第 64 卷第 3 期　　气 象 学 报　　Vol. 64, No. 3
2006 年 6 月　　ACTA METEOROLOGICA SINICA　　June 2006

地-气耦合动力系统的研究*

莫嘉琪[1,2]　王　辉[3]　林万涛[4]

1 安徽师范大学数学系，芜湖，241000

2 上海高校计算科学 E-研究院上海交通大学研究所，上海 200240

3 中国气象科学研究院，北京，100081

4 LASG,中国科学院大气物理研究所，北京，100029

摘　要

研究了一类地-气耦合系统的非线性模型，目的是创建一个地-气振子模型的非线性方程的渐近求解方法，利用变分迭代方法，构造了对应问题解的近似展开式。即首先引入一组泛函和计算出它们的变分，并算出 Lagrange 乘子，其次，决定变分迭代，最后得到原地-气振子模型非线性问题解的一致收敛的近似展开式。

关键词：非线性，地-气耦合，动力系统。

1　引　言

关于大气动力系统及其可预报性的问题，已有很多研究[1-8]。Shukla[3]对失控平均的动力学可预报性的研究指出，月平均的预报是可行的。但是，许多关于可预报性及可预报期限的研究大都基于数值试验的结果。然而，初值有无限多个，且系统个别状态的长期行为是不确定的，这就给研究工作带来了一定的局限性。因此对问题的研究对象和方法提出了较进一步的要求。莫嘉琪、林万涛等[9-20]也曾研究了一类大气物理、海洋气候、动力系统等领域中的问题。文中从数学解析的方法出发，来研究一类简单的地-气耦合气候非线性动力系统机制的模型。

地-气耦合相互作用本身是一个非线性的物理过程，因此只用线性模型去研究它的过程的内在机理是不够理想的。本文是对地-气耦合相互作用，根据一些气候系统中的经验数据建立一个简单地-气耦合非线性动力系统，并以此出发进行探讨。这样的探讨力求所得计算结果更接近真实情况。并且提供了由所得到的结果进行短期、中期气象预报和进一步去研究其他感兴趣的一些大气物理现象的方法。

近来，许多学者研究了非线性问题的近似理论[21-28]。近似方法不断被发展和优化，包括平均法、边界层法、匹配渐近展开法和多重尺度法等。本文是利用简单而有效的广义泛函-变分迭代方法[29]来求解一类大气物理非线性系统。

2　地-气耦合模型

我们来考虑一个大气快变量和下垫面慢变量的地-气非线性耦合模式[5]

$$\frac{dX_1}{dt}=a_{11}X_1+[(a_{12}-\sigma_1X_2)X_2+(a_{13}-\sigma_1X_3)X_3+b_1]$$

$$\frac{dX_2}{dt}=a_{22}X_2-[(a_{12}-\sigma_1X_2)X_1-(a_{23}-\sigma_2X_1)X_3+b_2]$$

$$\frac{dX_3}{dt}=a_{33}X_3-[(a_{13}-\sigma_1X_3)X_1+(a_{23}-\sigma_2X_1)X_2+b_3]$$

$$\frac{dT_i}{dt}=\sum_{k=1}^{3}[c_{ik}T_k+d_{ik}X_k]+g_i\quad i=1,2,3$$

---

* 初稿时间：2005 年 5 月 21 日；修改稿时间：2005 年 8 月 2 日。

资助课题：国家自然科学基金项目(90111011 和 10471039)，国家重点基础研究发展计划项目(2003CB415101-03 和 2004CB418304)，中国科学院创新方向性项目(KZCX3-SW-221) 和上海市教育委员会 E-研究院建设计划项目(E03004)。

作者简介：莫嘉琪，男，1937 年生，教授，1960 年毕业于复旦大学，研究方向：应用数学，数学物理，生物数学，大气物理，非线性问题等。E-mail：mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn

