

# 初始扰动垂直结构对热带斜压大气 半地转适应过程的影响<sup>①</sup>

林永辉

(中国气象科学研究院灾害天气研究中心, 北京, 100081)

卢伟

(解放军理工大学气象学院, 南京, 211101)

## 摘要

文中利用一个半位势涡度时间不变式对热带斜压大气地转适应过程中的尺度准则进行了研究。结果表明: 对深厚系统而言, 只要初始扰动的纬圈特征尺度足够大, 则不论其初始扰动的经圈特征尺度多大, 适应后的压力场的变化都很大, 而纬圈流几乎维持不变, 压力场向纬圈流适应; 至于浅薄系统, 对纬圈和经圈特征尺度都很大的初始扰动而言, 适应后的压力场易于维持, 主要是纬圈流向压力场适应; 但当初始扰动呈现出纬圈型扰动特征时, 适应后的压力场变化也很大, 压力场向纬圈流适应。

关键词: 斜压适应, 尺度准则, 垂直结构。

## 1 引言

地转适应过程是大气运动中一种最基本的动力过程, 中高纬地区地转适应过程的建立特点及适应尺度准则目前已基本清楚了<sup>[1,2]</sup>。在热带地区, 由于柯里奥利参数较小, 过去很少有人讨论其地转适应问题。但人们注意到, 热带地区大气的纬圈风并不小, 而且经圈方向的压力梯度并不大, 因此至少在纬圈方向出现半地转平衡是完全可能的。利用浅水方程对这一问题的研究表明<sup>[3,4]</sup>, 热带大气更容易建立起纬圈方向的半地转平衡关系, 当此平衡关系遭到破坏后, 同样将激发出重力惯性波, 随着重力惯性波的频散, 风、压场之间将重新建立起纬圈方向的半地转平衡关系; 而且适应后的场将遵循半位势涡度时间不变式。

对热带斜压大气地转适应问题, 巢纪平<sup>[5]</sup>最近对其进行了讨论, 导出了热带斜压大气地转适应过程遵循的若干动力学约束关系, 指出在赤道 $\beta$ 平面近似下, 如果不考虑行星涡度梯度的影响, 则热带运动的最基本状态是地转的、水平的、无辐散的但可以是层结的。另一方面, 对热带正压大气地转适应过程中尺度准则的研究<sup>[4]</sup>表明, 其尺度准则与中纬度正压大气的尺度准则相比具有独特之处, 当初始扰动呈现出纬圈运动特征时, 气压场总是发生变化以适应速度场。由于热带斜压大气在空间分布上是三维的, 其初扰动的结构不同于

<sup>①</sup> 初稿时间: 2000年3月29日; 修改稿时间: 2000年9月19日。  
资助课题: 国家自然科学基金项目(49775260)。

正压大气, 因此本文对初始扰动的垂直结构对热带斜压大气半地转适应过程的影响问题进行了研究。

## 2 初始方程

赤道  $\beta$  平面近似下, Boussinesq 流体的基本运动方程为:

$$\epsilon_1 \frac{\partial u}{\partial t} - \beta y v = - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{P}{\rho_0} \right) \quad (1)$$

$$\epsilon_2 \frac{\partial v}{\partial t} + \beta y u = - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{P}{\rho_0} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\theta}{\theta_0} g = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{P}{\rho_0} \right) \quad (4)$$

$$\epsilon_3 \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{d\theta}{dz} w = 0 \quad (5)$$

式中,  $\rho_0$  和  $\theta_0$  分别为背景场的密度和位温, 其它符号为常用。 $\epsilon_i (i = 1, 2, 3)$  为引进的标识符, 其值取 1 或 0。当取值为 0 时, 分别表示运动是地转和水平无辐散的。

引进重力波波速:

$$c = \left( \frac{g}{\theta_0} \frac{d\theta_0}{dz} H^2 \right)^{1/2} \quad (6)$$

