# 波包传播诊断的理论基础和计算方法

缪锦海　肖天贵　刘志远

(成都信息工程学院, 成都, 610041)

摘　　要

文中提出了一种新的利用实际观测资料研究波包传播的诊断方法(WPD), 并通过理想资料和实际资料的计算证明了该方法的可用性和广泛性。

关键词: 波包传播, 诊断方法, 波动能量传播, 瞬变波。

## 1　引　言

波动能量传播问题一直是气象科学中的重大问题。20 世纪 40 年代, 叶笃正就研究了正压罗斯贝波的能量频理论[1]。20 世纪 80 年代, 曾庆存[2,3] 利用非线性理论全面系统地研究了瞬变波的波包理论, 并讨论了有关瞬变波的能量传播问题。缪锦海[4] 也利用资料间接地诊断了波包传播与江淮流域出梅、入梅和副高北跳的关系。20 世纪 80 年代以后, 准定常行星波的形成、传播与异常这一气候动力学中重要问题的研究有了重大发展。Hoskins[5] 研究了准定常波的能量传播理论, 解释了 PNA 的遥相关特征。黄荣辉[6] 研究了准定常波理论并讨论了东亚太平洋型的遥相关。Eliassen 和 Paim 共同推导了与群速度矢量有一定联系的 EP 能量矢量, Andrews 和 Mcintyre 发展了广义的 EP 通量。Edmon、黄荣辉发展了更为广义的球面大气中的 EP 通量。吴国雄[7,8] 讨论了湿模式中的 EP 通量。但是, 如何直接利用实际资料获得波动的群速度并进行波包传播的诊断分析, 既可以证实理论工作的结果, 又可以分析系统发生发展的能量来源, 为天气和气候预测提供有力的诊断预测方法仍然是有待解决的问题。

经过十几年的思考探索, 我们发现在电子工程的信号数字处理中[9] 存在窄带信号的振幅随时间变化的理论。经过理论拓展, 可以讨论窄带信号振幅随时间和空间的变化, 也就是振幅随时间变化的空间传播问题, 即波包传播问题。由于波能的传播随着波包传播而移动, 因而波包传播的诊断方法为研究波能传播对各种系统的发展变化提供了有意义的诊断方法。

## 2　波包传播诊断方法(WPD) 的理论基础与计算方法

气象资料在一定条件下可以看成许多波动的组合, 如

$$P(x, y, z, t) = \ _{i=1} A_i(x, y, z, t)$$
$$\cos(k_i x + l_i y + m_i z + \ _i t + \ ) \quad (1)$$

波动能量的传播是沿波动包络传播的。各波振幅 $A_i(x, y, z, t)$ 最大值的移动表示波包的移动, 也表示这一波波动能量的传播。假如能求出各波的振幅 $A_i(x, y, z, t)$ 随空间和时间的改变, 就能了解波包的移动及波动能量的传播。由于理论工作可以通过一些数学工具方便地讨论某一波动, 获得某一波动的振幅的性质, 所以理论工作中讨论某一波动的群速度即波包移动的问题就较为容易。但在实际资料中, 由于波动的复杂化, 使得如何去求出各波动群速度的工作就变得非常困难, 因此, 长期以来, 一直就没有系统性的波包传播诊断方法。

**2.1**　窄带系统

通常情况下, 在实际气象问题的讨论中, 对波包传播的研究往往是在某一窄带频率信号条件下进行的, 如准 2 年周期的变化、季节内变化(准 40 天周期

初稿时间: 2000 年 8 月 8 日; 修改稿时间: 2001 年 5 月 21 日。
资助课题: 国家自然科学基金项目(49875023)。

变化)、瞬变波波包的传播、准定常行星波能量的传播等等,即不是讨论全频率问题的波包传播,但是窄带频率系统同样具有无限多个波。窄带系统就是频率特性具有窄带特点的系统。窄带特点是带宽远小于中心频率 $_0$,频谱具有图 1 的特性,占据中心频率(载波频率)左右一段较窄的频率,所以窄带系统实际上就是窄带滤波器。

