

# 飓风中的涡旋罗斯贝波<sup>\*</sup>

钟 科 康建伟 余清平

(解放军理工大学气象学院, 南京, 211101)

## 摘 要

文中从柱坐标系下的正压无辐散涡度方程出发, 用 WKBJ 方法求解方程, 发现在飓风中存在类似于行星罗斯贝波的涡旋罗斯贝波, 这种波的形成主要是由于飓风中基态涡度垂直分量的径向梯度所决定。利用一次飓风过程的精确数值模拟所输出高分辨的资料, 计算了飓风中径向涡度梯度的分布, 指出这类波动主要存在于眼墙和眼心中。波动结构分析表明, 波动能量具有径向频散, 这有可能是飓风暖心结构的一种形成机制。最后用波射线法讨论了定常涡旋罗斯贝波的径向频散。

关键词: 飓风, WKBJ, 涡旋罗斯贝波, 波射线法。

## 1 引 言

飓风是高速旋转的涡旋系统, 它主要是切向运动, 并且具有明显的轴对称特征, 所以在研究飓风时常把轴对称的切向速度分量作为基本气流。无论实际观测结果还是精确的数值模拟都表明飓风所特有的基本气流分布导致了明显的基态涡度垂直分量的径向梯度。在行星罗斯贝波理论<sup>[1]</sup>中, 地球的行星涡度梯度产生了对天气变化具有重要意义的行星罗斯贝波。在相似机制的作用下, 飓风的径向涡度梯度也应该能产生类似于行星罗斯贝波的波动。MacDonald<sup>[2]</sup>首先把飓风中的这种有可能存在的波动称为涡旋罗斯贝波, 并把飓风中向外传播的螺旋带定性描述为涡旋罗斯贝波的传播。Guinn 和 Schubert<sup>[3]</sup>用涡旋罗斯贝波波裂解释了飓风螺旋雨带的生成。Montgomery 和 Kallenbach<sup>[4]</sup>用 WKB 方法研究了正压大气中类似于飓风的圆形涡旋中涡旋罗斯贝波的结构, 并指出涡旋罗斯贝波和基本气流间的相互作用是飓风增强和结构变化的一种可能机制。

上述工作从实际观测、理论分析和数值实验的角度肯定了飓风中涡旋罗斯贝波的存在, 并认为产生涡旋罗斯贝波的关键在于飓风基态径向涡度梯度的存在。但是由于飓风观测资料难于获得和观测资料的分辨率不高, 这些工作没有给出飓风基态径向涡度梯度的实际分布, 也就不能说明涡旋罗斯贝波

在飓风中的存在区域和具体结构特征。想通过提高观测资料的分辨率来解决这个问题是很困难的。然而, 发展越来越完善的数值模拟却是解决这个问题的一个方法。如果利用模拟结果较好的模式输出资料代替实际观测资料, 计算出飓风基本场中的径向涡度梯度, 并进一步计算出飓风中涡旋罗斯贝波的结构特征, 这对于理解飓风中的涡旋罗斯贝波和讨论它对飓风的作用具有重要的意义。

## 2 理论推导

Liu 和 Zhang 等<sup>[5]</sup>在 1995 年用美国 NCAR 的中尺度有限区域模式 MM5 成功地模拟了 1992 年登陆美国的飓风 Andrew。利用该次模拟的高时空分辨率的模式输出可以计算出飓风以切向平均的切向速度为基流的基态涡度垂直分量的径向梯度。图 1a, b, c 分别是 9 时次平均的 800, 500 和 200 hPa 3 个层次上的基态径向涡度梯度。在整个对流层, 眼心和眼墙都具有明显的基态涡度梯度, 而在眼墙之外涡度梯度接近于 0。尽管在对流层高层(200 hPa), 涡度梯度的量值比较小, 但眼墙和眼心中的涡度梯度仍比眼墙外的要明显地大。涡度梯度的量级为  $10^{-7} \sim 10^{-8}/\text{ms}$ , 这比地球旋转所产生的行星涡度梯度( $10^{-11}/\text{ms}$ )大了 3 个量级。