其中,  $H$  为大气的特征厚度。引进如下的特征量:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x, y) = \left( \frac{c}{2\beta} \right)^{1/2} (x, y) \\ z = H z \\ t = (2\beta c)^{-1/2} t \\ (u, v) = c(u, v) \\ w = (2\beta c)^{1/2} H w \\ \frac{P}{\rho_0} = c^2 \varphi \\ \theta = \frac{d\theta_0}{dz} H \theta \end{array} \right. \quad (7)$$

将式(7)代入式(1)~(5)得无量纲方程(略去“'”号):

$$\epsilon_1 \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} y v = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (8)$$

$$\epsilon_2 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} y u = - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (9)$$

$$\epsilon_3 \frac{\partial \theta}{\partial t} + w = 0 \quad (10)$$

$$\theta = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

由式(10)~(12)知:

$$\epsilon_3 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) - \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (13)$$

由式(8),(9),(13)可导出对单一变量  $v$  的方程:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2 \partial z^2} + \epsilon_1 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \epsilon_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \epsilon_3 \frac{1}{4} y^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (14)$$

容易看出,这就是热带斜压大气的 Matsuno<sup>[6]</sup>方程。它包括高频的重力惯性波、低频的 Rossby 波,以及重力惯性-Rossby 混合波和非频散的 Kelvin 波。对于研究象热带地转适应的快过程而言,可采取保留行星涡度的经圈不均匀性(赤道  $\beta$ 平面近似),但不引进其梯度(即略掉上式中的最后一项),事实上这是过虑掉低频 Rossby 波的一种方法。最近,巢纪平<sup>[7]</sup>指出不作这样的假设,把快的适应过程和慢的演变过程统一起来处理亦是完全可行的,只不过上述近似方法显得简单罢了。

### 3 纬圈半位势涡度时间不变式

略去式(14)中的最后一项,对时间积分一次并利用式(8),(9),(13)后得:

$$\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2 \partial z^2} + \epsilon_1 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \epsilon_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \epsilon_3 \frac{1}{4} y^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = G(x, y, z, 0) \quad (15)$$

其中

$$G(x, y, z, 0) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \epsilon_3 \frac{1}{2} y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \left( \epsilon_2 \frac{\partial v}{\partial x} - \epsilon_1 \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]_{t=0} \quad (16)$$

巢纪平<sup>[5]</sup>对上述方程进行了详细的讨论,指出在初始位势涡度的纬圈梯度作用下,经圈风的时间导数将按  $t^{-1/2}$  次幂衰减,即重力惯性波被迅速频散掉,热带大气将建立起纬圈半地转平衡关系。此时,纬圈风满足:

$$\frac{1}{2} y u = - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y} \quad (17)$$

场适应后的经圈风为(略去标识符且式(15)中  $\epsilon = 0$ ):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{4} y^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right]_{t=0} \quad (18)$$

注意到,初始时刻场可以是非地转的。

由式(8),(13),(17),(18)可知适应后的压力场变化为:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{1}{4} y^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \left[ \frac{1}{2} y \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{4} y^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right]_{t=0} \quad (19)$$

上式就是热带斜压大气纬圈半地转位势涡度时间不变式。推导上式时,为保持一致采取了前面的近似方法。垂直方向的运动遵循 Tayer-Proudman 定理<sup>[5]</sup>,即运动是准水平的。

### 4 热带斜压大气半地转适应过程的尺度准则

对中纬度斜压大气地转适应过程的研究<sup>[1]</sup>指出:由于初始扰动的垂直结构不同,其与

中纬度正压大气的适应过程并不完全一致; 在深厚的系统中速度场容易维持, 气压场发生变化以适应速度场; 在浅薄的系统中则气压场容易维持, 速度场发生变化以适应气压场。下面来讨论热带斜压大气半地转适应过程的相应尺度准则。

对纬圈半地转适应运动而言, 当初始的位势涡度场给定后, 适应后的纬圈风、经圈风和压力场分别由式(17), (18), (19)给出。为方便计, 设初始的纬圈风、经圈风和压力场分别为:

$$t = 0, \quad \begin{cases} u = v = 0 \\ \Phi = A e^{-\alpha x^2 - \beta y^2 - \gamma(z-z_0)^2} \end{cases} \quad (20)$$

