

一类奇异孤波解及其在高原低涡结构分析中的应用*

李国平

蒋 静

(成都气象学院, 成都, 610041)

(防城港市气象局, 广西, 535600)

摘 要

文中利用相平面分析法, 由非绝热大气运动方程组导出了与非线性重力内波有关的 KdV 方程, 然后用直接积分法得到两类有意义的孤立波解, 重点分析了一类具有间断点的奇异孤立波解的特征, 初步建立了此波解与一类青藏高原暖性低涡的联系, 讨论了高原加热和层结稳定度对高原低涡生成和移动的影响, 并且从理论上论证了高原低涡具有与热带气旋类低涡 (Tropical cyclone-like vortices) 类似的涡眼和暖心结构。

关键词: 非线性, 奇异孤立波, 热带气旋类低涡, 高原低涡, 加热。

1 引 言

孤立波作为最基本的非线性波动, 人们研究它的历史已有 140 多年。近 30 a 来, 对于非线性波动中的孤立波和椭圆余弦波的研究, 在大气、海洋等多个学科的非线性研究中占据了一个特殊地位, 受到极大重视, 并取得了一些重要进展。早期人们认为孤立波解只存在于 KdV 方程中, 近年来的研究表明这类解也存在于许多数学物理方程中。研究孤立波的手段也从理论扩展到观测(包括常规仪器和卫星)、实验(实验室或自然条件下)以及计算机模拟等方面, 其结果已用来解释某些天文和地球物理现象。同样, 大气中也广泛地存在着孤立波, 不少学者研究了不同情况下的大气孤立波^[1~8]。但已往的研究多侧重于孤立波解的求得和波动本身的动力学特征分析, 较少考虑各类孤立波与实际天气事实的联系, 以及波动的非线性特征在天气分析和预报中的应用, 而这一点正是本文试图有所创新之处。事实上, 涡旋、锋面、飑线和沙尘暴等天气系统都是大气中典型的非线性现象, 并且常对人们的日常生活和经济建设造成严重灾害, 大气非线性动力学理应在上述灾害性天气系统的研究中发挥更大的作用。

青藏高原低涡可看作是一种强烈依赖于高原地形, 同时又受环境大气层结稳定度、地面加热和凝结潜热控制的局地性低涡, 是夏季盛行于青藏高原地区 500 hPa 的一种中尺度或次天气尺度的低压系统。它常在高原中西部生成, 然后沿 32° 附近的切变线东移发展, 最后在高原的东边减弱、消失, 它是夏季高原地区主要的降雨系统, 而且在有利环流形势配合下东移出高原而发展, 多能引发高原东侧地区(特别是四川盆地)一次大范围暴雨、雷暴等灾害性天气过程^[9]。我们从一类天气系统的非绝热控制方程出发, 通过求解非线性惯性重力内波, 分析了波解存在的条件、结构特征及其与高原低涡天气事实的联系, 进而对高原低涡一些主要的特征从非线性动力学角度进行了初步分析。因此我们认为本文的

* 初稿时间: 1998 年 9 月 25 日; 修改稿时间: 1999 年 4 月 22 日。

资助课题: 中国气象局青年气象科学基金、四川省跨世纪杰出青年学科带头人培养基金。

研究不但有一定的理论意义,而且在把大气非线性波动研究的成果应用于实际天气分析和预报方面进行了初步的、有益的尝试。

2 常定热源强迫下的非线性惯性重力内波

由于青藏高原低涡是在高原特殊的下垫面条件下生成的一类中尺度或次天气尺度副热带涡旋系统,并且诊断分析的结果表明高原低涡的形成主要依靠强烈的地面感热^[10]。因此本文主要考虑高原的加热作用,而高原的地形只作为背景条件。另外,由于静力平衡和非静力平衡对非线性惯性重力波不会产生本质上的区别^[11],所以为简便起见,我们采用气压坐标系下忽略地形摩擦及扰动在 y 方向变化的非绝热大气方程组:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \omega \frac{\partial u}{\partial p} = - \frac{\partial \phi}{\partial x} + f v \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + \omega \frac{\partial v}{\partial p} = - f u \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) + \sigma_s \omega = - Q \quad (4)$$