飓风是柱状的涡旋系统, 所以下面的讨论将在柱坐标下进行。由于飓风各个高度层的基本涡度梯

\* 初稿时间: 2001 年 5 月 17 日; 修改稿时间: 2001 年 9 月 17 日。

度的分布特征相似, 所以针对涡旋罗斯贝波这个问题而言, 可以把飓风作为正压大气来处理。考虑到飓风的水平尺度较小(数百到千公里), 讨论中取  $f$  平

面近似。

在考虑只有轴对称切向基流时, 柱坐标下的  $f$

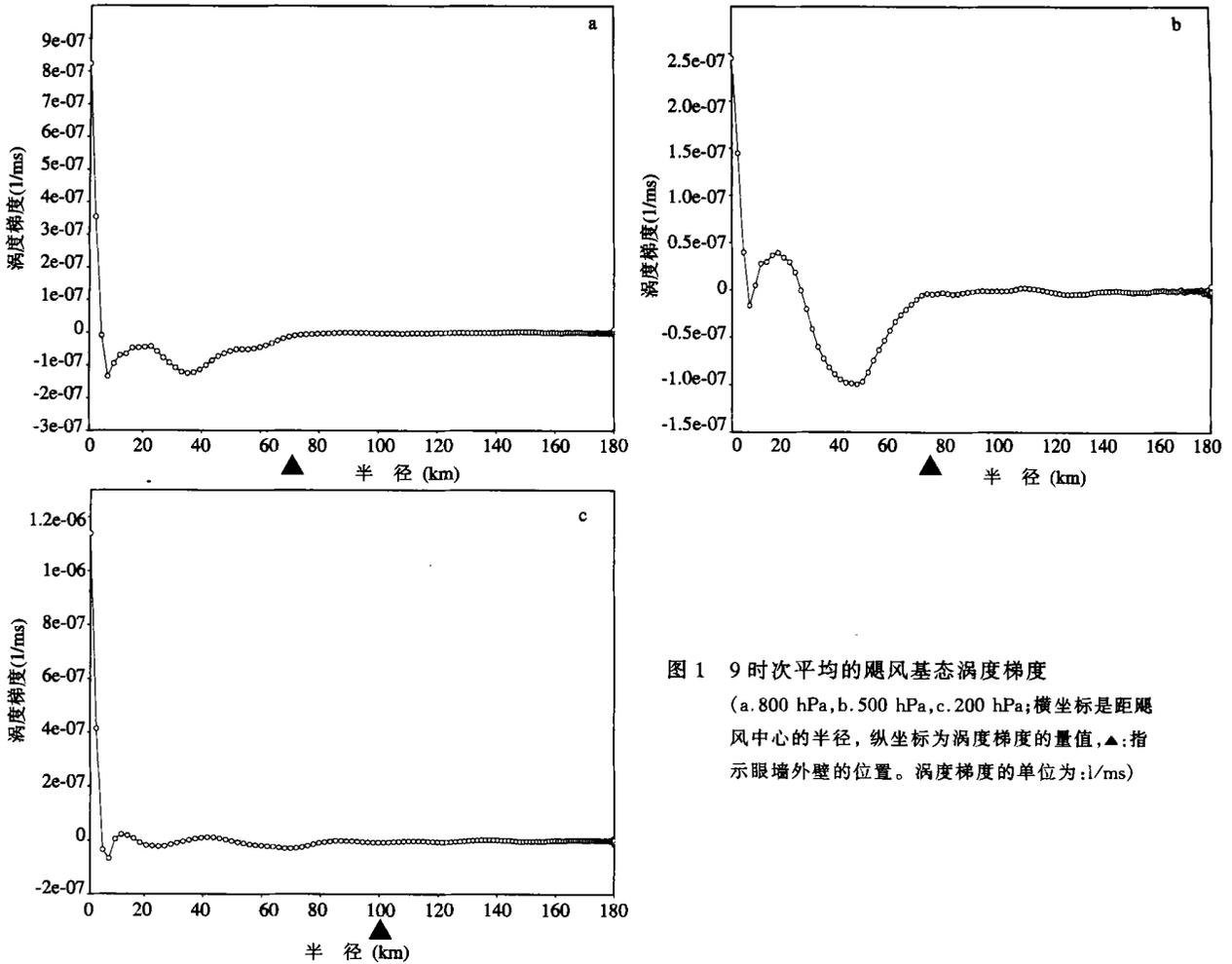


图 1 9 时次平均的飓风基态涡度梯度

(a. 800 hPa, b. 500 hPa, c. 200 hPa; 横坐标是距飓风中心的半径, 纵坐标为涡度梯度的量值, ▲: 指示眼墙外壁的位置。涡度梯度的单位为: 1/ms)