其中,  $\alpha = (L_0/L_x)^2$ ,  $\beta = (L_0/L_y)^2$ ,  $\gamma = (H/L_z)^2$ ,  $L_0$  和  $H$  分别为赤道 Rossby 变形半径和大气的特征厚度,  $L_x$ ,  $L_y$  和  $L_z$  分别为  $x$ ,  $y$  和  $z$  方向的运动尺度,  $\gamma$  取值小(大) 时表明扰动为深厚系统(浅薄系统),  $A$  为振幅,  $z_0$  取值不同表示扰动的位置不同。

将  $u$ ,  $v$  和  $\Phi$  在  $y$  方向用抛物圆柱函数(即 Weber 函数)展开, 即:

$$(u, v, \Phi) = \sum_{n=0} [\omega^n(z), x v^n(z), \Phi(z)] e^{-\alpha x^2} D_n(y) \quad (21)$$

式中,  $D_n(y)$  为  $n$  阶 Weber 函数。

将式(20), (21)代入式(17), (18), (19)中并利用 Weber 函数的性质取最低阶近似得:

$$u_0 = \Phi \quad (22)$$

$$\frac{d^2 v_1}{dz^2} - v_1 = F_1(z) \quad (23)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} - \Phi = F_2(z) \quad (24)$$

其中

$$F_1(z) = -\frac{\sqrt{2}}{3} \alpha \left(\beta + \frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} A [4\gamma^2(z-z_0)^2 - 2\gamma] e^{-\gamma(z-z_0)^2} \quad (25)$$

$$F_2(z) = -\frac{\sqrt{2}}{4} \left(\beta + \frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} A [4\gamma^2(z-z_0)^2 - 2\gamma] e^{-\gamma(z-z_0)^2} \quad (26)$$

边界条件可取为:

$$\begin{cases} z = 0 & \left(\frac{\partial v_1}{\partial z}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) = 0 \\ z & (v_1, \Phi) = 0 \end{cases} \quad (27)$$

方程(23)和(24)在边界条件(27)下的 Green 函数为:

$$G(z, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{sh}(\xi - z) + \frac{1}{2} \text{sh}(z) \text{ch}(\xi) - \\ \frac{1}{2} \text{ch}(z) \text{sh}(\xi) - \frac{\text{ch}(z)}{4 \text{ch}(\xi)} & 0 < z < \xi \\ -\frac{1}{4} e^{\xi-z} & \xi < z < \end{cases} \quad (28)$$

则式(23)和(24)的解分别为:

$$v_1 = \int_0^{\xi} F_1(\xi) G(z, \xi) d\xi \quad (29)$$

$$\mathcal{Q} = \int_0^{\xi} F_2(\xi) G(z, \xi) d\xi \quad (30)$$

将式(25), (26)及(28)代入(29), (30)积分后可得 $v_1$ ,  $\mathcal{Q}$ 及 $u_0$ , 最后由式(21)知纬圈半地转适应后的风压场结构。

为方便计, 在计算过程中取 $A = 1, z_0 = 0.5$ 。由图1可知, 不论是深厚系统还是浅薄系统, 当 $\alpha$ 逐渐变小(即初始扰动的纬圈特征尺度逐渐变大)时, 适应后的经圈流都迅速变小, 这点和热带正压大气的适应尺度准则一致, 此时主要是纬圈流和压力场的相互适应。