其中 $\sigma_s = -\alpha \frac{\partial \ln \theta}{\partial p} = \frac{R^2 T (\chi_d - \chi)}{g p^2}$ 是层结稳定度参数。 $Q = \frac{R Q^*}{c_p P}$, Q^* 是单位质量空气的非绝热加热率,对某一固定等压面 Q 取为常值。为求解非线性波的渐近解析解,设有行波解:

$$u = U(\theta), v = V(\theta), \omega = \Omega(\theta), \phi = \Phi(\theta) \quad (5)$$

其中 $\theta = kx + np - \omega t$, $\omega = kc$ 为圆频率, c 为波在东西方向(即 x 方向)传播的速度。

式(5)代入式(1)~(4)得:

$$(-\omega + kU + n\Omega)U = -k\Phi + fV \quad (6)$$

$$(-\omega + kU + n\Omega)V = -fU \quad (7)$$

$$kU + n\Omega = 0 \quad (8)$$

$$n\Phi(-\omega + kU) + \sigma_s \Omega = -Q \quad (9)$$

定解条件取为: $\theta = U_0$ (常值), $U = 0$, $U = 0$ 。积分式(8)并考虑定解条件,积分常数可取为零,则有:

$$n\Omega = -kU \quad (10)$$

将式(10)代入式(6)、(7)和(9),并消去 V 和 Φ ,得到关于 U 的单变量方程:

$$U + \frac{f^2}{\omega^2} U - \frac{\sigma_s k^2}{n^2 \omega^2} \frac{U}{-\omega + kU} + \frac{kQ}{n - \omega + kU} = 0 \quad (11)$$

上式为非线性方程, $U = 0$ 显然是它的一个平衡点。考虑到惯性重力内波的快波特性和非线性项展开法将 $U/(-\omega + kU)$ 在该平衡点作 Taylor 展开并略去二次以上的项得:

$$U + \frac{k^2}{n^2 \omega^2} \left[\frac{f^2 n^2}{k^2} + \sigma_s - \frac{nQ}{\omega} \right] U + \frac{k^3}{n^2 \omega^3} \left[\sigma_s - \frac{nQ}{\omega} \right] U^2 - \frac{kQ}{n\omega^2} = 0 \quad (12)$$

式(12)两端对 θ 微商得:

$$U''' + \frac{k^2}{n^2 U^2} \left(\frac{f^2 n^2}{k^2} + \sigma_s - \frac{nQ}{U} \right) U + \frac{2k^3}{n^2 U^3} \left(\sigma_s - \frac{nQ}{U} \right) UU = 0 \quad (13)$$

式(13)即为 KdV 方程对应的常微分方程(以下简称 KdV 方程)。令:

$$a = \frac{k^2}{n^2 U^2} \left(\frac{f^2 n^2}{k^2} + \sigma_s - \frac{nQ}{U} \right), b = \frac{k^3}{n^2 U^3} \left(\sigma_s - \frac{nQ}{U} \right), d = -\frac{kQ}{nU} \quad (13)$$

则式(12)可简写为:

$$U + aU + bU^2 + d = 0 \quad (14)$$

求解 KdV 方程的方法有多种,如非线性项展开法、Backlund 变换法、散射反演法、Bargmann 势方法、摄动法和约化摄动法等。本文将采用与上述方法不同的思路来求解 KdV 方程,即并不直接求解式(13)所示的 KdV 方程,而是求解比 KdV 方程低一阶的方程(即式(12)或(14)),对一般的 KdV 方程只要积分一次即可得到类似式(14)的形式。

以 U 乘式(14)并对 θ 积分得:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dU}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{2} a U^2 + \frac{1}{3} b U^3 + dU = C_1 \quad (15)$$