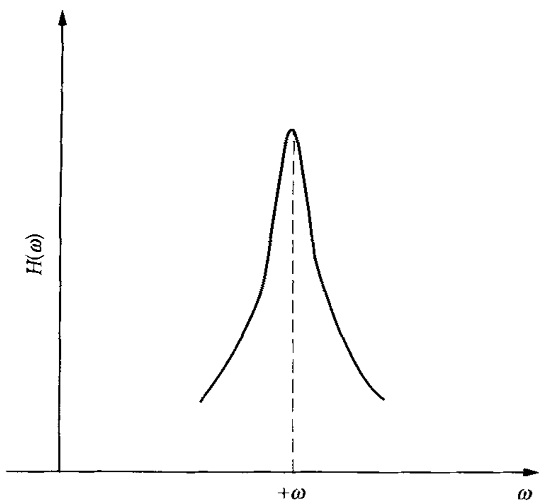



图 1 窄带信号系统的频谱特性

**2.2** 窄带信号波包传播的理论基础

2.2.1 希尔伯特(Hilbert)变换

输入信号 $P(t)$ 经过滤波器 $H(\ )$ 后产生输出信号 $G(t)$,如果 $H(\ )$ 具有以下特征,则此种变换称为希尔伯特变换。

(1) 频率特性是全通型的,即对所有频率经过滤波后振幅不变。即

$$|H(\ )| = 1 \tag{2}$$

(2) 相频特性是正频率向− 90 相移,而负频率向+ 90 相移的,即

$$H(i\ ) = \begin{cases} +i & \text{当} \ < 0 \\ 0 & \text{当} \ = 0 \\ -i & \text{当} \ > 0 \end{cases} \tag{3}$$

根据以上的变化关系可以求出冲激响应 $h(t)$:

$$h(t) = \frac{1}{\ t} \tag{4}$$

由此可得到希尔伯特正变换的定义式:

$$\hat{P}(t) = \frac{1}{\ } \int_{-}^{} \frac{P(\ )}{t-\ } \mathrm{d}\ \tag{5}$$

希尔伯特反变换的定义式:

$$\hat{P}(t) = -\frac{1}{\ } \int_{-}^{} \frac{\hat{P}(\ )}{t-\ } \mathrm{d}\ \tag{6}$$

2.2.2 窄带信号的希尔伯特(Hilbert)变换

可以利用希尔伯特变换式(5)求出信号

$$P(t) = A\cos\ _0 t \tag{7}$$

的希尔伯特变换为

$$\hat{P}(t) = A\sin\ _0 t \tag{8}$$

也可以求出 $P(t) = A\sin\ _0 t$ 的希尔伯特变换为

$$\hat{P}(t) = -A\cos\ _0 t \tag{9}$$

同样,可以证明窄带信号

$$P(x,y,z,t) = A(x,y,z,t)\cos[kx + ly + mz + \ _0 t + \ (x,y,z,t)] \tag{10}$$

的希尔伯特变换为

$$\hat{P}(x,y,z,t) = A(x,y,z,t)\sin[kx + ly + mz + \ _0 t + \ (x,y,z,t)] \tag{11}$$

2.2.3 解析信号、复数包络和包络传播

将输入信号 $P(t)$ 与它的希尔伯特(Hilbert)变换结合为一个复信号

$$P_c(t) = P(t) + i\hat{P}(t) \tag{12}$$

则称 $P_c(t)$ 为 $P(t)$ 的解析信号。

所以,窄带信号

$$P(x,y,z,t) = A(x,y,z,t)\cos[kx + ly + mz + \ _0 t + \ (x,y,z,t)] \tag{13}$$

的解析信号为

$$P_c(x,y,z,t) = A(x,y,z,t)\ \cos[kx + ly + mz + \ _0 t + \ (x,y,z,t)] + iA(x,y,z,t)\sin[kx + ly + mz + \ _0 t + \ (x,y,z,t)] = A(x,y,z,t)e^{i(kx+ly+mz+\ _0 t)} \tag{14}$$

