

大气中尺度涡旋的三维螺旋结构理论*

刘式达^{1,2)} 辛国君¹⁾ 刘式适¹⁾ 梁福明¹⁾

¹⁾ (北京大学地球物理系, 北京, 100871)

²⁾ (北京大学湍流国家重点实验室, 北京, 100871)

摘 要

文中应用描写大气运动的方程组求得了中尺度涡旋的三维定常流场以及相应的压力场和温度场, 其中的三维流场构成了物理空间的一个非线性自治动力系统。理论分析和计算表明: 若中尺度涡旋的下层流体呈气旋(反气旋), 且伴有水平辐合(散)的螺旋转动, 则通过上升(下沉)运动, 其上层流体呈反气旋(气旋)且伴有水平辐散(合)的螺旋转动, 从而形成中尺度涡旋的三维螺旋结构。这些都与实际大气中的中尺度涡旋结构相似。它充分说明: 在旋转变有粘性的大气中, 为了保证质量守恒, 必须有这种螺旋结构。

关键词: 大气涡旋, 螺旋结构, 动力系统。

1 引 言

众所周知, 在大气中存在大量的中尺度涡旋, 其代表流型(flow pattern)为气旋和反气旋。在北半球的地面天气图上表现为逆时针和顺时针的旋转运动。例如大气中的暖气旋系统, 下层空气逆时针旋转且水平辐合, 中心是低气压, 而上层空气顺时针旋转, 且水平辐散, 中心是高压。上下层之间通过上升运动相联结, 形成三维螺旋结构^[1]。尽管根据林家翘的星系密度波动的螺旋结构理论^[2], 巢纪平和叶笃正^[3]、刘式适和杨大升^[4]分别讨论了行星波和台风的螺旋结构, 但他们侧重从波传播的角度去分析螺旋图样, 并未从流场本身去说明。从物理上考虑, 中尺度涡旋运动必然考虑地球旋转和流体粘性, 才能形成水平方向向低压的旋转流动和伴有垂直运动的螺旋结构。

为此, 文中应用包括科氏力和粘性力的大气运动方程组, 找到了该方程组的速度(u, v, w)的定常解, 它们构成物理空间(x, y, z)的一个三维自治动力系统^[5]。由此从定性和定量两个方面分析了中尺度涡旋的螺旋结构, 并给出了螺旋斑图(spiral pattern)。

2 基本方程组

应用局地直角坐标系(x, y, z), 设流体的速度为(u, v, w), 静止时的流体压强、密度和位温分别为 p_0, ρ_0 和 θ_0 , 相应的压强、密度和位温偏差分别为 p, ρ 和 θ , 则在 Boussinesq 近似和静力近似的条件下, 描写大气中尺度涡旋的运动方程、连续性方程和热

* 初稿时间: 1998 年 3 月 9 日; 修改稿时间: 1999 年 1 月 27 日。

资助课题: 攀登项目“非线性科学”和教育部博士点资金(大气三维螺旋结构)。

力学方程可以写为^[6,7]

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - f_0 v = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + f_0 u = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \nu \nabla^2 v \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} = g \frac{\theta}{\theta_0} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + N^2 w = \kappa \nabla^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \end{cases} \quad (1)$$

其中 g 为重力加速度, f_0 为科氏参数(中尺度涡旋取为常数), ν 和 κ 分别是分子粘性系数和导温系数, N 是 Brunt-Väisälä 频率, 它可以表示为

$$N = g \frac{\overline{\frac{d \ln \theta_0}{dz}}}{\theta_0} \quad (2)$$

而 $\Phi = \frac{\rho}{\rho_0}$ (3)

在方程组(1)中 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ (4)

是三维拉普拉斯算子。

引进垂直涡度分量 ζ 和水平散度 D :

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (5)$$

并把方程组(1)的头两个方程化为涡度方程和散度方程, 则方程组(1)可化为

$$\begin{cases} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + f_0 D = \nu (\nabla_h^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \zeta \\ \frac{\partial D}{\partial t} - f_0 \zeta = -\nabla_h^2 \Phi + \nu (\nabla_h^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) D \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} = g \frac{\theta}{\theta_0} \\ D + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + N^2 w = \kappa (\nabla_h^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \end{cases} \quad (6)$$