平面上粘正压无辐散涡度方程的线性化形式为:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\bar{V}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \zeta - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \frac{d\bar{\eta}}{dr} = 0 \quad (1)$$

上式中  $\bar{V}$  为轴对称切向基流,  $\Psi$  为扰动流函数。  $\zeta = \nabla^2 \Psi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2}$  为相对涡度的垂直扰动分量,  $\bar{\eta} = f + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \bar{rV}$  是基本气流的绝对垂直涡度。由前面的计算可知基态涡度的径向梯度至少比行星涡度的径向梯度大 3 个量级, 在  $\frac{d\bar{\eta}}{dr}$  中可把行星涡度的径向梯度部分略去。

下面用 WKBJ 方法求解方程(1)。

引入流函数的缓变波包解:

$$\Psi = A(R, \Theta, T) e^{ia(r, \theta, t)}$$

式中  $(R, T) = \varepsilon(r, t)$ ,  $\Theta = \theta$ , 其中  $\varepsilon$  是小于 1 的参

数。

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \left[ \frac{\partial A}{\partial \Theta} + i l' A \right] e^{ia(r, \theta, t)}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \left[ \varepsilon \frac{\partial A}{\partial R} + ik A \right] e^{ia(r, \theta, t)}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[ \varepsilon \frac{\partial A}{\partial T} + i \bar{\omega} A \right] e^{ia(r, \theta, t)}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} = \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial \Theta^2} + i(2l' \frac{\partial A}{\partial \Theta} + \frac{\partial l'}{\partial \Theta} A) - l^2 A \right] e^{ia(r, \theta, t)}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} = \left[ \varepsilon \frac{\partial^2 A}{\partial R^2} + i\varepsilon(2k \frac{\partial A}{\partial R} + \right.$$

$$\left. \frac{\partial k}{\partial R} A) - k^2 A \right] e^{ia(r, \theta, t)}$$

以上各式中  $k = \frac{\partial a}{\partial r}$ ,  $l' = \frac{\partial a}{\partial \theta}$ ,  $\bar{\omega} = \frac{\partial a}{\partial t}$  分别是径向波数、螺旋臂数和圆频率。则

$$\zeta = \left[ \left( \frac{\varepsilon}{r} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{ik}{r} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} + \right.$$

$$i\varepsilon(2k \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial k}{\partial R}) + i \frac{2l'}{r^2} \frac{\partial}{\partial \Theta} + \frac{i}{r^2} \frac{\partial l'}{\partial \Theta} - (k^2 + \frac{l'^2}{r^2}) A e^{i\alpha(r,0,t)}$$

即

$$\zeta = \left[ \left( \frac{\varepsilon}{R} (\varepsilon \frac{\partial}{\partial R} + ik) + \varepsilon^2 (\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}) + i\varepsilon(2k \frac{\partial}{\partial R} + 2l \frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\partial k}{\partial R} + \frac{\partial l}{\partial Y}) - (k^2 + l^2) \right) A e^{i\alpha(r,0,t)} \right] \quad (2)$$

其中切向波数  $l = \frac{l'}{r}$ ,  $dY = R d\Theta$ 。又有

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\bar{V}}{r} \frac{\partial}{\partial \Theta} \right) = \left[ \varepsilon \left( \frac{\partial}{\partial T} + \bar{V} \frac{\partial}{\partial Y} \right) + i(\bar{V}l - \omega) \right] \quad (3)$$

把式(2), (3)代入(1), 得:

$$\left[ \varepsilon \left( \frac{\partial}{\partial T} + \bar{V} \frac{\partial}{\partial Y} \right) + i(\bar{V}l - \omega) \right] \cdot \left[ \frac{\varepsilon}{R} (\varepsilon \frac{\partial}{\partial R} + ik) + \varepsilon^2 (\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}) + i\varepsilon(2k \frac{\partial}{\partial R} + 2l \frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\partial k}{\partial R} + \frac{\partial l}{\partial Y}) - (k^2 + l^2) \right] \cdot A e^{i\alpha(r,0,t)} - \frac{d\bar{\eta}}{dr} (\varepsilon \frac{\partial}{\partial Y} + il) A e^{i\alpha(r,0,t)} = 0 \quad (4)$$

