

# 三层模式背风波的理论研究<sup>\*</sup>

臧增亮 张 铭

(解放军理工大学气象学院大气环流与短期气候预测实验室, 南京, 211101)

## 摘 要

文中建立了一个背风波的三层理论模式; 当三层 Scorer 参数在中层最大、高层次之、下层最小的情况下, 利用该模式求得了背风波的理论波长及扰动的解析解, 并对一个典型的个例计算了其背风波波长, 并在此基础上分析了背风波波长对上、中、下三层 Scorer 参数变化的敏感性, 结果表明波长对中层 Scorer 参数的变化比较敏感, 对下层 Scorer 参数的大小和符号都不敏感, 但在计算背风波波长时不能忽略下层的 Scorer 参数。

关键词: 背风波, Scorer 参数, 三层模式。

## 1 引 言

背风波是一种重要的中尺度环流, 它是在一定层结条件下气流越山时在山脉背风坡产生的波动。这类波动一般波长较小, 振幅较大, 垂直速度也较大, 常呈现为比较规则的波状云。作为一个经典的气象和流体力学问题, 很多学者从理论求解、实验室模拟和数值模拟等多角度对其开展过大量的研究。几乎所有的研究都表明大气层结和水平风速是影响背风波最重要的两个因子。Scorer<sup>[1]</sup>在 1949 年第一次把这两个因子综合在一起作为 Scorer 参数  $l^2$  ( $l^2 = \frac{N^2}{U^2} - \frac{1}{U} \frac{\partial U^2}{\partial z}$ ), 并用其来研究二层模式下的背风波问题, 得到了现在众所周知的背风波的产生条件:  $l_1^2 - l_2^2 > \frac{\pi^2}{4h^2}$  (下标 1 和 2 分别表示下层和上层)。此后的许多工作都把  $l^2$  作为衡量和研究背风波的一个重要参数, 如 Foldvik<sup>[2]</sup> 讨论了  $l^2$  在垂直方向上呈指数衰减情况下的背风波, Durran 和 Klemp<sup>[3]</sup> 研究了  $l^2$  为二层结构的背风波中水汽的作用。此外, 由于 Froude 数  $Fr$  ( $Fr = \frac{U}{Nh}$ ) 也能表示大气层结和水平风速的分布情况, 在背风波的研究中也被广泛应用, 如 Long<sup>[4]</sup> 在实验室中用一个包含不同密度的层结流体模式, 通过变化 Froude 数分别模拟了背风波和下波风。Smolarkiewicz 和 Richard<sup>[5]</sup> 利用数值试验在模拟夏威夷岛的背风涡

旋中发现, 当 Froude 数小于 0.5 时, 在背风波有一对背风涡旋出现; 后来, 他们又进一步作为初值问题模拟了该涡旋在不同发展阶段的特征<sup>[6]</sup>。

中国是一个多山地的国家, 地形和山脉的作用倍受国内气象学者的关注, 也开展了很多关于背风波方面的研究工作。李骥等<sup>[7]</sup> 利用一个非线性的数值模式研究了背风波的形成机制, 并讨论了太行山地形的背波效应对降水的影响。高守亭等<sup>[8, 9]</sup> 对大地形背风波进行了转槽实验研究, 发现 Froude 数对于控制过山气流的类型和结构起着关键作用。桑建国<sup>[10]</sup> 研究了三维大气中 Scorer 参数为二层情况下的内船舶波。刘辉志等<sup>[11]</sup> 则利用水槽试验模拟了不同 Scorer 参数分布下的背风波。

实际的大气层结是复杂的, 可以简化为很多类型, 如下的一种类型在实际大气中也是比较常见的。在近地面为弱的稳定层结, 甚至可以是\*\*对流不稳定的; 在一定高度上出现逆温层或为强的稳定层结; 在中高层则为不太强的稳定层结。若忽略风随高度的变化, 仅考虑大气层结对 Scorer 参数的作用, 则以上这种大气的 Scorer 参数满足

$$l_1^2 \leq l_3^2 < l_2^2 \quad (1)$$

这里的下标 1, 2 和 3 分别表示下层、中层和上层, 并且  $l_1^2$  可为负值。图 1 给出了在美国 Blue 山脊地区一次背风波过程中由探空仪和飞机实测的温度廓线所计算的 Scorer 参数的垂直分布<sup>[12]</sup>, 从图中可以看出, 此时大气的  $l^2$  廓线就符合关系式(1)。对于这