其中 $X_i, i=1,2,3$ 为无量纲大气快变量，$a_{ii}, c_{ij}, d_{ij}, i,j=1,2,3$ 和 $\sigma_i, i=1,2$ 为相关的比例系数，$a_{ij}(T_1,T_2,T_3),(i\neq j), b_i(T_1,T_2,T_3), i,j=1,2,3$ 为无量纲下垫面慢变量 $T_i, i=1,2,3$ 的充分光滑函数；$g_i, i=1,2,3$ 为与太阳辐射有关的已知数。上述系统构成了简单的地-气耦合模式。不失一般性，我们下面只讨论相关的比例系数与下垫面慢变量存在如下的特殊关系：$a_{12}=a_1T_1, a_{13}=a_2T_2, a_{23}=a_3T_3, b_i=0, i=1,2,3$，其中 $a_i, i=1,2,3$ 为常数。因此，上述系统便为非线性地-气耦合模式

$$\frac{dX_1}{dt}=a_{11}X_1+[(a_1T_1-\sigma_1X_2)X_2+(a_2T_2-\sigma_1X_3)X_3] \tag{1}$$

$$\frac{dX_2}{dt}=a_{22}X_2-[(a_1T_1-\sigma_1X_2)X_1-(a_3T_3-\sigma_2X_1)X_3] \tag{2}$$

$$\frac{dX_3}{dt}=a_{33}X_3-[(a_2T_2-\sigma_1X_3)X_1+(a_3T_3-\sigma_2X_1)X_2] \tag{3}$$

$$\frac{dT_i}{dt}=\sum_{k=1}^{3}[c_{ik}T_k+d_{ik}X_k]+g_i \quad i=1,2,3 \tag{4}$$

现在求解式(1)—(4)的初值

$$X_i|_{t=0}=X_i(0) \quad i=1,2,3 \tag{5}$$

$$T_i|_{t=0}=T_i(0) \quad i=1,2,3 \tag{6}$$

下的解。

3　广义泛函-变分方法

为了得到耦合问题式(1)—(6)的近似解，现引入一组泛函 $F_{ij}, i=1,2, j=1,2,3$

$$F_{11}=X_1-\int_0^t\lambda_{11}\{\frac{dX_1}{d\tau}-a_{11}X_1-[(a_1\overline{T}_1-\sigma_1\overline{X}_2)\overline{X}_2+(a_2\overline{T}_2-\sigma_1\overline{X}_3)\overline{X}_3]\}d\tau \tag{7}$$

$$F_{12}=X_2-\int_0^t\lambda_{12}\{\frac{dX_2}{d\tau}-a_{22}X_2+[(a_1\overline{T}_1-\sigma_1\overline{X}_2)\overline{X}_1-(a_3\overline{T}_3-\sigma_2\overline{X}_1)\overline{X}_3]\}d\tau \tag{8}$$

$$F_{13}=X_3-\int_0^t\lambda_{13}\{\frac{dX_3}{d\tau}-a_{33}X_3+[(a_2\overline{T}_1-\sigma_1\overline{X}_3)\overline{X}_1+(a_3\overline{T}_3-\sigma_2\overline{X}_1)\overline{X}_2]\}d\tau \tag{9}$$

$$F_{2j}=T_j-\int_0^t\lambda_{2j}\{\frac{dT_j}{d\tau}-c_{jj}T_j-[\sum_{k=1,k\neq j}^{3}c_{jk}T_k+\sum_{k=1}^{3}d_{jk}\overline{X}_k]-g_j\}d\tau \quad j=1,2,3 \tag{10}$$

其中 $\overline{X}_i, \overline{T}_i, i=1,2,3$ 分别为 $X_i, T_i, i=1,2,3$ 的限制变量，$\lambda_{ij}, i=1,2, j=1,2,3$ 为对应的 Lagrange 乘子。