式中 $A = A(x,y,z,t)e^{i\ (x,y,z,t)}$ 为复数包络。由此可知,包络 $A(x,y,z,t)$ 不仅是时间 $t$ 的函数,而且是空间 $(x,y,z)$ 的函数,因此,包络具有传播性。

由式(14)可知,解析信号的振幅是窄带信号的包络,解析信号的复振幅是窄带信号的复包络。

2.2.4 窄带信号的波包传播

已知窄带信号 $P(x,y,z,t)$,求出希尔伯特变换 $\hat{P}(x,y,z,t)$,其解析信号为

$$P_c(x,y,z,t) = P(x,y,z,t) + i\hat{P}(x,y,z,t) \tag{15}$$

求出解析信号 $P_c(x,y,z,t)$ 的振幅为

$$P_c(x, y, z, t) \quad = \sqrt{P^2(x, y, z, t) + \hat{P}^2(x, y, z, t)} \qquad (16)$$

解析信号 $P_c(x, y, z, t)$ 的位相为

$$_c(x, y, z, t) = \tan^{-1}\left[\frac{\hat{P}(x, y, z, t)}{P(x, y, z, t)}\right] \qquad (17)$$

解析信号 $P_c(x, y, z, t)$ 的振幅就是窄带信号的包络, 即

$$P_c(x, y, z, t) \quad = A(x, y, z, t) \qquad (18)$$

因此, 通过已知窄带信号的资料 $P(x, y, z, t)$ 求出希尔伯特变换 $\hat{P}(x, y, z, t)$ 可以求出窄带包络的时空变化, 即求出窄带信号的波包传播。

**2. 3** 波包传播诊断的计算方法

根据前述理论基础的讨论, 可以归纳出波包的传播诊断的具体计算步骤如下:

(1) 通过带通滤波得到窄带信号 $P(x, y, z, t)$。根据所研究的不同窄带问题采取不同的滤波方法, 如研究瞬变波问题可采用高通滤波, 得到高频波带; 如研究 40 d 左右的周期变化采用相应的带通滤波; 如研究准 2 a 周期变化等等。注意所研究的窄带信号是指时间域中的频带信号, 不是空间域的。这种窄带信号可以通过带通滤波而获得, 在气象科学的研究中, 滤波方法已有专门研究[10]。

(2) 求取已知窄带信号的希尔伯特变换 $\hat{P}(x, y, z, t)$。实际上也就是求取已知窄带信号序列的正交序列。通常, 可以利用富氏谱方法或卷积方法求出。这两种方法在许多数学书籍上都可以查到。

(3) 根据式(18) 求出窄带信号的包络即波包 $P_c(x, y, z, t)$ 。

(4) 将求出的各空间点的波包数值, 绘制成波包分布图, 再由波包分布图的连续变化, 可获得并讨论波包传播特征。

## 3　波包传播诊断方法的理想试验

为了验证设计的波包传播诊断方法的可用性, 首先进行了两类理想性试验。

**3. 1**　振荡型扰动的波包传播

设一振荡型扰动为

$$F_A = e^{F(x, y, t)} \quad \cos(2 \quad t) \qquad (19)$$

其中

$$F(x, y, t) = -\left\{[x - r\cos(t - \quad)]^2 + [y - r\cos(t - \quad)]^2\right\} \qquad (20)$$

在试验中, 设 $r = 5$, 　为任何常数, 并加上均匀分布的随机数。

式(5) 表示点振荡, 且没有空间波动移动但有波包传播, 即没有波速而有群速度的情形。这波包有一个中心, 此中心沿圆轨道 $A$ 传播。圆 $A$ 为:

$$\begin{cases} x = r\cos(t - \quad) \\ y = r\sin(t - \quad) \end{cases} \qquad (21)$$