其中 $\nabla_h^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ (7)

为二维(水平)拉普拉斯算子。

方程组(6)即是我们研究中尺度涡旋螺旋结构的基本方程。

3 本征值问题和定常解

为了考察涡旋的螺旋结构, 我们考察定常情况 ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$), 并设

$$(\zeta D, w, \Phi, \frac{\theta}{\theta_0}) = \left(\hat{\zeta}(z), \hat{D}(z), \hat{w}(z), \hat{\Phi}(z), \hat{\theta}(z) \right) \cos kx \cos ly \quad (8)$$

其中 k 和 l 分别是 x 和 y 方向上的波数。

式(8)代入主程组(6)得到

$$\begin{cases} f_0 \hat{D} = \nu \left(\frac{d^2}{dz^2} - K_n^2 \right) \hat{\zeta} \\ -f_0 \hat{\zeta} = K_n^2 \hat{\Phi} + \nu \left(\frac{d^2}{dz^2} - K_n^2 \right) \hat{D} \\ \frac{d\hat{\Phi}}{dz} = g \hat{\theta} \\ \hat{D} + \frac{d\hat{w}}{dz} = 0 \\ N^2 \hat{w} = \kappa \left(\frac{d^2}{dz^2} - K_n^2 \right) \frac{d\hat{\Phi}}{dz} \end{cases} \quad (9)$$

其中

$$K_n^2 = k^2 + l^2$$

从方程组(9)的第1式和第4式消去 \hat{D} , 从第2式和第4式消去 \hat{D} 则方程组(9)可化为

$$\begin{cases} \nu \left(\frac{d^2}{dz^2} - K_n^2 \right) \hat{\zeta} = -f_0 \frac{d\hat{w}}{dz} \\ K_n^2 \frac{d\hat{\Phi}}{dz} = -f_0 \frac{d\hat{\zeta}}{dz} + \nu \left(\frac{d^2}{dz^2} - K_n^2 \right) \frac{d^2 \hat{w}}{dz^2} \\ \frac{d\hat{\Phi}}{dz} = g \hat{\theta} \\ N^2 \hat{w} = \kappa \left(\frac{d^2}{dz^2} - K_n^2 \right) \frac{d\hat{\Phi}}{dz} \end{cases} \quad (10)$$

方程组(10)的第2式作 $\left(\frac{d^2}{dz^2} - K_n^2 \right)$ 运算, 并利用第1式和第4式, 从而消去 $\hat{\zeta}$ 和 $\frac{d\hat{\Phi}}{dz}$ 得到

$$\left[\left(\frac{d^2}{dz^2} - K_n^2 \right)^2 + \frac{f_0^2}{\nu^2} \right] \frac{d^2 \hat{w}}{dz^2} = \frac{K_n^2 N^2}{\nu \kappa} \hat{w} \quad (11)$$

设中尺度涡旋的厚度为 H , 则 \hat{w} 所满足的边条件为

$$w(0) = 0 \quad w(H) = 0 \quad (12)$$

式(11), (12) 构成一个本征值问题, 其本征函数可以写成

$$\hat{w}(z) = w_0 \sin nz \quad \left(n = \frac{\pi}{H}, w_0 > 0 \right) \quad (13)$$

它满足方程(11)要求

$$\nu^2 \kappa n^2 K^4 = -N^2 \kappa K_n^2 - f_0^2 \kappa n^2 \quad (14)$$

$$\text{其中} \quad K^2 = K_n^2 + n^2, \quad K^2 H^2 = \alpha^2 + \pi^2 \quad (\alpha^2 = K_n^2 H^2) \quad (15)$$

引进 Taylor 数和 Rayleigh 数

$$T_a = \frac{f_0^2 H^4}{\nu^2} \quad R_a = \frac{-N^2 H^4}{\nu \kappa} \quad (16)$$