由定解条件可定出积分常数

$$C_1 = \frac{1}{2} a U_0^2 + \frac{1}{3} b U_0^3 + dU_0 \quad (16)$$

则式(15)变为:

$$\left(\frac{dU}{d\theta} \right)^2 = a(U_0^2 - U^2) + \frac{2}{3} b(U_0^3 - U^3) + 2d(U_0 - U)$$

或改写为:

$$\left(\frac{dU}{d\theta} \right)^2 = (U_0 - U) \left[-\frac{2b}{3} (U_0 - U)U - \left(a + \frac{4b}{3} U_0 \right) (U_0 - U) + 2(bU_0^2 + aU_0 + d) \right] \quad (17)$$

当 $bU_0^2 + aU_0 + d = 0$, 即 $U_0 = (-a \pm \sqrt{a^2 - 4bd})/2b$ 时, 这表明孤立波的最终形态与环境大气层结稳定度和非绝热加热状况有关, 式(17)变为:

$$\left(\frac{dU}{d\theta} \right)^2 = (U - U_0)^2 \left[-\frac{2b}{3} U - a - \frac{4}{3} bU_0 \right] \quad (18)$$

$$\text{令: } A = -U_0, B = -2b/3, E = -a - 4bU_0/3 \quad (18)$$

则式(18)可化为:

$$\left(\frac{dU}{d\theta} \right) = \pm (U + A) \sqrt{BU + E} \quad (19)$$

可以证明上式的正负号并不影响下面的积分结果, 故对式(19)只讨论取正号的情形。令 $F = U + A$, 积分上式得:

$$\frac{dF}{F \sqrt{BF + (E - AB)}} = C_2 \pm \theta \quad (20)$$

其中 C_2 也是积分常数, 式(20)左端的积分值可分为下面几种情况来求出。

2.1 第一类解: 正切函数解

若 $E - AB < 0$, 即取 $U_0 = (-a + \sqrt{a^2 - 4bd})/2b$ 时, 式(20)左端的积分值为:

$$-\frac{2}{AB-E} \arctan \left[\frac{BF + (E-AB)}{AB-E} \right]^{1/2} = C_2 \pm \theta \quad (21)$$

整理后得:

$$U = -\frac{E}{B} + \frac{(AB-E)}{B} \tan^2 \left[\frac{AB-E}{2} (C_2 \pm \theta) \right] \quad (22)$$

即:

$$U = -\frac{3a}{2b} - 2U_0 - \left(\frac{3a}{2b} + 3U_0 \right) \tan^2 \left[\frac{a + 2bU_0}{2} (C_2 \pm \theta) \right] \quad (23)$$

因为沿 θ 轴平移总可使 $C_2 = 0$, 并注意到 $\tan^2 \theta$ 的偶函数性, 则有:

$$U = -\frac{3a}{2b} - 2U_0 - \left(\frac{3a}{2b} + 3U_0 \right) \tan^2 \left(\frac{a + 2bU_0}{2} \theta \right) \quad (24)$$

此解的波型与椭圆余弦波很相似, 但波峰处存在周期性间断点。由于此解不满足前设的定解条件, 属于无意义解, 故本文将不再讨论此解。

2.2 第二类波解: 双曲正割函数解(经典孤立波)

当 $E - AB > 0$, 即取 $U_0 = (-a - \sqrt{a^2 - 4bd})/2b$ 时, 并且 $\overline{BF + (E - AB) - E - AB} < 0$ 时, 式(20)左端的积分值为:

$$\ln \frac{\overline{BF + (E - AB)} + \overline{E - AB}}{\overline{BF + (E - AB)} - \overline{E - AB}} = \overline{E - AB} (C_3 \pm \theta) \quad (25)$$

令 $\zeta = \overline{E - AB} (C_3 \pm \theta)$, 则有关系式:

$$\zeta = \ln \frac{\overline{E - AB} - \overline{BF + E - AB}}{\overline{E - AB} + \overline{BF + E - AB}} = \ln \left[\frac{\overline{E - AB} - \overline{BF + E - AB}}{\overline{BF}} \right]^2 \quad (26)$$