泛函式(7)—(10)的变分 $\delta F_{ij}, i=1,2, j=1,2,3$ 分别为

$$\delta F_{1j}=\delta X_j-(\lambda_{1j}\delta X_j)|_{\tau=t}+\int_0^t(\frac{\partial\lambda_{1j}}{\partial\tau}-a_{jj}\lambda_{1j})\delta X_j d\tau \quad j=1,2,3 \tag{11}$$

$$\delta F_{2j}=\delta T_j-(\lambda_{2j}\delta T_j)|_{\tau=t}+\int_0^t(\frac{\partial\lambda_{2j}}{\partial\tau}-c_{jj}\lambda_{2j})\delta T_j d\tau \quad j=1,2,3 \tag{12}$$

令 $\delta F_{ij}=0, i=1,2, j=1,2,3$。于是由式(11)，(12)有

$$\frac{d\lambda_{1j}}{d\tau}=a_{jj}\lambda_{1j},\ \frac{d\lambda_{2j}}{d\tau}=c_{jj}\lambda_{2j} \quad \tau<t, j=1,2,3$$

及

$$\lambda_{ij}(t)=1 \quad i=1,2 \quad j=1,2,3$$

这时得到

$$\begin{aligned}\lambda_{1j}&=\exp[-a_{jj}(t-\tau)]\\ \lambda_{2j}&=\exp[-c_{jj}(t-\tau)] \quad j=1,2,3\end{aligned} \tag{13}$$

由式(13)和式(7)—(10)，构造如下广义变分迭代：

$$(X_1)_{n+1}=(X_1)_n-\int_0^t\exp[-a_{11}(t-\tau)]\{\frac{d(X_1)_n}{d\tau}-a_{11}(X_1)_n-[(a_1(T_1)_n-\sigma_1(X_2)_n)(X_2)_n+(a_2(T_2)_n-\sigma_1(X_3)_n)(X_3)_n]\}d\tau \tag{14}$$

$$(X_2)_{n+1}=(X_2)_n-\int_0^t\exp[-a_{22}(t-\tau)]\{\frac{d(X_2)_n}{d\tau}-a_{22}(X_2)_n+[(a_1(T_1)_n-\sigma_1(X_2)_n)(X_1)_n-(a_3(T_3)_n-\sigma_2(X_1)_n)(X_3)_n]\}d\tau \tag{15}$$

$$(X_3)_{n+1}=(X_3)_n-\int_0^t\exp[-a_{33}(t-\tau)]\{\frac{d(X_3)_n}{d\tau}-a_{33}(X_3)_n+[(a_2(T_1)_n-\sigma_1(X_3)_n)(X_1)_n+(a_3(T_3)_n-\sigma_2(X_1)_n)(X_2)_n]\}d\tau \tag{16}$$

$$(T_j)_{n+1}=(T_j)_n-\int_0^t\exp[-c_{jj}(t-\tau)]\{\frac{d(T_j)_n}{d\tau}-\sum_{k=1}^{3}[c_{jk}(T_k)_n+d_{jk}(X_k)_n]-g_j\}d\tau \quad j=1,2,3 \tag{17}$$

现首先选取零次迭代$(X_i)_0$，$(T_i)_0$，$i=1,2,3$，为如下初值

$$\frac{\mathrm{d}X_i}{\mathrm{d}t}=a_{ii}X_i \quad i=1,2,3$$

$$\frac{\mathrm{d}T_i}{\mathrm{d}t}=\sum_{k=1}^{3}[c_{ik}T_k+d_{ik}X_k]+g_i \quad i=1,2,3$$

$$X_i\big|_{t=0}=X_i(0) \quad i=1,2,3$$

$$T_i\big|_{t=0}=T_i(0) \quad i=1,2,3$$

的解。不难得到上述线性的解为

$$(X_i)_0=X_i(0)\exp(a_{ii}t) \quad i=1,2,3$$

$$(T_i)_0=\sum_{j=1}^{3}[r_{ij}C_j\exp(c_{jj}t)+D_{ij}\exp(a_{jj}t)]+D_i \quad i=1,2,3$$