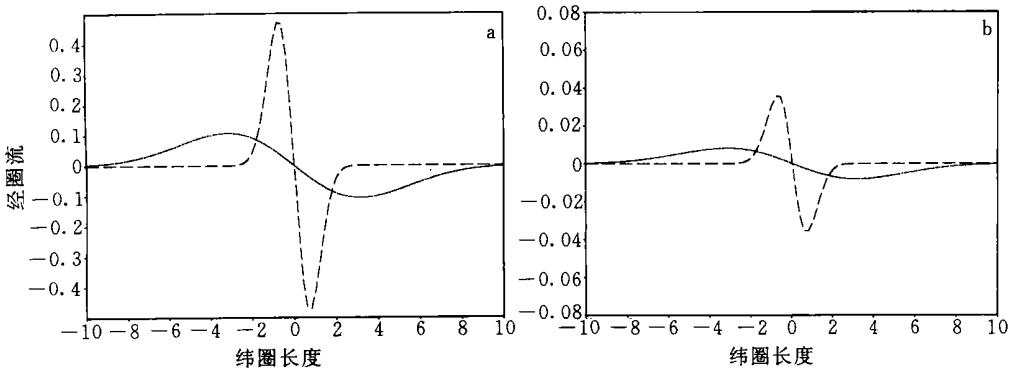


图1 适应后的经圈流随初始扰动纬圈特征尺度变化沿 $y = 1.0, z = 0.5$ 的东西向剖面分布  
(a. 浅薄系统,  $Y$ 取1.0; b. 深厚系统,  $Y$ 取0.05; 虚线对应 $\alpha = 1.0, \beta = 0.05$ , 点线对应 $\alpha = 0.05, \beta = 0.05$ )

图2给出了深厚系统中场在适应前、后的变化情况。从图中可以看出, 对于深厚系统而言, 只要初始扰动的纬圈特征尺度足够大, 则不论其初始扰动的经圈特征尺度多大, 适应后的压力场较初始压力场的变化都很大, 而纬圈流的变化(初始纬圈流为零)不明显, 即主要是压力场向 $F$ 纬圈流适应。这和中纬度斜压大气地转适应过程中深厚系统的速度场容易维持, 气压场发生变化以适应速度场的结论是一致的。至于浅薄系统, 对纬圈和经圈

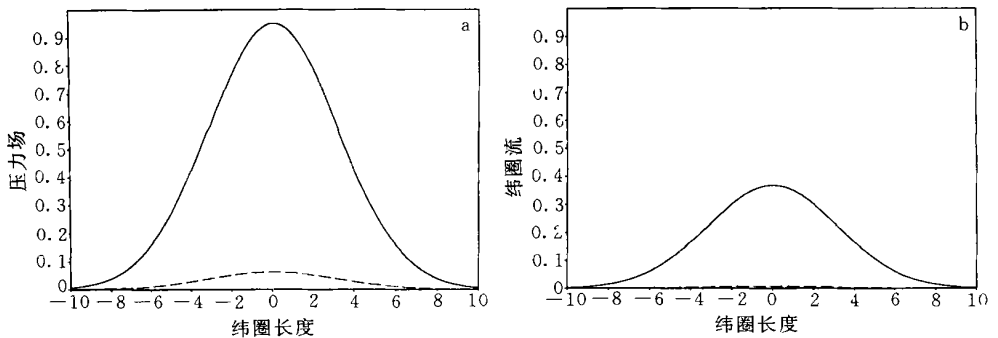


图2 深厚系统( $Y$ 取0.05)中适应后的压力场、纬圈流与  
初始压力场沿 $y = 1.0, z = 0.5$ 的东西向剖面分布

(a.  $\alpha = 0.05, \beta = 0.05$ , b.  $\alpha = 0.05, \beta = 1.0$ ; 实线对应初始值, 虚线对应适应后的值)

特征尺度都很大的初始扰动而言, 适应后的压力场变化并不大, 主要是纬圈流变化来适应压力场(图 3a); 但当初始扰动呈现出纬圈型扰动特征(即纬圈特征尺度很大、经圈特征尺度较小)时, 适应后的压力场变化也很大, 此时压力场向纬圈流适应(图 3b)。