因此,

$$\frac{1}{2} (e^{\zeta} + e^{-\zeta}) = \cosh \frac{\zeta}{2} = \frac{\overline{E - AB}}{\overline{BF}} \quad (27)$$

注意到 $F = U + A$, 最后可求得:

$$U = -A - \frac{E - AB}{B} \operatorname{sech}^2 \frac{\overline{E - AB}}{2} (C_3 \pm \theta) \quad (28)$$

同样平移 θ 轴使 $C_3 = 0$, 并考虑到 $\operatorname{sech}^2 \theta$ 的偶函数性, 通过变量代换可得:

$$U = U_0 - \left(3U_0 + \frac{3a}{2b} \right) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{-a - 2bU_0}{2} \theta \right) \quad (29)$$

将上式代入式(8)得:

$$\Omega = -\frac{k}{n} \left[U_0 - \left(3U_0 + \frac{3a}{2b} \right) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{-a - 2bU_0}{2} \theta \right) \right] \quad (30)$$

式(29)、(30)为 KdV 方程的经典孤立波解(即一般意义下孤立波解), 其图象如图 1 所示。此波是由平流产生的非线性作用引起波的突陡和惯性重力内波产生的频散效应达

到平衡而形成的, 同时大气层结稳定性和地面非绝热加热也有重要作用。孤立波的宽度为

$2l = a - 2bU_0$, 水平运动的振幅为 $A_u^* = 3|U_0 + a/2b|$, 垂直运动的振幅为 $A_w^* = kA_u^*/n$ 。由于振幅与 a, b, U_0 有关, 即与波的圆频率 ω 有关, 所以波速 c 不仅与波数有关, 还与振幅有关, 这是非线性波与线性波的一个重要区别。

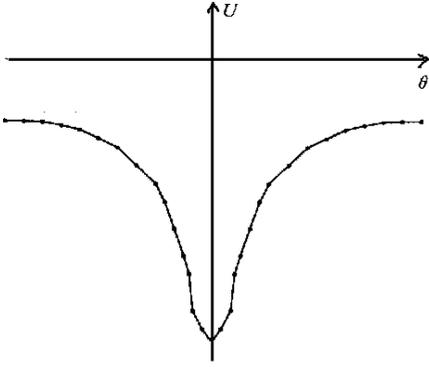


图 1 经典惯性重力内孤立波的示意图

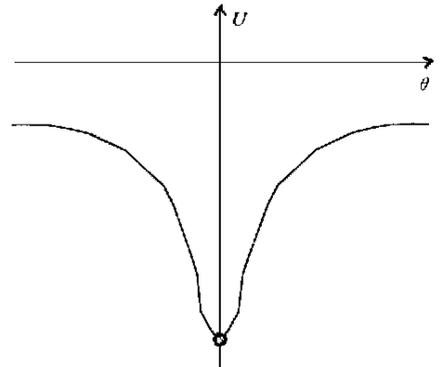


图 2 奇异惯性重力内孤立波的示意图

2.3 第三类解: 双曲余割函数解(奇异孤立波)

当 $E - AB > 0$ 且 $\overline{BF + (E - AB)} - \overline{E - AB} > 0$ 时, 可推出 $BF > 0$, 则式(20)变为

$$\ln \frac{\overline{BF + (E - AB)} - \overline{E - AB}}{\overline{BF + (E - AB)} + \overline{E - AB}} = \overline{E - AB} (C_3 \pm \theta) \quad (31)$$

同样令 $\zeta = \overline{E - AB} (C_3 \pm \theta)$, 并利用 $F = U + A$, 则上式变为:

$$\begin{aligned} \zeta &= \ln \frac{\overline{BF + E - AB} - \overline{E - AB}}{\overline{BF + E - AB} + \overline{E - AB}} \\ &= \ln \left[\frac{\overline{BF + E - AB} - \overline{E - AB}}{BF} \right]^2 \end{aligned} \quad (32)$$