\* 初稿时间: 2003 年 11 月 6 日; 修改稿时间: 2004 年 4 月 19 日。

种类型的背风波问题在前人的理论研究中并不多见, Marthinsen<sup>[13]</sup> 曾利用挪威海附近的观测资料研究过这种  $l^2$  为三层模式下背风波的三维结构。但 Marthinsen 主要侧重于讨论了波动的振幅及在三维空间中的波形, 而且仅限于边界层为中性层结(即  $l_1^2 = 0$ ) 下的三层模式, 对  $l_1^2$  取其他值时的情况没有涉及。本文从一个一般的三层模式出发, 求出满足关系式(1)的背风波波长公式, 在此基础上讨论了三层 Scorer 参数对波动的影响, 并重点分析了低层 Scorer 参数的作用。

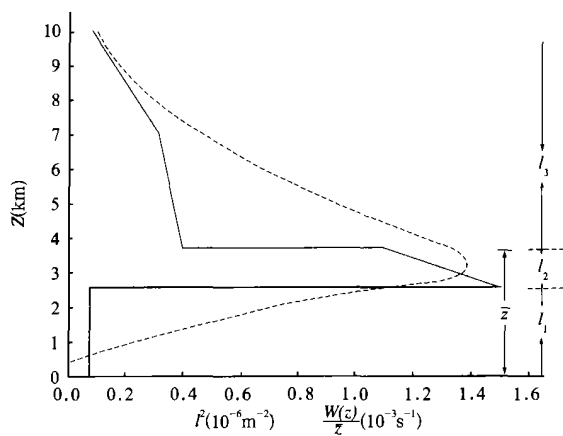


图1 1971年3月4日 Pittsburgh 地区 Scorer 参数廓线(实线)和标准化振幅廓线(虚线)<sup>[12]</sup>

Fig.1 Scorer parameter profile (solid line) and the normalized lee wave amplitude profile (dotted line) at 2000 Dst 4 March 1971 at Pittsburgh<sup>[12]</sup>

## 2 背风波的理论模型及分析解

绝热、无粘、定常的二维(  $x, z$  ) 气流越过山脉, 设基本气流为  $U(z)$ , 由其线性化的扰动方程组可推导出关于流函数的波动方程<sup>[1]</sup>

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + (l^2 - k^2) \Psi = 0 \quad (2)$$

为求解的方便, 假定第 1, 二层有相同的厚度, 并把第 1, 二层的分界面放在  $z = 0$  处, 第 2, 三层的分界面放在  $z = h$  处, 地面则取在  $z = -h$  处, 如图 2 所示。此时三层大气的 Scorer 参数分别记为  $l_1^2, l_2^2$  和  $l_3^2$ , 且其满足条件(1)。

设方程(2)在这 3 层中的解分别为

$$\Psi_1 = A_1 e^{\mu_1 z} + B_1 e^{-\mu_1 z} \quad (3.1)$$

$$\Psi_2 = A_2 e^{\mu_2 z} + B_2 e^{-\mu_2 z} \quad (3.2)$$

$$\Psi_3 = A_3 e^{\mu_3 z} + B_3 e^{-\mu_3 z} \quad (3.3)$$

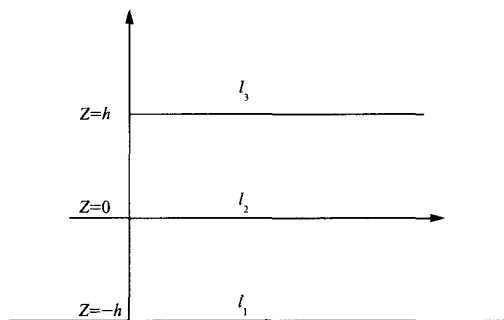


图2 三层模式中 Scorer 参数的分布

Fig.2 Distribution of the Scorer parameter in the three-layer model

其中

$$\mu_i = \sqrt{k^2 - l_i^2} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4)$$