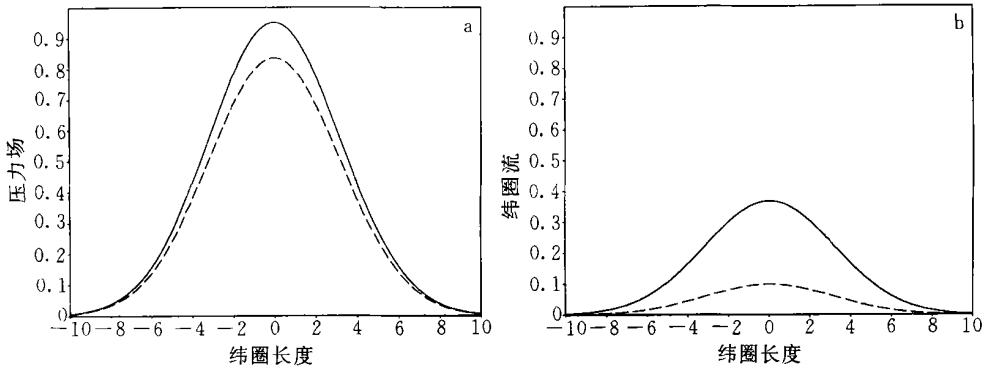


图 3 同图 2, 但为浅薄系统( $\gamma$ 取 1.0)

热带斜压大气适应过程中的这些特点其实并不难理解。对深厚系统而言, 上下一致的非地转流使重力波的传播速度很大, 因此风场还未适应气压场的变化, 气压场就被堵塞掉了。而对浅薄系统, 当纬圈和经圈特征尺度都很大时, 经圈流在科氏力作用下产生的纬圈流有足够的时间来平衡气压梯度力, 即纬圈流向压力场适应; 但当经圈特征尺度很小时, 由气压梯度力产生的经圈流向低压一方输送的质量很快就将气压场堵塞掉了, 导致压力场向纬圈流适应。

致谢: 衷心感谢巢纪平院士的宝贵意见。

## 参考文献

- 1 叶笃正, 李麦村. 大气运动中的适应问题. 北京: 科学出版社, 1965, 126pp
- 2 曾庆存. 大气中的适应过程和发展过程(一)和(二). 气象学报, 1963, 33(2): 163 ~ 174
- 3 Chao J P, Lin Y H. The foundation and movement of tropical semigeostrophic adaptation. Acta Meteor Sinica, 1996, 10: 129 ~ 141
- 4 林永辉, 巢纪平. 热带半地转适应过程. 中国科学(D辑), 1997, 27: 566 ~ 573
- 5 巢纪平. 热带地转适应运动的动力学基础. 气象学报, 2000, 58(1): 1 ~ 10
- 6 Matsuno T. Quasi-geostrophic motions in the equatorial area. J Meteor Soc Japan, 1966, 44: 25 ~ 43
- 7 巢纪平. 论热带纬圈半地转运动的建立. 气象学报, 2000, 58(2): 129 ~ 136
- 8 Gill A E. Atmosphere-Ocean Dynamics. New York: Academic Press, 1982, 662pp

# THE INFLUENCE OF INITIAL DISTURBANCE'S VERTICAL STRUCTURE ON SEMIGEOSTROPHIC ADAPTATION IN TROPICAL BAROCLINIC ATMOSPHERE

Lin Yonghui

(*Chinese Academy of Meteorological Sciences, Beijing 100081*)

Lu Wei

(*Meteorological College, PLA Sciences & Engineering University, Nanjing 211101*)

## Abstract

Based on an invariant of semi-potential vorticity, the scale criterion of geostrophic adaptation in tropical baroclinic atmosphere is discussed. For a deep system, no matter how long the meridional characteristic scale of initial disturbance is, if the zonal characteristic scale of initial disturbance is bigger than the equatorial Rossby radius of deformation, the pressure field changes greatly and the zonal current is almost no any change. For a shallow system, when the zonal and meridional characteristic scales of initial disturbance are greater than the equatorial Rossby radius of deformation, the pressure field is easy to preserve, the zonal current changes to adapt the pressure field, but when the initial disturbance exhibits zonal-type character, the pressure field adapts to the zonal current.

**Key words:** Baroclinic adaptation, Scale criterion, Vertical structure.