图 2 为波包传播图, 可见传播轨道是一圆, 与理想结果一致。

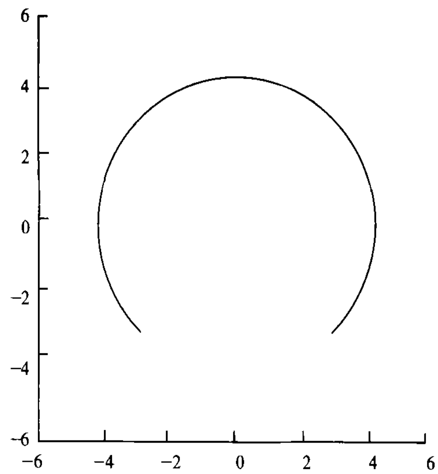



图 2　振荡型扰动的波包传播

**3. 2**　波动型扰动的波包传播

设波动为

$$F_B = a^{F(x, y, t)}\cos(20 \quad t + 4x + 5y) \qquad (22)$$

其中

$$F(x, y, t) = [(x + r\cos t^2) + (y + r\sin t)^2] \quad \{[x + r\cos(t + \quad /3))^2 + [y + r\sin(t + \quad /3)]^2\} \quad \{[x + r\cos(t + 2 \quad /3)]^2 + [y + r\sin(t + 2 \quad /3)]^2\} \qquad (23)$$

以上波动公式说明有 3 个群速度中心都沿着圆

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \qquad (24)$$

的轨道传播, 每个中心间隔为 　/3。在具体试验时, 设 $a = 1.1$, $r = 5$, 试验资料加上少量随机量。波包传播的试验结果( 图 3) 与设想结果是一致的, 有 3 个群速度中心, 间隔 　/3, 并沿着圆传播。