则式(14)可以改写为

$$R_a = \frac{1}{K_n^2}(n^2 K^4 H^4 + n^2 T_a) \quad (17)$$

式(17)说明 $R_a > 0$, 即我们所讨论的是层结不稳定的情况。在层结稳定的情况下, 则要考虑流体的斜压性, 我们将另文讨论。

由式(13)和式(8), 则垂直速度 w 可以写成

$$w = w_0 \cos kx \cos ly \sin nz \quad (n = \frac{\pi}{H}) \quad (18)$$

式(13)代入式(9)和(10)得到

$$\begin{cases} \hat{\zeta}(z) = \frac{f_0 n}{\sqrt{K}^2} w_0 \cos nz \\ \hat{D}(z) = -nw_0 \cos nz \\ \hat{\Phi}(z) = \frac{N^2}{n K K^2} w_0 \cos nz \\ \hat{\theta}(z) = \frac{N^2}{g K K^2} w_0 \sin nz \end{cases} \quad (19)$$

式(19)代入式(8)求得

$$\begin{cases} \zeta = \frac{f_0 n}{\sqrt{K}^2} w_0 \cos kx \cos ly \cos nz \\ D = -nw_0 \cos kx \cos ly \cos nz \\ \frac{p}{\rho_0} = \frac{N^2}{n K K^2} w_0 \cos kx \cos ly \cos nz \\ \frac{\theta}{\theta_0} = -\frac{N^2}{g K K^2} w_0 \cos kx \cos ly \sin nz \end{cases} \quad (20)$$

根据涡度 ζ 和散度 D , 我们可以求得水平速度 u 和 v 。为此引入流函数 Ψ 和速度势 Φ , 则有

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (21)$$

式(21)代入式(5)有

$$\zeta = \nabla_h^2 \Psi, \quad D = \nabla_h^2 \Phi \quad (22)$$

与式(8)类似, 令

$$(\mathcal{Q}_z, \Psi(z)) = (\hat{\mathcal{Q}}_z, \hat{\Psi}(Z)) \cos kx \cos ly \quad (23)$$

代入式(22), 并利用式(19)的头两式求得

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{Q}}_z &= -\frac{1}{K_n^2} \hat{D} = \frac{1}{K_n^2} n w_0 \cos nz \\ \hat{\Psi}(z) &= -\frac{1}{K_n^2} \hat{\zeta} = -\frac{f_0 n}{\sqrt{K}^2 K_n^2} w_0 \cos nz \end{aligned} \quad (24)$$

式(24)代入式(23)求得

$$\begin{cases} \Phi = \frac{1}{K_n^2} n w_0 \cos kx \cos ly \cos nz \\ \Psi = -\frac{f_0 n}{\sqrt{K}^2 K_n^2} w_0 \cos kx \cos ly \cos nz \end{cases} \quad (25)$$

式(25)代入式(21)求得水平速度场为^[8]

$$\begin{cases} u = \left(-\frac{f_0 l n}{\sqrt{K^2 K_n^2}} \cos kx \sin ly - \frac{kn}{K_n^2} \sin kx \cos ly \right) w_0 \cos nz \\ = \frac{n}{K_n^2} \left(-\frac{l}{\alpha^2 + \pi^2} \cos kx \sin ly - k \sin kx \cos ly \right) w_0 \cos nz \\ v = \left(-\frac{ln}{K_n^2} \cos kx \sin ly + \frac{f_0 kn}{\sqrt{K^2 K_n^2}} \sin kx \cos ly \right) w_0 \cos nz \\ = \frac{n}{K_n^2} \left(-l \cos kx \sin ly + \frac{k}{\alpha^2 + \pi^2} \sin kx \cos ly \right) w_0 \cos nz \end{cases} \quad (26)$$

由式(18)和(20),若设中尺度气旋式涡旋系统 $w_0 > 0$,中尺度反气旋式涡旋系统 $w_0 < 0$,并取 $(x, y) = (0, 0)$ 为涡旋中心。则在由 $z = 0$ 到 $z = H$ 的范围内,气旋(反气旋)中心全是上升 $w > 0$ 运动(下沉 $w < 0$),热中心 $\frac{\theta}{\theta_0} > 0$ (冷中心 $\frac{\theta}{\theta_0} < 0$)。在下层 $0 < z < \frac{H}{2}$,有辐合 $D < 0$ (辐散 $D > 0$),气旋涡度 $\zeta > 0$ (反气旋涡度 $\zeta < 0$),低压中心 $\frac{p}{p_0} < 0$ (高压中心 $\frac{p}{p_0} > 0$)。而在上层 $\frac{H}{2} < z < H$ 则相反。这些都与不稳定层结条件下的中尺度涡旋的实际情况相似。