采用类似于 2.2 节的数学变换有:

$$\frac{1}{2}(e^{\zeta} - e^{-\zeta}) = \sinh \frac{\zeta}{2} = - \frac{\overline{E - AB}}{BF} \quad (33)$$

最后可求得:

$$U = -A + \frac{E - AB}{B} \operatorname{csch}^2 \overline{E - AB} (C_3 \pm \theta) \quad (34)$$

同样平移 θ 轴使 $C_3 = 0$, 并注意到 $\operatorname{csch}^2 \theta$ 的偶函数性, 则变量代换后有:

$$U = U_0 + (3U_0 + \frac{3a}{2b}) \operatorname{csch}^2 \left(\frac{-a - 2bU_0}{2} \theta \right) \quad (35)$$

将上式代入式(8)得:

$$\Omega = -\frac{k}{n} \left[U_0 + (3U_0 + \frac{3a}{2b}) \operatorname{csch}^2 \left(\frac{-a - 2bU_0}{2} \theta \right) \right] \quad (36)$$

此解为KdV方程的奇异孤立波解,除 $\theta = 0$ 处的解存在间断点外,波的主要特征与经典孤立波基本一致(如图2所示)。由于此类非线性波动在过去的研究中很少涉及,故本文接下来重点讨论此解。

3 奇异孤立波解与青藏高原低涡的联系

从式(35)和(36)可以看出奇异孤立波的特征在多种物理场上都有明显反映,并且在 $\theta = 0$ 处,这类孤立波都存在间断点。夏季,青藏高原低涡的发展与涡心的卷入对流云带有关。低涡四周是一个上升环,而涡心近地层为相对下沉区,上层为相对于四周弱的上升区^[9],因此从卫星云图上可看到许多低涡为空心结构(即涡心为无云或少云区)。如果认为高原低涡是在高原强大地面加热扰动下形成的惯性重力内波的频散效应与涡度平流的非线性作用达到平衡时的产物,则奇异孤立波可视为空心高原低涡的理论解,而经典或一般孤立波则是非空心高原低涡的理论解。高原低涡垂直气流的分布特征(涡心下沉,涡周上升)也可以用图2和式(36)加以解释^[12]。

长期以来,人们对热带风暴(台风)中的涡眼结构已有较深入的认识和研究,从飞机和卫星的观测上得到证实,并用天气学和动力学的理论进行了解释。但对中高纬度的低压涡旋是否存在类似于台风的涡眼结构及其成因还了解得不多。近年来,美国气象学者在模拟中纬度气旋的发生、发展过程中,观察到类似台风涡眼的结构。中国气象工作者在对青藏高原500 hPa低涡的研究也表明:由于青藏高原下垫面的热力性质与热带海洋有相似之处,所以不少高原低涡的结构与海洋上的热带低压或热带气旋类低涡(TCLV, tropical cyclone-like vortices)十分相似。在云形上主要表现为气旋式旋转的螺旋云带中,低涡中心多为无云区(空心)^[9]。只是由于不像海洋上有充分的水汽供应,因而高原低涡不像台风那样可以强烈发展,生命史也较短。本文得到的一类有间断点的奇异孤立波解从低涡气流的分布型式上可以较好地解释上述涡眼现象,而台风的涡眼结构人们多是从绝对角动量守恒的角度来解释的。

4 高原低涡主要特征的非线性理论

除上述涡眼结构的理论解释外,高原低涡的一些重要特征还可以从对奇异孤立波解的进一步讨论中寻求某些理论依据。

4.1 低涡移动方向与层结、地面加热的关系

由于奇异孤立波解是在 $BF > 0$ 的条件下得到的,由式(13)和(18)可知这就要求 $b(U + A) < 0$ 。如果 $(U + A) < 0$,即 $U < U_0$ (风场对应谷式孤立波或垂直运动场对应峰式孤立波,这代表高压系统),则 $b > 0$ 。如果 $(U + A) > 0$,即 $U > U_0$ (风场对应峰式孤立波或垂直运动场对应谷式孤立波,这代表低压系统),则 $b < 0$,由式(13)可知,稳定层结中低涡向西传播,在不稳定层结中低涡向东传播,因此如果不考虑地面加热,稳定层结中生成的低涡只能向西移动而不能东移出高原。当考虑地面加热时,只有当高原加热($Q >$