方程(2)的边界条件为

$$z = -h, \quad \Psi_1 = 0 \quad (5.1)$$

$$z = 0, \quad \Psi_1 = \Psi_2, \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (5.2)$$

$$z = h, \quad \Psi_2 = \Psi_3, \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \Big|_{z=h} = \frac{\partial \Psi_3}{\partial z} \Big|_{z=h} \quad (5.3)$$

$$z = \infty, \quad \Psi_3 = 0 \quad (5.4)$$

由式(5.4)知,  $A_3 = 0$  且  $\mu_3$  必须为正实数。

由式(5.2)可得

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \quad (6.1)$$

$$\mu_1 A_1 - \mu_1 B_1 = \mu_2 A_2 - \mu_2 B_2 \quad (6.2)$$

由式(5.3)可得

$$A_2 e^{\mu_2 h} + B_2 e^{-\mu_2 h} = B_3 e^{-\mu_3 h} \quad (7.1)$$

$$\mu_2 A_2 e^{\mu_2 h} - \mu_2 B_2 e^{-\mu_2 h} = \mu_3 B_3 e^{-\mu_3 h} \quad (7.2)$$

令  $A = B_3$ , 由式(6.1), (6.2), (7.1), (7.2) 4 式可得其余 4 个系数  $A_1, B_1, A_2, B_2$  的表达式, 并一起代入到式(3)可得到

$$\begin{aligned} \Psi_1 = & \frac{A}{4\mu_1\mu_2} [(\mu_1 + \mu_2)(\mu_2 - \mu_3)e^{(-\mu_3 - \mu_2)h} + \\ & (\mu_1 - \mu_2)(\mu_2 + \mu_3)e^{(-\mu_3 - \mu_2)h}] e^{\mu_1 z} + \\ & \frac{A}{4\mu_1\mu_2} [(\mu_1 - \mu_2)(\mu_2 - \mu_3)e^{(-\mu_3 - \mu_2)h} + \\ & (\mu_1 + \mu_2)(\mu_2 + \mu_3)e^{(-\mu_3 + \mu_2)h}] e^{-\mu_1 z} \quad (8.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_2 = & \frac{A(\mu_2 - \mu_3)}{2\mu_2} e^{(-\mu_3 - \mu_2)h} e^{\mu_2 z} + \\ & \frac{A(\mu_2 + \mu_3)}{2\mu_2} e^{(-\mu_3 + \mu_2)h} e^{-\mu_2 z} \quad (8.2) \end{aligned}$$

$$\Psi_3 = A e^{-\mu_3 z} \quad (8.3)$$

由于背风波的频率  $k$  是不确定的, 故上面 3 个式子中的  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  也是不确定的, 下面用在  $z = -h$  处的边界条件来计算  $k$ 。

由式(5.1)和(8.1)可得

$$\frac{A}{4\mu_1\mu_2}[(\mu_1 + \mu_2)(\mu_2 - \mu_3)e^{(-\mu_3 - \mu_2 - \mu_1)h} + (\mu_1 - \mu_2)(\mu_2 + \mu_3)e^{(-\mu_3 + \mu_2 - \mu_1)h} + (\mu_2 - \mu_3)e^{(-\mu_3 - \mu_2 + \mu_1)h} + (\mu_1 + \mu_2)(\mu_2 + \mu_3)e^{(-\mu_3 + \mu_2 + \mu_1)h}] = 0 \quad (9)$$

由上式可知,  $\mu_1, \mu_2$  都不能为零。由式(5.4)已推出  $\mu_3$  为正实数, 则考虑式(4)及(1)可知  $\mu_1$  为正实数。

