u_e (v_e \frac{\partial u_0}{\partial y} + w_e \frac{\partial u_0}{\partial z})$ (b) 和 $-\rho_0 f v_e$ (c) 在经向-垂直剖面内的分布(单位: $\text{Pa} \cdot \text{m/s}$) (灰度填色区为 118°—121°E 平均的观测 6 h 累积地面降水, 单位: mm)

Fig. 6 The temporal-vertical cross-section of $-\nabla \cdot \mathbf{F}(a)$, $-\rho_0 u_e (v_e \frac{\partial u_0}{\partial y} + w_e \frac{\partial u_0}{\partial z})$ (b), and $-\rho_0 f v_e$ (c) averaged along 118°—121°E and vertically integrated from 3.25 to 7.25 km in the period of 00:00 UTC 4—12:00 UTC 5 July 2003 (unit: $\text{Pa} \cdot \text{m/s}$). The grey shade denotes the observation of 6-h accumulated surface rainfall averaged along 118°—121°E (unit: mm)

3.25—7.25 km 垂直积分的)波作用通量散度、纬向基本气流切变项和科氏力作功项的负值区所覆盖,

这与拟能量波作用密度正值区的时间演变倾向相吻合;波作用通量散度和纬向基本气流切变项的负

高值区与强降水区的演变趋势比较一致,并且在强降水区附近,波作用通量散度在强度上强于纬向基本气流切变项和科氏力作功项。

从上述诊断分析可以看出,拟能量波作用密度能够较好地抓住强降水区上空对流层中低层动力场和热力场的扰动特征,因而与地面降水存在紧密联系,并在一定程度上可以有效地表征降水系统的发展演变。另外,在时间演变趋势上,波作用通量散度与拟能量波作用密度局地变化的倾向和强降水区的变化比较一致,并且在强度上强于纬向基本气流切变项和科氏力作功项,这说明波作用通量散度对拟能量波作用密度的局地变化具有重要贡献。

5 结论与讨论

实际大气通常满足层结稳定的条件,但是中尺度扰动系统还是可以迅速地发展,这是为什么?这能否从波流相互作用的动力学观点进行解释和讨论?本文针对这一问题利用 Energy-Casimir 方法推导了适合描述中尺度扰动发展演变的非静力平衡拟能量波作用方程,并讨论了层结稳定大气中中尺度扰动系统发展演变的有利条件。理论分析表明,对于层结稳定的湿空气,拟能量波作用通量散度,纬向基本气流切变和科氏力作功以及由非绝热加热和水汽相变所构成的源汇项对扰动系统的发展演变都有贡献;而对于层结稳定的干空气,在静止基本气流的背景下,扰动系统的发展演变完全取决于拟能量波作用通量散度。

诊断分析结果表明,对流层中低层拟能量波作用密度与观测的 6 h 累积地面降水的时间演变趋势比较一致,这说明对流层中低层的拟能量波作用密度在一定程度上可以有效地表征降水系统的发展演变。虽然对流层中低层的波作用通量散度、纬向基本气流切变和科氏力作功都倾向于削弱拟能量波作用密度的局地变化,但在强降水区波作用通量散度对拟能量波作用密度局地变化的影响比较显著。