## 2.1 涡旋罗斯贝波及其能量的径向频散

令  $A = A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots$ , 代入式(4), 取0级近似, 得到频散关系:

$$\omega = \bar{V}l - \frac{(-\frac{d\bar{\eta}}{dr})l}{K^2} \quad (5)$$

其中  $K^2 = k^2 + l^2$  是全波数。

上式与行星罗斯贝波的频散关系具有一致的形式, 只是行星涡度的径向梯度即  $\beta$  项所起的作用由飓风基态的垂直涡度径向梯度来代替。这说明飓风的基态为产生类似于行星罗斯贝波的波动提供了条件, 飓风中可以有涡旋罗斯贝波存在。

由前面计算得到的飓风基本涡度梯度可知, 涡度梯度在眼心和眼墙具有较大的量值, 而在眼墙外涡度梯度约为0。由于眼墙外飓风的基态不再存在产生涡旋罗斯贝波的条件, 涡旋罗斯贝波将主要在眼心和眼墙内产生和传播。

由式(5)可得到径向群速

$$C_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{2(-\frac{d\bar{\eta}}{dr})lk}{K^4} \quad (6)$$

和切向群速

$$C_{gY} = \frac{\partial \omega}{\partial l} = \frac{\omega}{l} + \frac{2(-\frac{d\bar{\eta}}{dr})l}{K^4} \quad (7)$$

式(6)说明由于基本气流垂直涡度径向梯度的存在, 飓风中的这种涡旋罗斯贝波有能量的径向传播, 这种能量的径向传播可能是产生飓风暖心结构的一个重要原因。因为飓风的最强的凝结潜热释放位于眼墙中, 而温度最高的区域却是眼心, 涡旋罗斯贝波可能把能量从眼墙传到了眼心。这种可能性有待于用时空分辨率更高的数值模拟结果来验证。图2是800 hPa切向波数为1, 径向波数为-1的群速。图中从眼墙外壁到眼心的大部分区域有负的群速, 即有向内的能量传播。在计算群速时, 取径向波数为-1是因为考虑到飓风眼墙是各种运动最剧烈的地方, 从而也是扰动的主要源地, 由于眼墙外缺少波动传播的机制, 从扰源向外传播的波动将被截断, 扰动将主要向内传播。

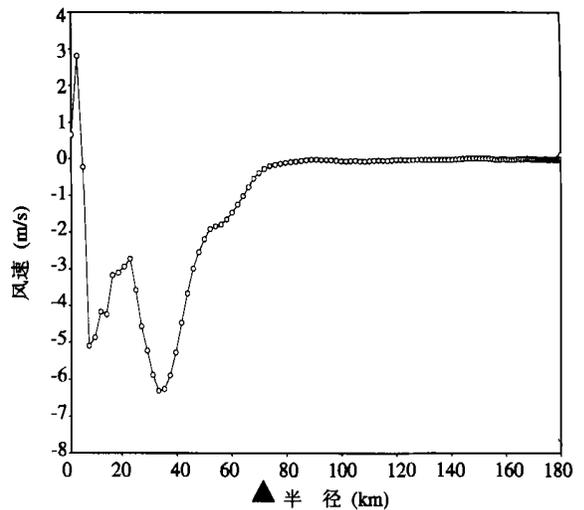


图2 800 hPa切向波数为1, 径向波数为-1的群速 (横坐标是距飓风中心的半径, 纵坐标为涡度梯度的量值, ▲指示眼墙外壁的位置. 群速的单位: m/s)