其中

$$r_{1j}=1$$

$$r_{2j}=-\frac{\begin{vmatrix} c_{11}-c_{jj} & c_{13} \\ c_{21} & c_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{12} & c_{13} \\ c_{22}-c_{jj} & c_{23} \end{vmatrix}}$$

$$r_{3j}=-\frac{\begin{vmatrix} c_{12} & c_{13}-c_{jj} \\ c_{22}-c_{jj} & c_{21} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{12} & c_{13} \\ c_{22}-c_{jj} & c_{23} \end{vmatrix}} \quad j=1,2,3$$

$$C_i=\frac{\Delta_{ii}}{\Delta_i} \quad i=1,2,3$$

$$\Delta_i=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_{i1}=\begin{vmatrix} G_1 & 1 & 1 \\ G_2 & r_{22} & r_{23} \\ G_3 & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{i2}=\begin{vmatrix} 1 & G_1 & 1 \\ r_{21} & G_2 & r_{23} \\ r_{31} & G_2 & r_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_{i3}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & G_1 \\ r_{21} & r_{22} & G_2 \\ r_{31} & r_{32} & G_3 \end{vmatrix}$$

$$D_{ij}=-\frac{\Delta_{ij}}{\overline{\Delta}_i}X_i(0), \quad D_i=-\frac{\Delta'_i}{\Delta},$$

$$G_i=T_i(0)-\sum_{j=1}^{3}D_{ij}-D_i \quad i,j=1,2,3$$

$$\overline{\Delta}_j=\begin{vmatrix} c_{11}-a_{jj} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22}-a_{jj} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33}-a_{jj} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{1j}=\begin{vmatrix} d_{1j} & c_{12} & c_{13} \\ d_{2j} & c_{22}-a_{jj} & c_{23} \\ d_{3j} & c_{32} & c_{33}-a_{jj} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{2j}=\begin{vmatrix} c_{11}-a_{jj} & d_{1j} & c_{13} \\ c_{21} & d_{2j} & c_{23} \\ c_{31} & d_{3j} & c_{33}-a_{jj} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{3j}=\begin{vmatrix} c_{11}-a_{jj} & c_{12} & d_{1j} \\ c_{21} & c_{22}-a_{jj} & d_{2j} \\ c_{31} & c_{32} & d_{3j} \end{vmatrix}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta'_1=\begin{vmatrix} g_1 & c_{12} & c_{13} \\ g_2 & c_{22} & c_{23} \\ g_3 & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta'_2=\begin{vmatrix} c_{11} & g_1 & c_{13} \\ c_{21} & g_2 & c_{23} \\ c_{31} & g_3 & c_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta'_3=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & g_1 \\ c_{21} & c_{22} & g_2 \\ c_{31} & c_{32} & g_3 \end{vmatrix}$$

再由迭代关系式(14)—(17)，进一步可得到一组序列$\{(X_i)_n,(T_i)_n,i=1,2,3\}$。对于固定的$n$，它就是非线性耦合系统式(1)—(6)的解的第$n$次近似式。

4 结 语

(1) 利用近似解序列$\{(X_i)_n,(T_i)_n,i=1,2,3\}$为基础，可以对相应的气候作短期、中期，甚至是较长期的气候预报。

(2) 上述广义泛函-变分方法是一个近似的解析方法，它不同于一般的数值近似方法。用广义泛函-变分方法得到的近似解的表示式能够继续进行数学分析的解析运算。于是，由相应的近似解的表示式，我们能够继续用解析运算来研究所考虑的地区相关物理量的各种定性和定量方面的性态。本文中不再予以进一步讨论。

参考文献

[1] McPhaden M J, Zhang D. Slowdown of the meridional overturning circulation in the upper Pacific Ocean. Nature, 2002, 415: 603-608