对于  $\mu_2$ , 由式(4)可知, 在  $k^2 > l_2^2$  情况下  $\mu_2$  为正实数, 在  $k^2 < l_2^2$  情况下  $\mu_2$  是虚部为正的纯虚数。容易证得, 在第一种情况下式(9)不成立, 故  $\mu_2$  只能是纯虚数, 且其虚部为正。令  $\mu_2 = i\sqrt{l_2^2 - k^2} = i\gamma_2$ , 则  $\gamma_2$  为正实数, 代入式(9)并对虚部、实部进行整理后可得到

$$\frac{A}{2\mu_1\gamma_2}[(\gamma_2^2 + \mu_1\mu_3)e^{(-\mu_3 - \mu_1)h}\sin(\gamma_2h) + (\mu_1\gamma_2 - \gamma_2\mu_3)e^{(-\mu_3 - \mu_1)h}\cos(\gamma_2h) + (-\gamma_2^2 + \mu_1\mu_3)e^{(-\mu_3 + \mu_1)h}\sin(\gamma_2h) + (\mu_1\gamma_2 + \gamma_2\mu_3)e^{(-\mu_3 + \mu_1)h}\cos(\gamma_2h)] = 0 \quad (10)$$

利用双曲函数, 上式还可写为

$$\operatorname{ctg}(\gamma_2h) + \frac{(\mu_1\mu_3/\gamma_2) - \gamma_2\operatorname{th}(\mu_1h)}{\mu_1 + \mu_3\operatorname{th}(\mu_1h)} \quad (11)$$

其中  $\gamma_2 = \sqrt{l_2^2 - k^2}$ ,  $\mu_1 = \sqrt{k^2 - l_2^2}$ ,  $\mu_3 = \sqrt{k^2 - l_2^2}$ 。给出  $l_1^2, l_2^2, l_3^2$  和  $h$  后, 式(11)是一个关于  $k$  的超越方程。由于该方程的复杂性, 在此不能给出解的解析形式, 但对于一组具体的  $l_1^2, l_2^2, l_3^2$  和  $h$ , 利用数值计算方法则能很容易地由该方程解出  $k$  值。式(11)与 Scorer 在二层模式中所求得的波长计算公式

$$\operatorname{ctg}(\gamma_1h) + \mu_2/\gamma_1 = 0 \quad (12)$$

相似。Scorer 还从式(12)得到了 2 层模式下背风波存在的最低条件:  $l_1^2 - l_2^2 > \frac{\pi^2}{4h^2}$ , 但因实际大气中 Scorer 参数的垂直廓线是复杂的, 虽然背风波常发生于  $l^2$  向上减小的高度附近, 但对于该最低条件却不一定能满足。利用式(11)分析三层模式下背风波解的条件时, 发现三层模式比二层模式下背风波的存在条件要低, 这就从理论上解释了当大气条件不满足二层模式的最低要求时, 仍有可能出现背风波。此外, 需要指出的是, 利用式(11)求解背风波的频率

$k$  时, 有可能出现多个解的情况。Scorer<sup>[1]</sup>和 Corby 等<sup>[14]</sup>都指出: 最小的波数  $k$  (对应着最大的波长) 是波动的主要部分, 也是方程的实际解。在三层模式中, 通过对具体个例的分析发现这一规则也是适用的。

设波动为谐波, 且将高度  $z$  处的扰动写成  $f_z(k)e^{ikx}$  的形式, 其中  $f_z(k) = \frac{\Psi(z)}{U}$ 。另设山脉呈  $\frac{a}{\pi} \cdot \frac{b}{b^2 + x^2}$  分布, 这里  $b$  为山脉半宽, 山高为  $H = \frac{a}{b\pi}$  其可用傅立叶积分表示为

$$\begin{aligned} \xi(-h) &= \frac{a}{\pi} \cdot \frac{b}{b^2 + x^2} \\ &= \frac{a}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-kb + ikx} dk \end{aligned} \quad (13)$$

这里  $\operatorname{Re}$  表示取实部。  $\xi(-h)$  实际上是地面气流的扰动, 气流在  $z$  处的扰动则为

$$\xi(z) = \frac{a}{\pi} \cdot \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{f_z(k)}{f_{-h}(k)} e^{-kb + ikx} dk \quad (14)$$

因在山系之外  $f_{-h}(k) = 0$ , 故  $f_{-h}(k)$  就成为式(14)的极点, 类似于文献[1]中的处理, 可用留数定理求出  $\xi(z)$ , 也就是背风波扰动形式的分析解, 其形式为

$$\begin{aligned} \xi(z) &= \frac{a}{\pi} \operatorname{Re} \left[ \frac{f_z(0)}{f_{-h}(0)} \frac{b + ix}{b^2 + x^2} \right] + 2a \cdot \\ &\operatorname{Re} \left[ i \frac{f_z(k_0)}{f_{-h}(k_0)} e^{-k_0b + ik_0x} \right] \quad x > 0 \end{aligned} \quad (15.1)$$

$$\xi(z) = \frac{a}{\pi} \operatorname{Re} \left[ \frac{f_z(0)}{f_{-h}(0)} \frac{b + ix}{b^2 + x^2} \right] \quad x < 0 \quad (15.2)$$