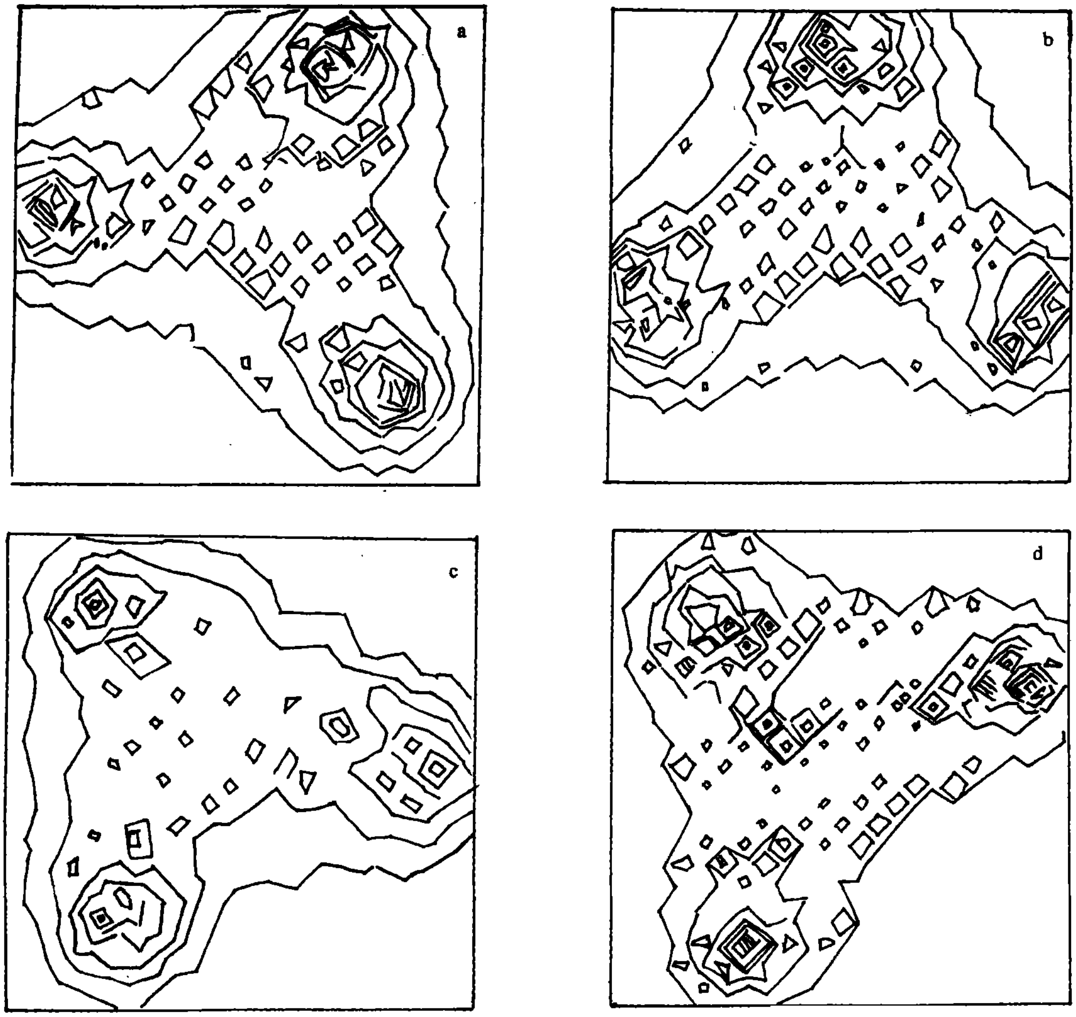



图 3　波动型扰动的波包传播

($a$. $t = dt$　14, $b$. $t = dt$　18, $c$. $t = dt$　22, $d$. $t = dt$　30)

## 4　瞬变波波包传播的简单实例计算

为了研究 WPD 方法在实际的气象要素场中的计算结果的效果,选取了 1993 年 7 月 15~ 18 日北半球 500 hPa 高度场的每天平均资料场( 格点距为 2. 5　2. 5 ) 进行了瞬变波波包传播过程的实际诊断计算。

( 1)　对所选取的 1993 年北半球500 hPa 高度场的每日格点资料按时间序列进行了 4 阶差分高通滤波,获得波动中的瞬变波部分。

( 2)　对每个格点上的时间序列值进行了希尔伯特变换,得出了每个格点上的希尔伯特变换时间序列值。

( 3)　根据式( 16) 求出了每个格点上每天瞬变波的振幅值。

这样,就得到了 1993 年北半球各个格点上每天的瞬变波振幅分布图,它们表征了包络时空图像的演变情况。

选取了从 7 月 15~ 18 日活动于( 42. 5 N, 150 E) , ( 37. 5 N, 178 E) 区域范围内的一次波包传播过程加以说明。其波包传播过程的振幅分布如图 4、图 5。

由图4、图5 可以看出, 15~ 18 日位于( 42. 5 N, 150 E) , ( 37. 5 N, 178 E) 区域的瞬变波中心所移动的位置如表 1 所示。显然, 将这些中心位置连接成一移动轨迹图, 可见其中心的移动路径为西北东南向的一条直线( 图 6) 。

表 1　7 月 15 日~ 7 月 19 日瞬变波中心位置数据

| 时间 | 7 月 15 日 | 7 月 16 日 | 7 月 17 日 | 7 月 18 日 |
|---|---|---|---|---|
| 中心位置 | 42. 5 N, 150 E | 41. 25 N, 160 E | 38. 75 N, 165 E | 37. 5 N, 168 E |