[2] Gu Daifang, Philander S G H. Interdecadal climate fluctuations that depend on exchanges between the tropics and extratropics. Science, 1997, 275: 805-807

[3] Shukla J. Dynamical predictability of monthly means. J Atmos Sci, 1981, 38: 2547-2372

[4] Hsu C S. A theort of cell-to cell mapping dynamical systems. ASME J Appl Mech, 1980, 47: 931-939

[5] 吴迪生，邓文珍，詹进源等. 1986—1987年El Niño期间热带西太平洋及南海海气热量交换研究. 气象学报，1999，57

(1): 121-128
Wu Disheng, Deng Wenzhen, Zhan Jinyuan, et al. Research on air sea heat exchange during the El Niño event of 1986－1987 in Western Tropical Pacific Ocean and the South China Sea. Acta Meteor Sinica(in Chinese), 1999, 57 (1): 121-128

[6] 范新岗,张红亮,丑纪范.气候系统可预报性的全局研究.气象学报,1999, 57 (2):190-197
Fan Xingang, Zhang Hongliang, Chou Jifan. Global study on climate predictability. Acta Meteor Sinica(in Chinese), 1999, 57 (2): 190-197

[7] 梁建茵,林爱兰,李春辉. 南海及周边地区 TBB 季节内震荡及其与 ENSO 的联系.气象学报,2005, 63 (3): 267-277
Liang Jianyin, Lin Ailan, Li Chunhui. ISOs of TBB over SCS and vicinity as well as the relationship with ENSO. Acta Meteor Sinica(in Chinese), 2005, 63 (3): 267-277

[8] 巢纪平,蔡怡. ENSO 事件中次表层海温距平在 10°N 附近向西传播的机理. 气象学报,2005, 63 (4): 385-390
Chao Jiping, Cao Yi. The mechanism of subsurface sea temperature anomaly transmitted westward about 10°N in ENSO events. Acta Meteor Sinica(in Chinese), 2005, 63 (4): 385-390

[9] Mo Jiaqi, Lin Wantao, Zhu Jiang. The perturbed solution of sea-air oscillator for ENSO model. Progress in Natural Sci, 2004, 14(6): 550-552

[10] Mo Jiaqi, Lin Wantao, Zhu Jiang. A varitional method for studying the ENSO mechanism. Progress in Natural Sci, 2004, 14 (12): 1126-1128

[11] 莫嘉琪,林万涛. 一类厄尔尼诺海-气振子机理的同伦解法. 物理学报,2004, 53 (4):996-998
Mo Jiaqi, Lin Watao. Perturbed solution for the ENSO nonlinear model. Acta Phys Sinica(in Chinese), 2004, 53 (4): 996-998

[12] 莫嘉琪,林万涛,朱江.海-气振子 ENSO 模型的同伦解法.物理学报,2004, 53(10):3245-3247
Mo Jiaqi, Lin Wantao, Zhu Jiang. The homotopic solving method of sea-air oscillator for ENSO model. Acta Phys Sinica(in Chinese), 2004, 53 (10): 3245-3247

[13] 莫嘉琪,林万涛.一类厄尔尼诺海-气振子机理的同伦解法.物理学报,2005, 54 (3):993-995
Mo Jiaqi, Lin Wantao. The homotopic solving method for a class of El Nino sea-air oscillator mechanism. Acta Phys Sinica (in Chinese), 2005, 54 (3): 993-995

[14] 莫嘉琪,林万涛.厄尔尼诺大气物理机理的变分迭代解法.物理学报,2005, 54 (3):1081-1083
Mo Jiaqi, Lin Wantao. A variational iteration method for solving El Nino mechanism of atmospheric physics. Acta Phys Sinica(in Chinese), 2005, 54 (3): 1081-1083