其中  $f'_{-h}(k_0) = \frac{df_{-h}(k_0)}{dk}$ 。式(15.1)中右端的第 1 项和式(15.2)右端表示由山脊引起的强迫扰动, 式(15.1)中右端第 2 项在  $x$  方向呈波动形式为背风波。此背风波仅在  $x > 0$  方向上存在, 而在迎风波方向( $x < 0$ )没有。设三层背风波的气流扰动为  $\xi_1(z), \xi_2(z), \xi_3(z)$ , 利用式(8.1), (8.2), (8.3)就可求得每一层的  $f_z(k)$ , 再由  $f_z(k)$  可求出  $\xi_1(z), \xi_2(z), \xi_3(z)$ 。

### 3 背风波波长的计算分析

本文仍参照图 1 中美国 Blue 山脊地区的实际背风波个例<sup>[12]</sup>, 但因该背风波个例中第 1 与二层的厚度不是等间隔, 且各层之内的  $l^2$  随高度也略有改变, 故不能直接利用本文的理论公式进行计算。本

文的目的是用理想的 Scorer 参数廓线来求解背风波的波长, 故本文在参考该实际背风波资料的基础上设计了一个典型的背风波个例。本文中取第 1, 2 层的厚度为各为 2 km, 即  $h = 2$  km, 3 层的 Scorer 参数则分别取为  $l_1^2 = 0.1 \text{ km}^{-2}$ ,  $l_2^2 = 1.5 \text{ km}^{-2}$ ,  $l_3^2 = 0.25 \text{ km}^{-2}$ , 下面为叙述方便, 记该个例为个例 1。把个例 1 的参数代入到式(11)可以求得该背风波的波数  $k = 0.921 \text{ km}^{-1}$ , 其波长  $L = 2\pi/k = 6.82 \text{ km}$ 。

下面在个例 1 的基础上, 通过逐次变化 Scorer 参数  $l_1^2$ ,  $l_2^2$ ,  $l_3^2$  来分析这 3 个参数对背风波波长的影响, 具体做法是先变化其中 1 个参数, 其余 2 个参数仍取个例 1 中的数值, 这也是背风波分析中较常用的一种方法<sup>[13,14]</sup>。图 3a, b, c 是分别变化这 3 个参数得到的计算结果。从图中可见, 任意一个参数增大时, 波长都会减小, 即这 3 个参数的数值与波长

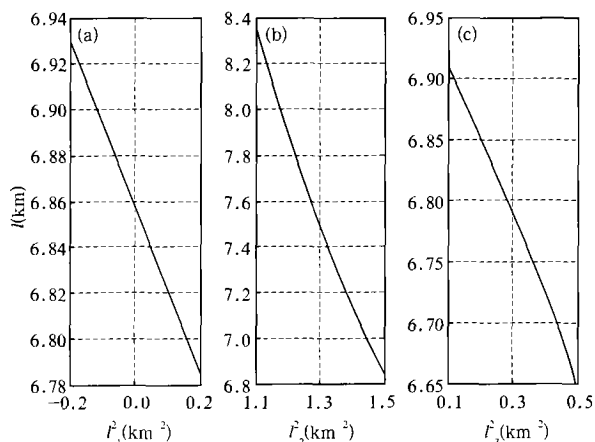


图 3 背风波波长随  $l_1^2$  (a),  $l_2^2$  (b) 和  $l_3^2$  (c) 的变化

Fig. 3 Variation of wavelength with  $l_1^2$  (a),  $l_2^2$  (b) and (c)  $l_3^2$