4 非线性动力系统和螺旋斑图

在物理空间 (x, y, z) 中,速度场的3个分量 u, v 和 w 分别就是 x, y 和 z 对时间 t 的个别微商,即 $\dot{x} = u, \dot{y} = v, \dot{z} = w$ 。因而式(26)和式(18)就构成如下的三维非线性自治动力系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{n}{K_n^2} w_0 \left(\frac{l}{\alpha^2 + \pi^2} \cos kx \sin ly + k \sin kx \cos ly \right) \cos nz \\ \dot{y} = -\frac{n}{K_n^2} w_0 \left(l \cos kx \sin ly - \frac{k}{\alpha^2 + \pi^2} \sin kx \cos ly \right) \cos nz \\ \dot{z} = w_0 \cos kx \cos ly \sin nz \end{cases} \quad (27)$$

方程组(27)是非线性的,令其右端为零,可以求得它的很多平衡态。为了阐述涡旋的三维结构,我们考虑代表涡旋中心下层状况和上层状况的两个平衡态:

$$P: (x, y, z) = (0, 0, 0), \quad Q: (x, y, z) = (0, 0, H) \quad (28)$$

为了考察P点和Q点的稳定性,我们求到P点和Q点的式(27)右端的Jacobi矩阵分别是

$$\begin{pmatrix} -\frac{nk^2}{K_n^2} w_0 & -\frac{l^2 n}{K_n^2 (\alpha^2 + \pi^2)} w_0 & 0 \\ \frac{k^2 n}{K_n^2 (\alpha^2 + \pi^2)} w_0 & -\frac{nl^2}{K_n^2} w_0 & 0 \\ 0 & 0 & mw_0 \end{pmatrix} \text{和} \begin{pmatrix} \frac{nk^2}{K_n^2} w_0 & \frac{l^2 n}{K_n^2 (\alpha^2 + \pi^2)} w_0 & 0 \\ -\frac{k^2 n}{K_n^2 (\alpha^2 + \pi^2)} w_0 & \frac{nl^2}{K_n^2} w_0 & 0 \\ 0 & 0 & -mw_0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

它们的特征值分别是

$$\begin{cases} P: \lambda_1 = nw_0, \lambda_{2,3} = -\frac{nw_0}{2} \pm \left[\frac{k^2 l^2 T_a}{(\alpha^2 + \pi^2)^2} - \left(\frac{k^2 - l^2}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} i \\ Q: \lambda_1 = -nw_0, \lambda_{2,3} = \frac{nw_0}{2} \pm \left[\frac{k^2 l^2 T_a}{(\alpha^2 + \pi^2)^2} - \left(\frac{k^2 - l^2}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} i \end{cases} \quad (30)$$

当 $k^2 = l^2$ 时, 式(30)所列出的特征根各为一实根和二共轭复根, 即平衡态 P 和 Q 都是鞍-焦点(Saddle-focus), 因而中尺度涡旋必然存在螺旋结构。

事实上, 在下层 ($0 < z < \frac{H}{2}$) 的任一高度 $z = z_1$, 根据式(27)的前两式, 在 $(x, y) = (0, 0)$ 附近近似有

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{na_1}{K_n^2} w_0 \left(\frac{l^2}{\alpha^2 + \pi^2} \overline{T_a} y + k^2 x \right) \\ \dot{y} = -\frac{na_1}{K_n^2} w_0 \left(l^2 y - \frac{k^2}{\alpha^2 + \pi^2} \overline{T_a} x \right) \end{cases} \quad (a_1 = \cos n z_1 > 0) \quad (31)$$

类似在上层 ($\frac{H}{2} < z < H$) 的任一高度 $z = z_2$ 近似有

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{na_2}{K_n^2} w_0 \left(\frac{l^2}{\alpha^2 + \pi^2} \overline{T_a} y + k^2 x \right) \\ \dot{y} = -\frac{na_2}{K_n^2} w_0 \left(l^2 y - \frac{k^2}{\alpha^2 + \pi^2} \overline{T_a} x \right) \end{cases} \quad (a_2 = \cos n z_2 < 0) \quad (32)$$