0) 且强度超过 $\sigma_s U/n$ 时, 稳定层结中生成的高原低涡才能向东移动。但低涡东移后, 受到的高原加热作用又会逐渐减弱, 不利于其继续东移。近年来对高原低涡移动和发展的研究表明: 高原低涡大多形成于高原西部, 消失于高原中、东部地形下坡处, 极少能移出高原主体。只有在一定条件下, 如有冷空气和西风急流的侵入时, 低涡由暖涡变为冷涡(斜压涡)的情况下才能东移出高原^[9]。这与上述分析的低涡孤立波移动方向与层结稳定度以及高原加热的关系基本上是吻合的。

4.2 环境条件对低涡生成和移速的影响

由 2.2 和 2.3 节可知, 孤立波解存在的另一必要条件为:

$$E - AB > 0 \quad (37)$$

或

$$-a - 2bU_0 > 0 \quad (38)$$

因此应取 $U_0 = (-a - \sqrt{a^2 - 4bd})/2b$, 因为要求 U_0 必须是实数, 则有:

$$a^2 - 4bd \geq 0 \quad (39)$$

即

$$\frac{k^4}{n^4 U^4} \left(\frac{f^2 n^2}{k^2} + \sigma_s - \frac{nQ}{U} \right)^2 + \frac{4k^4}{n^3 U^5} \left(\sigma_s - \frac{nQ}{U} \right) Q \geq 0 \quad (40)$$

若 $Q = 0$, 即不考虑地面加热, 上式变为:

$$k^4 \sigma_s^2 + 2k^2 f^2 n^2 \sigma_s + n^4 f^4 \geq 0 \quad (41)$$

即

$$(k^2 \sigma_s + n^2 f^2)^2 \geq 0 \quad (42)$$

这表明在不考虑非绝热加热的情况下, 无论层结是否稳定, 高原低涡都有可能生成。实际上层结不稳定时将产生热对流, 对流调整的结果又会使层结趋于稳定, 应此不论是否有地面加热, 稳定层结都是低涡(惯性重力内波)生成的基本条件。

当考虑地面加热时($Q > 0$), 稳定层结中($\sigma_s > 0$)若生成向东移动的低涡($U > 0$), 由 4.1 节的讨论得知此时要求 $\sigma_s - nQ/U < 0$, 则有 $c < nQ/k\sigma_s$ 。同样, 不稳定层结中($\sigma_s < 0$), 若生成向西移动的低涡($U < 0$), 则有 $c > nQ/k\sigma_s$ 或 $|c| < nQ/k|\sigma_s|$ 。这说明无论低涡向东或向西移动, 其移速都是有界的, 并且地面加热越强、水平尺度与垂直尺度比越大(即系统越浅薄), 其最大移速就越大; 而层结稳定度或不稳定度越大, 其最大移速就越小。

4.3 低涡尺度与垂直运动振幅的关系

由 KdV 方程的系数 a 和 b 的定义式(13) 和奇异孤立波垂直运动的表达式(36) 可知: 考虑非绝热加热时, 垂直运动的振幅为:

$$A_w^* = \frac{3k}{n} \left| U_0 + \frac{a}{2b} \right| \quad (43)$$

因为此时 $U_0 = (-a - \sqrt{a^2 - 4bd})/2b$, 上式可改写为:

$$A_w^* = \frac{3k}{n} \left| -\frac{1}{2b} \sqrt{a^2 - 4bd} \right|$$

代入式(13) 有:

$$A_{\omega}^* = \frac{3}{2} \left\{ \frac{U^2}{k^2(\sigma_s - nQ/U)^2} \left[\frac{f^2 n^2}{k^2} + (\sigma_s - nQ/U) \right]^2 + \frac{4vQ(\sigma_s - nQ/U)}{n} \right\}^{1/2} \quad (44)$$