都呈反相关, 但波长对  $l_2^2$  的变化最为敏感,  $l_3^2$  其次, 最不敏感的是  $l_1^2$ 。当  $l_2^2$  增加  $0.4 \text{ km}^{-2}$ , 波长变化了 1.56 km; 而  $l_1^2$  从  $-0.2 \text{ km}^{-2}$  至  $0.2 \text{ km}^{-2}$  同样增加了  $0.4 \text{ km}^{-2}$ , 仅使波长变化了 0.15 km。因波长对  $l_1^2$  的大小和符号变化不敏感, 能否在计算背风波波长时忽略该层, 即可否把三层模式简化为二层模式而使计算的背风波波长改变不大呢? 下面对此进行了考察。以下分别用 3 种方法把个例 1 简化为二层模式, 并用公式(12)来求解简化后该二层模式的背风波波长, 最后与个例 1 的结果进行比较。这 3 种简化方法仅对三层模式中的第 1, 2 层进行处理, 处理后的结果作为简化后二层模式的第 1 层, 而

第 2 层则直接取用原三层模式的第 3 层。方法一是直接略去第 1 层, 第 2 层 Scorer 参数和厚度(为 2 km)不变, 作为简化后的第 1 层, 记为个例 2; 方法二是保留第 2 层的 Scorer 参数, 但厚度取原第 1, 2 层厚度之和, 即取 4 km, 作为简化后的第 1 层, 记为个例 3; 方法三是原第 1, 2 层的 Scorer 参数取平均, 并取其厚度也为原第 1, 2 层厚度之和, 即也取为 4 km, 作为简化后的第 1 层, 记为个例 4。表 1 列出这 3 个个例的计算结果, 和原来三层模式波长的计算结果 6.82 km 相比, 这 3 个简化后的个例所计算出来的波长均与该结果有较大差异。考察结果说明, 虽然  $l_1^2$  对计算的波长不敏感, 但三层模式下的背风波一般不能简化为二层模式来处理, 这也表明三层模式有其存在的必要性。

表 1 个例 1 的波长和个例 2, 3, 4 所取的参数及波长

Table 1 The wavelength of the first example and the parameters and wavelengths of examples from 2 to 4

序号	$l_1^2 (\text{km}^{-2})$	$l_2^2 (\text{km}^{-2})$	$h (\text{km})$	$L (\text{km})$
个例 1	—	—	—	6.82
个例 2	1.5	0.25	2	9.04
个例 3	1.5	0.25	4	5.98
个例 4	0.8	0.25	4	9.08

这里还要指出的是, 因方程(11)中  $\text{ctg}(\gamma_2 h)$  是一个周期函数, 这会使方程在  $n\pi/2 < \gamma_2 h < (n+1)\pi/2$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) 的各个区间都可能存在解; 且当 Scorer 参数变化时, 解可能由一个区间跳到另一个区间中去, 相应的波长也会发生不连续的现象, 即解会发生突变, 此时波长对 Scorer 参数的敏感性便不再遵循以上的规律。因在实际大气中  $\gamma_2 h$  的变化范围不会太大, 背风波波长发生突变的可能性也比较小, 但是否能发生突变, 要根据实际大气中的具体参数来决定。

#### 4 背风波扰动解的计算分析

下面利用 Matlab 数学工具对个例 1 的扰动进行求解。具体做法是, 设计一个  $x - z$  的二维网格面, 先对式(8.1)求导并取  $z = -h$  得到  $f_{-h}(k)$ , 再把各层 Scorer 参数及上面计算出来的  $k$  值代入式(8.1), (8.2)和(8.3), 计算每个网格点上的  $f_z(k)$ , 由  $f_z(k)$  通过式(15.1)和(15.2)可求出每个网格点上的扰动值; 虽然这些值是以数值形式出现的, 但实际上代表的是波动的分析解。本文中所设计的网格

参数为:  $x$  方向取 401 个点,  $z$  方向取 81 个点, 即取  $N_x = 401$ ,  $N_z = 81$ , 网格距  $\Delta x = \Delta z = 0.1$  km。设水平风速为常数  $U = 10$  m/s, 山高  $H = 0.2$  km, 半山宽度  $a = 2$  km, 山的中心位于  $x$  方向上第 100 个点上, 参数  $l_1^2$ ,  $l_2^2$ ,  $l_3^2$  和  $h$  取为个例 1 中的值。