## 2.2 波动的平均波能方程

$A = A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots$ , 代入式(4)后, 取1级近似, 得振幅演变方程:

$$\left[ - \left( \frac{\partial}{\partial T} + \bar{V} \frac{\partial}{\partial Y} \right) K^2 \right] A_0 + i(\bar{V}l - \omega) \cdot \left[ \frac{ik}{R} + i(2k \frac{\partial}{\partial R} + 2l \frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\partial k}{\partial R} + \frac{\partial l}{\partial Y}) \right] A_0 - \frac{d\bar{\eta}}{dr} \frac{\partial A_0}{\partial Y} = 0$$

$$\text{即: } \left[ \left( \frac{\partial}{\partial T} + \bar{V} \frac{\partial}{\partial Y} \right) K^2 A_0 + (\omega - \bar{V}l) \cdot \right. \\ \left. \left[ \frac{k}{R} + 2k \frac{\partial}{\partial R} + 2l \frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\partial k}{\partial R} + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\partial l}{\partial Y} \right] A_0 + \frac{d\bar{\eta}}{dr} \frac{\partial A_0}{\partial Y} = 0 \right.$$

从上式出发, 按照 WKB 方法的一般步骤可以推导出涡旋罗斯贝波的平均波能方程:

$$\frac{\partial E}{\partial T} + \frac{\partial C_{gY}E}{\partial R} + \frac{\partial C_{gY}E}{\partial Y} = \frac{1}{2}kl \frac{\partial \bar{V}}{\partial R} A_0^2 \quad (8)$$

其中  $E = \frac{K^2}{4} A_0^2$  是涡旋罗斯贝波的一个周期内的单位质量的平均波动能量。

由式(8)可知, 飓风的基流对涡旋罗斯贝波发展所起的作用类似于急流对行星罗斯贝波发展所起的

作用: 在最大切向风半径(the Radius of Maximum Wind, RMW) 两侧, 由于  $\frac{\partial \bar{V}}{\partial R}$  具有相反的符号, 扰动将具有不同的发展趋势。例如对于飓风中逆时针( $l > 0$ )、向内传播( $k < 0$ )的涡旋罗斯贝波, 在 RMW 以外( $\frac{\partial \bar{V}}{\partial R} < 0$ ) 扰动发展, 而在 RMW 以内( $\frac{\partial \bar{V}}{\partial R} > 0$ ) 扰动衰减, 扰动能量向基本场能量转化。

### 3 飓风中定常涡旋罗斯贝波的径向频散

飓风的切向运动、径向运动和垂直上升运动的极值中心准定常地集中于眼墙中<sup>[6]</sup>(图 3)。根据这种情况可把眼墙看作一个定常的扰源, 从眼墙中激发出来的波动沿径向和切向定常地传播。可以用研