上式经整理得:

$$A_{\omega}^* = \frac{3}{2} \left\{ c^2 \left[\frac{k}{n} + \frac{f^2}{(k\sigma_s/n - Q/c)} \right]^2 + 4cQ(k\sigma_s/n - Q/c) \right\}^{1/2} \quad (45)$$

可见低涡中垂直运动的强弱与低涡的移动方向关系不大,而主要取决于大气的层结稳定性和低涡水平尺度与垂直尺度的比值,并且量级分析表明方括号中第一项比第二项几乎大一个量级,所以高原低涡生成后(即式(40)满足时),在高原加热和低涡移速相同的情况下,水平尺度较大而较浅薄的低涡其垂直运动的振幅较小;水平尺度较小而较深厚的低涡可具有较大的垂直运动振幅。前一类从高原上移出后常造成其下游的四川盆地一次短时小雨天气过程,这也可能是造成“巴山夜雨”或“四川盆地多夜雨”这种独特天气现象的动力学成因之一;后一类低涡对形成强降水天气有利,特别是当其东移出高原后,配合较充沛的水汽条件和环流形势可引发我国东部(特别是四川盆地)一次大范围暴雨、雷暴等灾害性天气过程。

4.4 高原低涡的暖心结构

将式(10)代入式(6)得:

$$\Phi = \frac{1}{k}(uU + fv) \quad (46)$$

又由静力方程 $\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = -\frac{RT}{p}$ 得:

$$T = -\frac{p}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = -\frac{p}{R} \frac{d\Phi}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} = -\frac{nP}{R} \Phi \quad (47)$$

上式在等压面上对 θ 微分得:

$$T = -\frac{nP}{R} \Phi \quad (48)$$

利用式(9)、(10)得:

$$\Phi = \frac{k\sigma_s U - nQ}{n^2(-U + kU)} \quad (49)$$

将 $1/(-U + kU)$ 作 Taylor 展开并略去二次以上项得:

$$\Phi = \left(\frac{k\sigma_s U}{n^2} - \frac{Q}{n} \right) \left(-\frac{1}{U} - \frac{kU}{U^2} - \frac{k^2 U^2}{U^3} \right) \quad (50)$$

或

$$\Phi = \left(\frac{k^2 Q}{nU^3} - \frac{k^2 \sigma_s}{n^2 U^2} \right) U^2 + \left(\frac{kQ}{nU^2} - \frac{k\sigma_s}{n^2 U} \right) U + \frac{Q}{U} \quad (51)$$

则式(48)可改写为:

$$T = -\frac{P}{R} \left[\left(\frac{k^2 Q}{U^3} - \frac{k^2 \sigma_s}{nU^2} \right) U^2 + \left(\frac{kQ}{U^2} - \frac{k\sigma_s}{nU} \right) U + \frac{Q}{U} \right] \quad (52)$$

如不考虑高原加热作用($Q=0$),则在西风气流引导下($U>0$)、不稳定层结中向东移动的低涡,由式(52)知: $T<0$ 。而考虑高原地面加热时,视高原低涡为高原加热作用下稳定层结中自西向东移动的奇异孤立波,由于 $U>0$, $\sigma_s>0$, $U>0$,初期或当加热强度小于

一定幅度($Q < \sigma U n$)时,可能有 $T > 0$;但当加热强度超过一定幅度($Q > \sigma U n$)时,必定有 $T < 0$,这表明在地面加热达到一定程度后,固定等压面上青藏高原低涡温度场的水平分布为:除涡心(间断点)外,其余涡区 $dT/d\theta < 0$,即离涡心越近,温度越高,离涡心越远,温度越低。说明高原低涡与热带低压或热带气旋类低涡(TCLV)一样,也是一种暖心结构(特别在其强盛期),这也符合有关高原低涡温度场水平分布的观测事实^[9]。这种暖心结构既是动力学约束关系所要求的,又是高原强大的地面加热提供热量造成的必然结果。应该指出的是,本文对高原低涡暖心结构的动力学解释也不同于以梯度风平衡和静力平衡关系对台风暖心的解释。