References

- Arnol'd V I. 1965. Conditions for nonlinear stability of stationary plane curvilinear flows of an ideal fluid. Dokl Akad Nauk USSR, 162: 975-978. English Transl: Soviet Math, 6: 773-777
- Arnol'd V I. 1966. On a priori estimate in the theory of hydrodynamic stability. Izv Vyssh Uchebn Zaved Matematika, 54: 3-5.
- English Transl: Am Math Soc Transl, Series 2, 79: 267-269
- Charney J G. 1947. The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current. J Meteor, 4: 135-163
- Ding Yihui, Shen Xinyong. 1998. Symmetric instabilities of non-zonal and non-parallel mean flows. Acta Meteor Sinica (in Chinese), 56(2): 154-165
- Eady E T. 1949. Long wave and cyclone waves. Tellus, 1: 33-52
- Gao Shouting, Sun Shuqing. 1986. Determining the instability of mesoscale perturbations with richardson number. Scientia Atmospherica Sinica (in Chinese), 2: 171-182
- Gao Shouting, Zhou Yushu. 2001. The instability of the vortex sheet along the horizontal shear line. Acta Meteor Sinica (in Chinese), 59: 393-404
- Haynes P H. 1988. Forced, dissipative generalizations of finite-amplitude wave activity conservation relations for zonal and non-zonal basic flows. J Atmos Sci, 45: 2352-2362
- Huang Hong, Zhang Ming. 2008. Unstable dynamical properties of spiral bands in tropical cyclones. Acta Meteor Sinica (in Chinese), 66(1): 81-89
- Kuo H L. 1949. Dynamic instability of two-dimensional non-divergent flow in a barotropic atmosphere. J Meteor, 6: 105-122
- Li Yang, Mu Mu. 1996. Baroclinic instability in the generalized Phillips model. Part I: Two-layer model. Adv Atmos Sci, 13: 127-137
- Liu Y M, Mu Mu. 1994. Arnol'd's second nonlinear stability theorem for general multi layer quasi-geostrophic model. Adv Atmos Sci, 11: 36-42
- Lu Weisong. 1989. On the nonlinear stability of shearing-basic flow in the frictional-dissipation atmosphere. Acta Meteor Sinica (in Chinese), 47(4): 412-423
- McIntyre M E, Shepherd T G. 1987. An exact local conservation theorem for finite amplitude disturbances to non-parallel shear flows, with remarks on Hamiltonian structure and on Arnol'd's stability theorems. J Fluid Mech, 181: 527-565
- Mu Mu, Vladimirov V, Wu Yong-Hui. 1999. Energy-Casimir and energy-lagrange methods in the study of nonlinear symmetric stability problems. J Atmos Sci, 56: 400-411
- Mu Mu, Wang X Y. 1992. Nonlinear stability criteria for the motion of three-dimensional quasi-geostrophic flow on a beta-plane. Nonlinearity, 5: 353-371
- Mu Mu, Zeng Qingcun. 1991. Criteria for the nonlinear stability of three-dimensional quasi-geostrophic motions. Adv Atmos Sci, 8: 1-10
- Mu Mu. 1991. Nonlinear stability criteria for motions of multi layer quasi-geostrophic flow. Sci China B, 34: 1516-1528
- Mu Mu. 1992. Nonlinear stability of two-dimensional quasi-geostrophic motions. Geophys Astrophys Fluid Dyn, 65: 57-76
- Mu Mu. 1998. Energy casimir method in the study of nonlinear stability of the atmospheric motions. Advances in Mechanics (in Chinese), 28: 235-249

- Ren S. 2000. Finite-amplitude wave-activity invariants and nonlinear stability theorems for shallow water semigeostrophic dynamics. *J Atmos Sci*, 57: 3388-3397
- Shen Xinyong, Ni Yunqi, Ding Yihui, et al. 2007. Wave properties of mesoscale obliquely crossing instability and its numerical simulation. *Acta Meteor Sinica (in Chinese)*, 65: 825-836
- Stone P H. 1966. On non-geostrophic baroclinic stability. *J Atmos Sci*, 23: 390-400
- Zeng Q C. 1989. Variational principle of instability of atmospheric motion. *Adv Atmos Sci*, 6: 137-172
- Zhang Ying, Zhang Ming. 1995. The numerical research of symmetric instability. *Acta Meteor Sinica (in Chinese)*, 53: 225-231
- Zhou Yushu, Deng Guo, Huang Yihong. 2003. Analysis on instability condition during a torrential rain over Yangzi river basin. *Acta Meteor Sinica (in Chinese)*, 61(3): 323-333
- 丁一汇, 沈新勇. 1998. 非纬向非平行基流中的对称不稳定. *气象学报*, 56: 154-165
- 高守亭, 孙淑清. 1986. 应用理查逊数判别中尺度波动的不稳定. *大气科学*, 2: 171-182
- 高守亭, 周玉淑. 2001. 水平切变线上涡层不稳定理论. *气象学报*, 59: 393-404
- 黄泓, 张铭. 2008. 热带气旋螺旋云带动力不稳定的性质. *气象学报*, 66: 81-89
- 陆维松. 1989. 摩擦耗散大气中切变流的非线性稳定性. *气象学报*, 47: 412-423
- 穆穆. 1998. 大气运动非线性稳定性研究中的能量-Casimir 方法. *力学进展*, 28: 235-249
- 沈新勇, 倪允琪, 丁一汇等. 2007. 中尺度斜交不稳定的波动性质及其数值模拟. *气象学报*, 65: 825-836
- 张颖, 张铭. 1995. 线性与非线性对称不稳定的数值试验. *气象学报*, 53: 225-231
- 周玉淑, 邓国, 黄仪虹. 2003. 长江流域一次暴雨过程中的不稳定条件分析. *气象学报*, 61: 323-333

附中文参考文献

丁一汇, 沈新勇. 1998. 非纬向非平行基流中的对称不稳定. *气象学报*