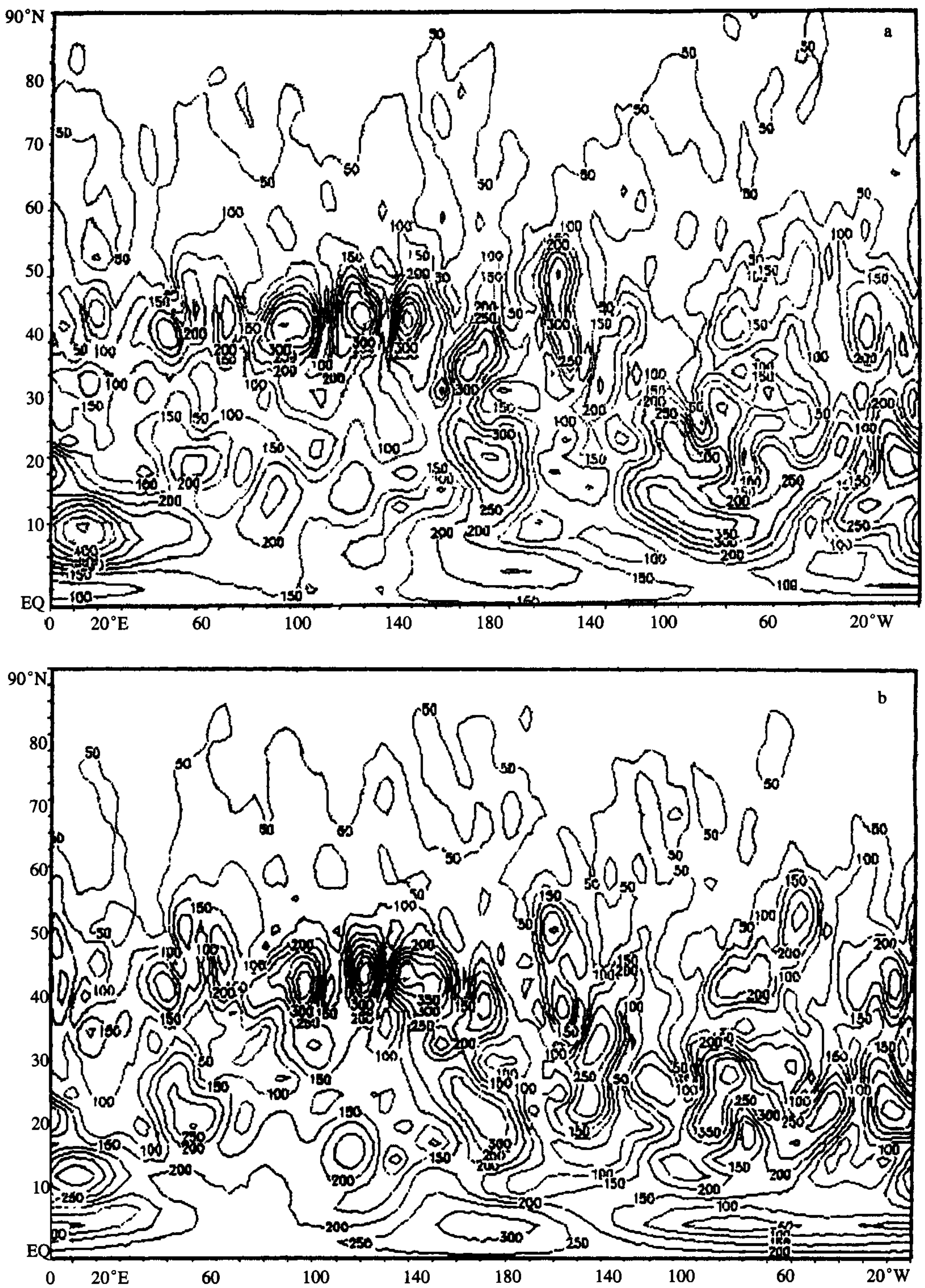
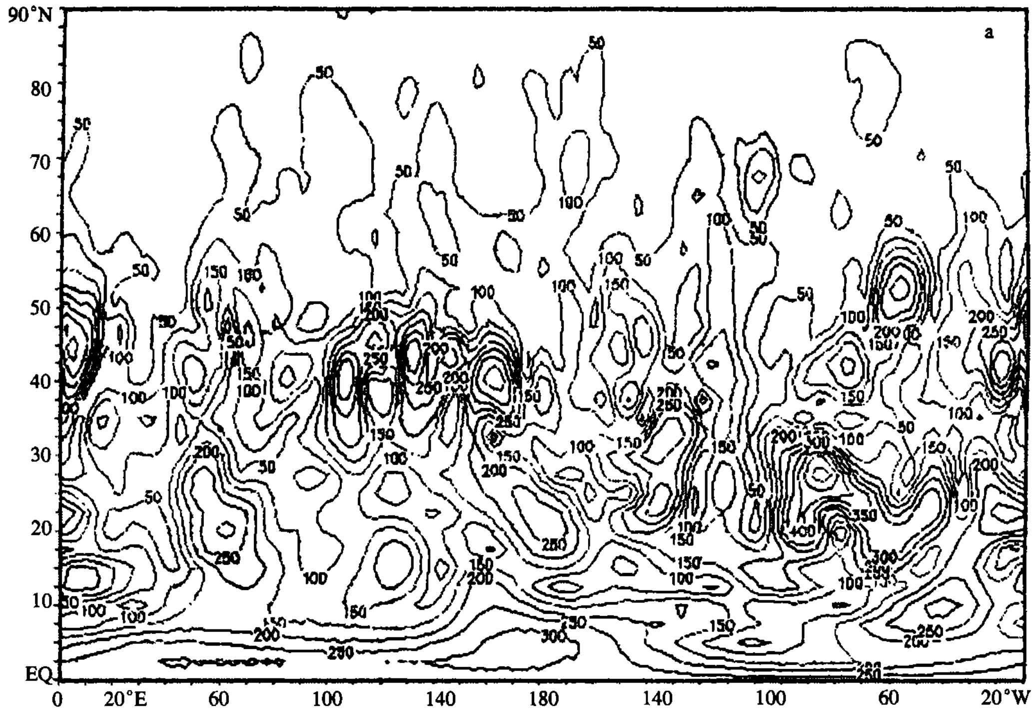