5 结束语

本文利用相平面分析法,由非绝热大气运动方程组导出了与非线性重力内波有关的KdV方程,然后用直接积分法得到两类有意义的孤立波解,重点分析了一类具有间断点的奇异孤立波解的特征,初步建立了此波解与一类青藏高原低涡的联系,讨论了高原加热和层结稳定度对高原低涡生成和移动的作用,并且从理论上论证了高原低涡具有与热带气旋类低涡(TCLV)类似的涡眼和暖心结构等重要特征,从非线性动力学角度深化了人们对一类高原低涡的认识。但本文的工作主要是利用简化的动力学方程组和高原加热作用,得出了可描述高原低涡发生、发展的非线性解析解并作了若干定性分析。而从实际天气预报的角度讲,还有必要对高原低涡发生发展机制、结构特征、移动规律、影响因子和预报指标等问题开展更加全面和深入的研究。

参考文献

- 1 Long R R. Solitary waves in the westerlies. *J Atmos Sci*, 1964, 21: 197—200
- 2 Redekopp L G. On the theory of solitary Rossby waves. *J Fluid Mech*, 1977, 82: 725—745
- 3 Malguzzi P, Malanotte R. Nonlinear stationary Rossby waves on nonuniform zonal winds and atmospheric blocking. Part I: The analytical theory. *J Atmos Sci*, 1984, 41: 2620—2628
- 4 McWilliams J C, et. al. Numerical studies of barotropic modons. *Dyn Atmos Oceans*, 1981, 5: 219—238
- 5 何猛省. 大气中的孤立波. *中国科学(B辑)*, 1985, (1): 79~89
- 6 巢纪平, 黄瑞新. 旋转正压大气中的椭圆余弦波. *中国科学*, 1980, (7): 697~705
- 7 刘式达, 刘式适. 大气中非线性椭圆余弦波和孤立波. *中国科学(B辑)*, 1982, (4): 372~385
- 8 陈忠明. 大气中几类孤立波的一般解. *中国科学(B辑)*, 1992, (3): 328~336
- 9 乔全明, 张雅高. 青藏高原天气学. 北京: 气象出版社, 1994. 123~128
- 10 陈伯民, 钱正安, 张立盛. 夏季青藏高原低涡形成和发展的数值模拟. *大气科学*, 1996, 20(4): 491~502
- 11 李国平, 卢敬华. Some possible solutions of nonlinear internal inertial gravity wave equations in the atmosphere. *Adv in Atmos Sci*, 1996, 13(2): 244—252
- 12 李国平, 杨小怡. 热源强迫对非线性重力波影响的初步分析. *大气科学*, 1998, 22(5): 791~797

A TYPE OF SINGULAR SOLITARY WAVE AND ITS APPLICATION OF STRUCTURE ANALYSIS OF THE TIBETAN PLATEAU VORTEX

Li Guoping

(Chengdu Institute of Meteorology, Chengdu, 610041)

Jiang Jing

(Meteorological Bureau of Fangchenggang City, Guangxi, 535600)

Abstract

The KdV equation is derived from nonlinear internal inertial gravitational wave equation using phase plane analysis method and two types of solitary wave solutions with weather meanings are obtained by a direct integration method. The characteristics of singular solitary wave are specially discussed and the relationship between the vortex over the Tibetan plateau and this solitary wave is established, and the effects of plateau heating and atmospheric stability on the plateau vortex are analyzed. Moreover, the features of vortex eye and warm core associated with the plateau vortex similar to tropical cyclone-like vortices (TCLV) are proved in theory.

Key words: Nonlinear; Singular solitary wave; Tropical cyclone-like vortices; Plateau vortex; Heating.