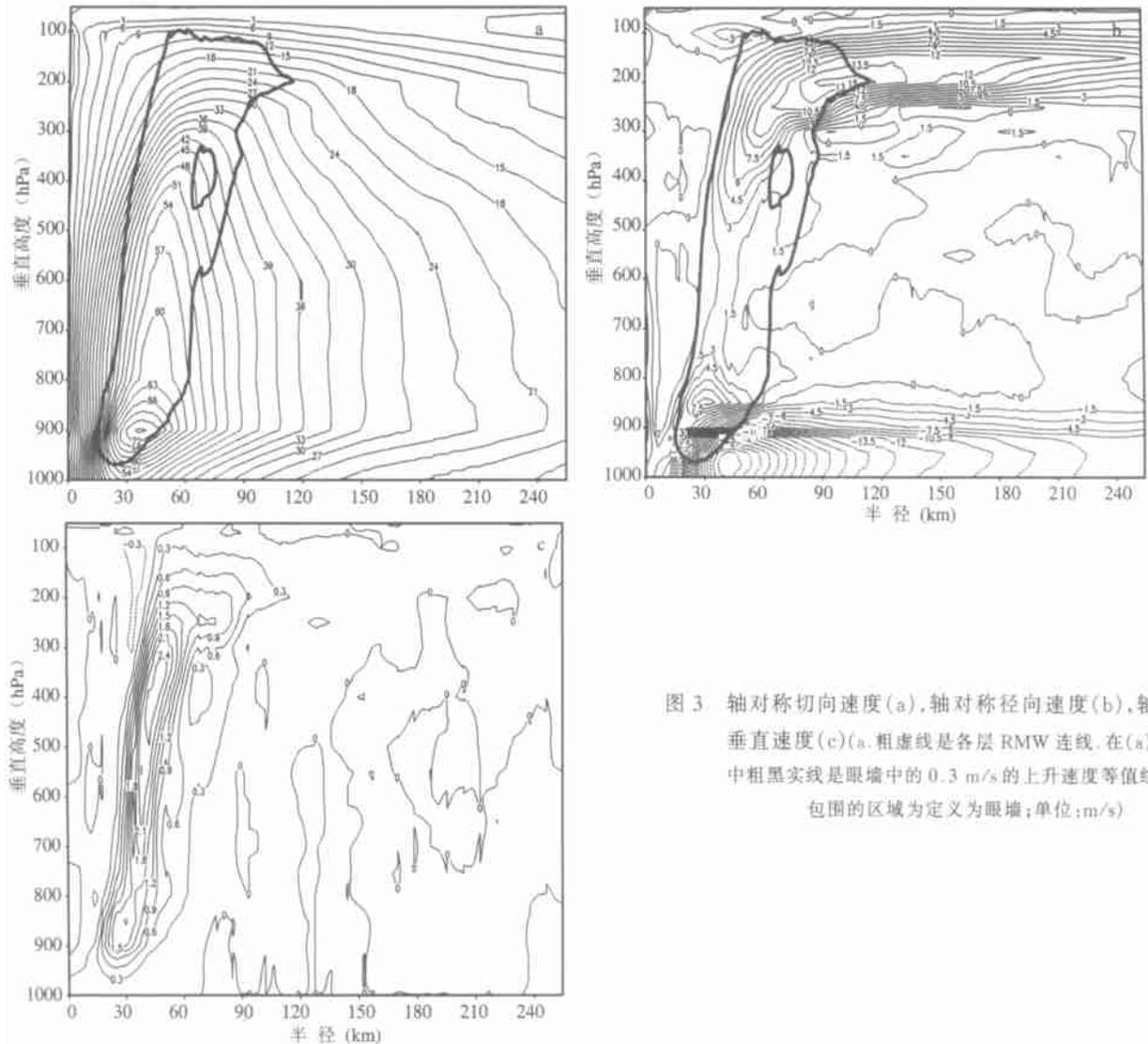


图 3 轴对称切向速度(a), 轴对称径向速度(b), 轴对称垂直速度(c)(a. 粗虚线是各层 RMW 连线, 在(a)和(b)中粗黑实线是眼墙中的 0.3 m/s 的上升速度等值线, 其包围的区域为定义为眼墙; 单位: m/s)

究定常行星罗斯贝波的波射线法来讨论飓风中的定常罗斯贝波的径向频散。为了计算和讨论的简便,用公式

$$\bar{V} = V_{\max} \frac{2r'}{1+r'^2} \quad (9)$$

来表示飓风的基本气流。

式(9)中,  $r'$  是距飓风中心的半径的无量纲量,  $V_{\max}$  是飓风在特定高度层上的切向基流的最大值。无量纲半径  $r = R_{\text{RMW}} r'$  ( $R_{\text{RMW}}$  为最大切向风半径):。式(9)描述的基本气流和 800 hPa 的实际基本气流如图 4 所示,从图中可以看出式(9)能比较真实地描述出飓风的实际基本气流,所以用式(9)表示飓风的基本气流是合理的,根据式(9)可得

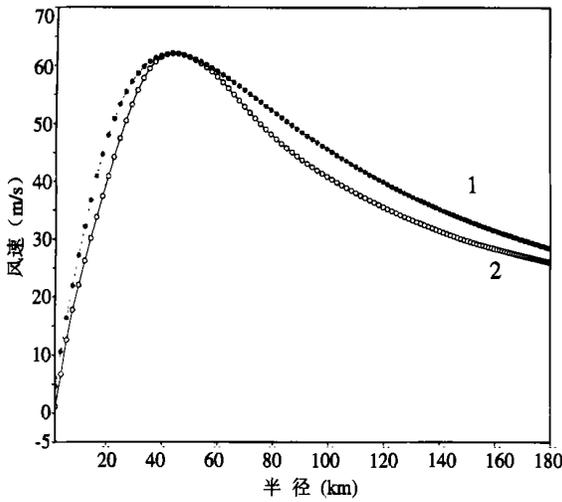


图 4 式(9)计算的基本气流(曲线 1)和实际的 800 hPa 的基本气流(曲线 2)(基本气流的单位: m/s)