[15] Mo Jiaqi, Lin Wantao. Homotopic solving method of equatorial eastern Pacific for El Nino/La Nino southern oscilation mechanism. China Phys, 2005, 14 (5). (to appear)

[16] Lin Wantao, Mo Jiaqi. Asymptotic behavior of perturbed solution for simple coupled ocean-atmosphere model for ENSO. Chinese Sci Bull, 2004, 48 II: 5-7

[17] Lin Wantao, Ji Zhongzhen, Wang Bin, et al. A new method for judging the computational stability of the difference schemes of non-linear evolution equations. Chinese Sci Bull, 2000, 45 (15): 1358-1361

[18] Lin Wantao, Ji Zhongzhen, Wang Bin. Forced dissipative nonlinear evolution equation and complete square conservative difference scheme. Acta Aerodynamica Sinica, 2001, 19 (3): 348-353

[19] Lin Wantao, Ji Zhongzhen, Wang Bin. A comparative analysis of computational stability for linear and non-linear evolution equations. Adv Atmos Sci, 2002, 19 (4): 699-704

[20] Lin Wantao, Ji Zhongzhen, Wang Bin, et al. A comparative study of conservative ang non-conservative scheme. Progress Natural Sci, 2002, 12 (12): 1326-1328

[21] de Jager E M, Jiang Furu. The Theory of Singular Perturbation. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1996

[22] Zhang Fu. Coexistence of a pulse and multiple spikes and transition layers in the standing waves of a reaction-diffusion system. J Diff Eqns, 2004, 205 (1): 77-155

[23] Hwangm S. Kinetic decomposition for singularly perturbed higher order partial differential equations. J Diff Eqns, 2004, 200 (2): 191-205

[24] Perjan A. Linear singular perturbation of hyperbolic-parabolic type. Bulletinul Acad De Stiinte, 2003, 42 (2): 95-122

[25] Hamouda M. Interior layer for second-order singular equations. Applicable Anal, 2003, 81: 837-866

[26] Akhmetov D R, Lavrentievm Jr M M, Spigler R. Singular perturbations for certain partial differential equations without boundary-layers. Asymptotic Anal, 2003, 35: 65-89

[27] Bell D C, Deng B. Singular perturbation of N-front traveling waves in the Fitzhugh-Nagumo equations. Nonlinear Anal Real World Appl, 2003, 3 (4): 515-541

[28] Adams K L, King J R, Tew R H. Beyond-all-orders effects in multiple-scales symptotic: Travelling-wave solutions to the Kuramoto-Sivashinsky equation. J Engineering Math, 2003, 45: 197

[29] 何吉欢.工程与科学计算中的近似非线性分析方法. 郑州:河南科学技术出版社, 2002. 160pp
He Jihuan. Analyse Method of Approximate Non-linear in Engineer and Science Calculation. Zhengzhou: Henan Sciteah Press, 2002. 160pp

STUDY FOR EARTH-ATMOSPHERE COUPLED DYNAMICAL SYSTEM

Mo Jiaqi[1,2] Wang Hui[3] Lin Wantao[4]

1 *Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu* 241000

2 *Division of Computational Science, E-Institutes of Shanghai Universities at SJTU, Shanghai* 200240

3 *Chinese Academy of Meteorological Sciences, Beijing* 100081

4 *LASG, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100029

Abstract

A class of nonlinear coupling system for earth-atmosphere oscillator model is studied. The aim is to create an asymptotic solving method of nonlinear equation for the earth-atmosphere oscillator model. Using the variational iteration method, the approximate expansions of the solution of corresponding problem are constructed. That is, firstly, introducing a set of functionals and culculating their variationals, the Lagrange multiplicators are computed, and then the variational iteriation is defined, finally, the uniformly convergent approximate expressions of the solution for the original nonlinear problem for the earth-atmosphere oscillator model are obtained.

Key words: Nonlinear, Earth-atmosphere coupling, Dynamical system.