利用扰动解可画出个例 1 的流场图(图 4), 气流在越山后产生了一系列波动, 其波长  $L = 6.82$  km。从此图中扰动的垂直廓线可见, 波动振幅在垂直方向上先增大, 后减小, 垂直速度的最大值在 3.2 km 附近。实际上, 由式(8.1), (8.2) 和(8.3), 并考虑到  $\mu_2$  为纯虚数, 只有中层振幅的垂直变化呈三角函数形式, 而在其上下层均呈指数形式的变化, 下层振幅随高度是递增的, 上层是递减的, 所以波动的最大振幅应在中层。在图 1 的实际个例中, 除了实际的  $l^2$  廓线外(实线), 还给出了观测的标准化振幅的廓线(虚线), 按文献[12] 标准化振幅定义为  $W/\bar{Z}$ , 其中  $W$  为垂直速度,  $\bar{Z}$  为最大波动能量所处

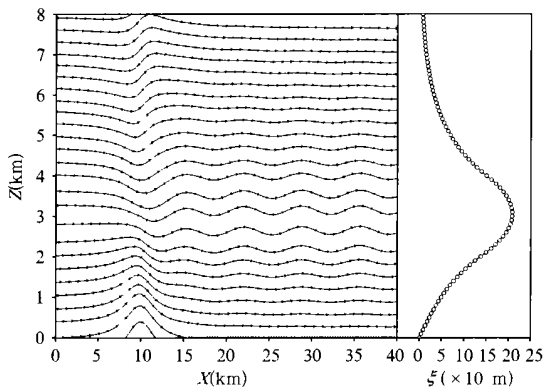


图 4 个例 1 的流场图及扰动的垂直廓线  
(流场图中的垂直速度进行了适当放大)

Fig. 4 Streamline field and perpendicular profile of the disturbance for the first example  
(the perpendicular velocity in streamline field have been multiplied properly)

的高度(图 1 中  $\bar{Z} = 3.38$  km)。由图 1 中可以看出最大振幅的高度与中间一层 Scorer 参数的大值区也是一致的。

此外, 本文还计算了  $l_1^2 = -0.1 \text{ km}^{-2}$  情况下的背风波(图略), 与个例 1 中背风波相比, 不仅波长相近, 而且结构也相同。这进一步说明不仅是背风波的波长, 而且背风波的结构对低层 Scorer 参数符号的改变都不敏感。这对于实际背风波的计算分析很有意义, 由于在实际大气中往往在低层的 Scorer 参数是正负交替的, 通常要对各层进行平滑或平均处理, 这时就可忽略低层该参数的改变, 因这样做对结果并无明显的影响。

## 5 结 语

针对实际大气中一种常见 Scorer 参数廓线的垂直分布, 本文建立了一个 Scorer 参数为三层结构的理论模式, 由下边界条件推导出了求解背风波的波长的方程, 利用留数定理给出了背风波扰动形式的解析解, 并对一个典型背风波个例作了计算。计算结果表明其扰动最大处位于中间层, 这与三层模式背风波的实际观测结果相一致。在该典型个例的基础上, 本文还对波长随  $l_1^2$ ,  $l_2^2$ ,  $l_3^2$  的变化进行了计算分析, 结果表明波长对  $l_2^2$  的变化比较敏感, 对  $l_1^2$  的大小和符号都不敏感, 但在计算背风波的波长时参数  $l_1^2$  仍不能被忽略。

本文的工作只是初步的, 对于地形参数、Scorer 参数层的厚度等对波长的影响都还没有进行分析。另外, 虽然 Marthinsen<sup>[13]</sup> 已经对  $l_1^2 = 0$  这种特殊情况下其对波动振幅随  $l_2^2$ ,  $l_3^2$  的变化进行了讨论, 但对于更一般的情况下, 层结廓线和地形廓线对波动振幅是如何影响的, 仍需作进一步的研究。