基本气流的涡度

$$\bar{\eta} = \frac{1}{r} \frac{\partial r \bar{V}}{\partial r} + f = \frac{V_{\max}}{R_{\text{RMW}}} \frac{4}{(1+r'^2)^2} + f$$

涡度梯度

$$-\frac{d\bar{\eta}}{dr} = \frac{V_{\max}}{R_{\text{RMW}}^2} \frac{16r'}{(1+r'^2)^3} \quad (10)$$

这里也同样省略了行星涡度的径向梯度。对于定常波,  $\omega = 0$ , 由式(5), (6)和(7), 得

$$K_s^2 = \frac{dr}{V} = k^2 + l^2, \quad k = \sqrt{K_s^2 - l^2}$$

$$C_{gr} = \frac{2(\bar{r} \frac{d\bar{\eta}}{dr})lk}{K^4}$$

$$C_{gY} = \frac{2(\bar{r} \frac{d\bar{\eta}}{dr})l^2}{K^4}$$

把以上各式代入波射线方程为:  $\frac{dr}{r d\theta} = \frac{C_{gr}}{C_{gY}}$ , 得

$$\frac{dr}{r d\theta} = \frac{k}{l} = \frac{\sqrt{K_s^2 - l^2}}{l} = \sqrt{\frac{d\bar{\eta}}{dr} - 1}$$

把式(9)和(10)代入上式, 得

$$\frac{dr}{r d\theta} = \sqrt{\frac{1}{R_{\text{RMW}}^2} \frac{8}{l^2(1+r'^2)^2} - 1}$$

为了保证上式的根号下的式子大于 0, 即能量的径向频散不被截断, 并且定常扰动能量从  $R_{\text{RMW}}$  处发出, 在  $R_{\text{RMW}}$  处激发的扰动只能取 1 波, 即  $l = \frac{1}{R_{\text{RMW}}}$ , 并且  $r'$  要满足  $\frac{8}{(1+r'^2)^2} > 1$ , 即  $r' < \sqrt{2\sqrt{2}-1}$ . 把  $l$  代入上式, 并把无量纲半径转化为无量纲量, 得:

$$\frac{dr'}{d\theta} = r' \sqrt{\frac{8}{(1+r'^2)^2} - 1} \quad (12)$$

积分上式可得到  $r'$  和  $\theta$  之间得关系式:

$$\theta = \frac{1}{2} \arcsin \frac{r'^2 + 1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{4\sqrt{7}} \ln \left| \frac{-7 \tan \arcsin \frac{r'^2 + 1}{\sqrt{8}} + \sqrt{7}}{-7 \tan \arcsin \frac{r'^2 + 1}{\sqrt{8}} - \sqrt{7}} \right| + \frac{1}{4\sqrt{7}} \ln \left| \frac{\sqrt{8 - (r'^2 + 1)^2} - \sqrt{7}}{\sqrt{8 - (r'^2 + 1)^2} + \sqrt{7}} \right| \quad (13)$$

根据该解析式, 可以作出定常涡旋罗斯贝波能量传播的轨迹(图 5)。图中能量从  $R_{\text{RMW}}$  处向外和

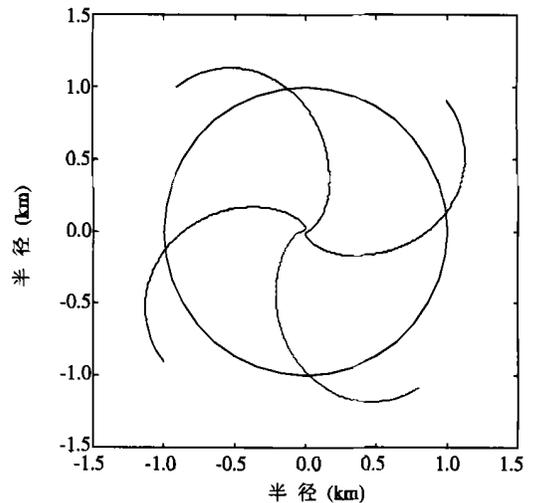


图 5 定常罗斯贝波的径向频散

(图中(0,0)点表示飓风中心,半径为 1 的闭合圆形表示与飓风中心距离为 RMW 的所有点的集合,四条非闭合的圆形轨迹是初始扰动位于 RMW 的不同位置的定常涡旋罗斯贝波的能量传播轨迹)