图 4　波包传播过程的振幅分布
(a. 7月 15 日, b/ 7 月 16 日)



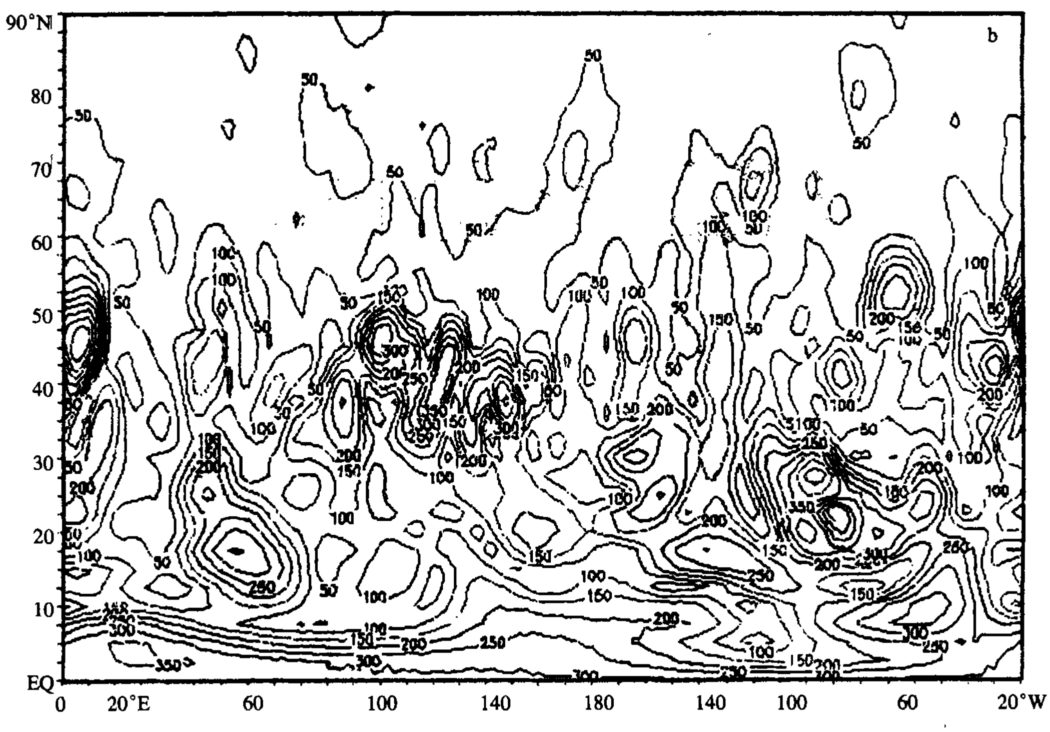




图 5 波包传播过程的振幅分布
(a. 7 月 17 日, b. 7 月 18 日)