致谢: 南京大学大气科学系王其伟博士提供许多参考资料并提出宝贵建议, 在此深表谢意。

## 参考文献

- 1 Scorer R S. Theory of waves in the lee of mountains. Quart J Roy Meteor Soc, 1949, 75: 41~ 56
- 2 Foldvik A. Two-dimensional mountain waves: A method for the rapid computation of the lee wavelengths and vertical velocities. Quart J Roy Meteor Soc, 1962, 88: 271~ 285
- 3 Durran D R, Klemp J B. The effects of Moisture on trapped mountain lee waves. J Atmos Sci, 1982, 39: 2490~ 2506
- 4 Long R R. Some aspects of the flow of stratified fluids, II: Experiments with a two fluid system. Tellus, 1954, 6: 97~ 155
- 5 Smolarkiewicz P K, Rotunno R. Low Froude number flow past three-dimensional obstacles. Part I: Baroclinically generated lee vortices. J Atmos Sci, 1989, 46: 1154~ 1164
- 6 Rotunno R, Smolarkiewicz P K. Further results on lee vortices in low-Froude-number flow. J Atmos Sci, 1991, 48: 2204~ 2211
- 7 李骥等. 背风波形成的非线性数值试验及其对降水的影响, 大气科学, 1978, 2(3): 210~ 218

- 8 高守亭, 陈辉. 大地形背风波的转槽实验研究. 气象学报, 2000, 58(6): 653~ 664
- 9 Gao Shouting, Ping Fan. Laboratory studies of the stratified rotating flow passing over an isolated obstacle. Chin Phys Lett, 2003, 20(7): 1094 ~ 1097
- 10 桑建国. 大气中的内船泊波. 中国科学 B, 1997, 27(6): 560~ 565
- 11 刘辉志等. 地形引起的重力内波的水槽实验. 气象学报, 2001, 59(1): 59~ 65
- 12 Smith R B. The generation of lee waves by the Blue Ridge. J Atmos Sci, 33 507~ 519
- 13 Marthinsen T. Three-dimensional lee waves. Quart J Roy Meteor Soc, 1980, 106: 569~ 580
- 14 Corby G A, Wallington C E. Airflow over mountains: The lee-wave amplitude. Quart Roy Meteor Soc, 1956, 82: 66~ 274

## THEORETICAL STUDY ON TRAPPED LEE WAVES ON THREE-LAYERS MODEL

Zang Zengliang Zhang Ming

(Laboratory of atmosphere circulation and short-range climate prediction, Institute of Meteorology,  
PLA University of Science & Technology, Nanjing 211101)

### Abstract

Under certain conditions, airflow over a mountain can force trapped lee waves. Scorer (1949) first introduced the Scorer parameter ( $l^2$ ) into a two-layer model, and lead to the necessary condition for trapped lee waves. Since then, lots of investigations have been based on the two-layer model. However, the Scorer parameter in the real atmosphere is complex, and the two-layer model is highly limited on dealing with actual questions.

It is well known that the distribution of stratification ( $N^2$ ) often appears in such a pattern, in which a very small even negative value in the boundary layer, a larger value in the midtropospheric stable layer, and a smaller value again in upper troposphere. If the horizontal wind speed change with height is not sharp, the Scorer parameter will satisfy  $l_1^2 \leq l_3^2 < l_2^2$ ,  $l_1^2$ ,  $l_2^2$  and  $l_3^2$ , are Scorer parameters in the low, middle and upper layers, respectively. In this paper, a theoretic model of this kind of lee waves was established. Using this model, the theoretical wavelength and the analytic disturbance solution of the trapped lee waves were obtained. Then, the trapped lee wavelength of an idealized three-layer case was calculated, on the base of the work that the sensitivity of the wavelength to Scorer parameters in every layer was analyzed. The result showed that the sensitivity to the Scorer parameter in middle layer was the most remarkable, and the value and sign of that in lower layer were all not very sensitive.

In order to compare the three-layer model with the two-layer model, the three-layer case was translated into three two-layer cases by use of different methods. The calculation results showed that the wavelengths of these three cases were very different from that of the three-layer case. It is suggested that the Scorer parameter in lower layer can't be ignored when the trapped lee wavelength is calculated. The calculating streamlines in the three-layer model revealed that the strongest disturbance located in the middle layer, which was consistent with the observational result. In addition, a particular three-layer case was calculated, in which the Scorer parameter of the lower layer was negative. The results showed that the structure of streamline disturbance changes less than that of the former three-layer model.

**Key words:** Three-layer model, Trapped lee wave, Scorer parameter.