向内传播, 向外的能量在传播一定距离后被截断, 而向内的能量能够传播至眼心, 定常波能量传播的轨迹近似于一个大圆。同非定常波动一样, 定常涡旋罗斯贝波能把飓风眼墙产生的扰动能量向内传播至眼心。

## 4 结 论

由于飓风中存在产生类似于行星罗斯贝波的波动的机制: 基态涡度垂直分量的径向涡度梯度, 所以从 Macdonald<sup>[1]</sup>的工作开始, 已有很多研究<sup>[2~4]</sup>集中在讨论飓风中涡旋罗斯贝波的存在及其对飓风发生、发展所起的作用。

文中基于较高分辨率的模式输出资料, 计算了飓风基态的涡度梯度。发现能够产生涡旋罗斯贝波的涡度梯度只在眼心和眼墙具有较大的量值, 而在

眼墙外接近于 0。根据计算得到的飓风基态涡度径向梯度的实际分布, 文中从能够描述飓风的物理过程的柱坐标下正压无辐散涡度方程出发, 用 WKBJ 方法, 求解出了涡旋罗斯贝波的频散关系。

波动结构分析表明涡旋罗斯贝波的能量可在径向传播, 这种能量径向传播可能是飓风暖心结构形成的一种机制。飓风的基流对涡旋罗斯贝波发展具有类似于急流对行星罗斯贝波发展的作用, 这导致了在 RMW 两侧扰动具有不同的发展趋势。

由于飓风眼墙可看作一个剧烈而又定常的扰源, 所以文中用波射线法讨论了定常涡旋罗斯贝波的径向能量频散, 发现从眼墙中 RMW 处激发出来的定常波动除 1 波扰动外其余波动都被截断, 1 波扰动在向眼心传播的过程中其轨迹近似于一个大圆。

## 参考文献

- 1 Rossby C G. Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacement of semi-permanent center of action. *J Mar Res*, 1939, 2: 38~ 55
- 2 MacDonald N J. The evidence for the existence of Rossby-like waves in the hurricane vortex. *Tellus*, 1968, 20: 138~ 150
- 3 Guinn T A, Schubert W H. Hurricane spiral bands. *J Atmos Sci*, 1993, 50: 3380~ 3403
- 4 Montgomery M T, Kallenbach R J. A theory for vortex Rossby-waves and its application to spiral bands and intensity changes in hurricanes. *Quart J Roy Meteor Soc*, 1997, 123: 435~ 465
- 5 Liu Y B, Zhang D L, Yau M K. A multiscale numerical study of Hurricane Andrew (1992), Part I: An explicit simulation. *Mon Wea Rev*, 1997, 125: 3075~ 3091
- 6 钟科. 飓风 Andrew(1992) 的中尺度扰动结构和动力诊断分析: [学位论文]. 南京: 中国人民解放军理工大学气象学院, 2000. 59pp

## VORTEX ROSSBY WAVES IN HURRICANE

Zhong Ke Kang Jianwei Yu Qingping

(The Meteorological Institute, PLA University of Science and Technology, Nanjing 211101)

### Abstract

Through solving the nondivergent inviscid linear vorticity equation in cylindrical coordination of barotropic atmosphere with WKBJ method, the authors point out that one kind of wave, named vortex Rossby wave, which is similar to planetary wave, exists in hurricane, its formation is due to the gradient of vertical vorticity component of basic state. According to the distribution of the radial gradient of vertical vorticity component of hurricane, which is calculated with high-resolution output from one explicit numerical simulation of a hurricane case, this kind of wave mainly emerges in eye and eyewall. At the same time, the analysis of wave structure declares that there is radial dispersion of the disturbing energy, which may be one of the formation mechanisms for warm core in hurricane. Finally, the radial dispersion of stationary vortex Rossby wave is discussed with wave ray method.

**Key words:** Hurricane, WKBJ, Vortex Rossby wave, Wave ray method.