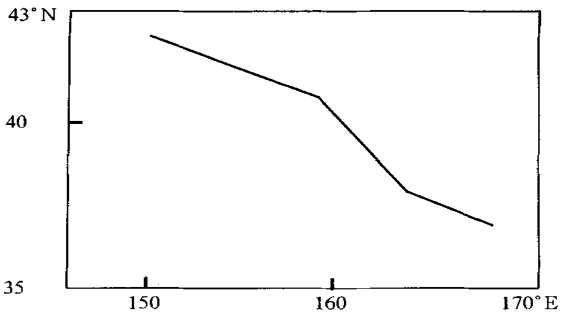



图 6 7 月 15~ 19 日瞬变波中心移动轨迹示意

文中已计算了 15~ 19 日波动的群速度表 2。由表中数据求得其平均速度为 0. 312684 $10^3$ km/ d, 即约为 3. 8 m/ s 左右, 与罗斯贝波速基本相当。

表 2 7 月 15~ 19 日波动的群速度( $10^3$ km/ d)

| 时 间 | 15~ 16 日 | 16~ 17 日 | 17~ 18 日 |
|---|---|---|---|
| 群速度 | 0.455609 | 0. 310661 | 0. 171781 |

## 5 讨 论

文中通过对波包传播诊断方法理论基础和计算方法的讨论以及通过两类理想方案和实际资料的诊断计算结果, 表明文中所设计的波包传播诊断方法是合理的, 能反映实际波包传播的诊断方法。可以广泛地应用于各种物理场的传播特性的分析, 包括各种天气和气候要素场的系统演化过程的研究中。

## 参考文献


1 Yeh T C. On energy dispersion in the atmosphere. J Meteor, 1949, 6, 1~ 6

2 曾庆存. 强迫基流上 Rossy 波包的结构和演变. 中国科学, 1985, 377~ 395

3 Zeng Qingcun. The evolution of Rossy wave packet in a three dimensional baroclinic atmosphere. J Atmos Sci, 1983, 40: 73~ 84

4 缪锦海. 长波不稳定发展的传播与大气环流的季节变化的关系. 气象学报, 1980, 38(3) : 269~ 276

5 Hoskins B J, Karoly D J. The steady linear response of aspherical atmosphere to thermal and orographic foring. J Atmos Sci, 1981, 38: 1179~ 1196

6 黄荣辉等. 关于冬季北半球定常行星波传播另一波导的研究. 中国科学 B, 1983, 940~ 950

7 吴国雄等. 夏季中高纬 500 hPa 高度和海表湿度异常特征及相关分析. 气象学报, 1998, 56( 1) : 46~ 54

8 吴国雄等. 不同波数域中干湿空气的 E- P 剖面和余差环流. 大气科学( 特刊) , 1998, 94~ 106

9 杨福生. 随机信号分析. 北京: 清华大学出版社, 19900. 105~ 106

10 马开玉等主编. 气候统计原理与方法. 北京: 气象出版社, 1993. 381~ 390


# THEORETIC FOUNDATION AND COMPUTATIONAL METHOD ABOUT THE WAVE-PACKET PROPAGATION DIAGNOSIS

Miao Jinhai Xiao Tiangui Liu Zhiyuan

*( Chengdu Institute of Information Technology, Chengdu 610041)*

**Abstract**

A new wave-packet propragation diagnosis method by using the measured data has put forward in this paper. It is a good method in feasibility and universality, proved by computations of ideal and measured data.

**Key words:** Wave-packet propagation diagnosis( WPD) , Wave energy propagation, Transient wave.