式(31)和式(32)分别表征涡旋中心附近下层和上层的水平流场, 引入平面极坐标 (r, θ) 有

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r \dot{r} = x \dot{x} + y \dot{y}, \quad r^2 \dot{\theta} = x \dot{y} - y \dot{x} \quad (33)$$

则式(31)和(32)可以合写为

$$\begin{cases} r \dot{r} = -\frac{na_j}{K_n^2} w_0 \left[(k^2 x^2 + l^2 y^2) - \frac{\overline{T_a}}{\alpha^2 + \pi^2} (k^2 - l^2) xy \right] \\ r^2 \dot{\theta} = \frac{na_j}{K_n^2} w_0 \left[\frac{\overline{T_a}}{\alpha^2 + \pi^2} (k^2 x^2 + l^2 y^2) + (k^2 - l^2) xy \right] \end{cases} \quad (j = 1, 2) \quad (34)$$

在 $k^2 = l^2$ 的条件下, 式(34)化为

$$\begin{cases} r \dot{r} = -\frac{na_j}{2} w_0 r^2 \\ r^2 \dot{\theta} = \frac{na_j}{2(\alpha^2 + \pi^2)} \overline{T_a} w_0 r^2 \end{cases} \quad (j = 1, 2) \quad (35)$$

注意 $a_1 > 0, a_2 < 0$, 则由式(35)看到, 在气旋(反气旋)下层中心附近 $\dot{r} < 0, \theta > 0$ ($\dot{r} > 0, \theta < 0$); 上层中心附近 $\dot{r} > 0, \theta < 0$ ($\dot{r} < 0, \theta > 0$), 因而气旋(反气旋)下层流体逆(顺)时针转向内(外), 上层流体顺(逆)时针转向外(内)。

式(35)的前两式相除可得到

$$\frac{dr}{rd\theta} = - \frac{\alpha^2 + \frac{\pi^2}{T_a}}{T_a} \quad (36)$$

积分式(36)得到

$$r = ce^{-\frac{\alpha^2 + \frac{\pi^2}{T_a}\theta}{T_a}} = ce^{-\frac{K^2}{f_0}\theta} \quad (37)$$

其中 C 为积分常数, 式(37)表征的是一类对数螺旋线。

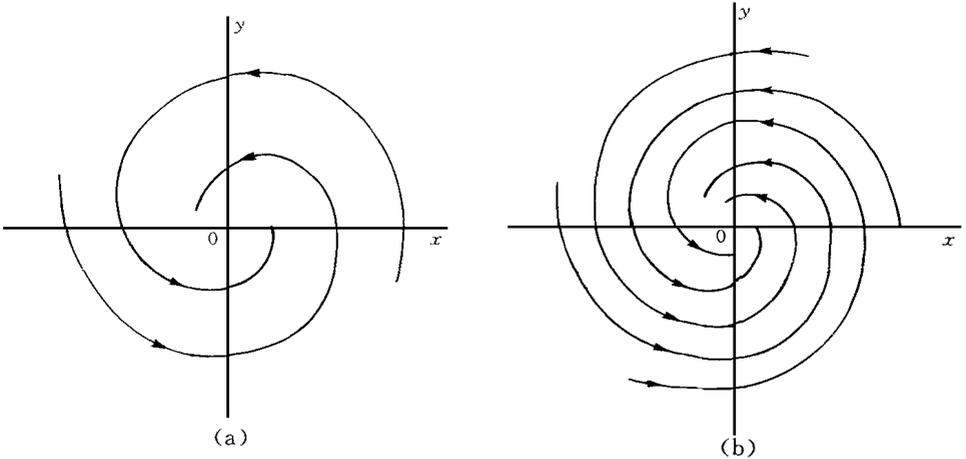


图 1 气旋下层的螺旋图样

(a. $m = 2$; b. $m = 4$)

中尺度涡旋中的主要波动是惯性重力内波。固定时刻, 在 $z = \text{常数}$ 的平面上, 等位相线是

$$Khr + m\theta = \text{常数} \quad (38)$$

显然, 它表征螺旋线, m 称为螺旋线的臂数。因 $K_h > 0, m > 0$, 因而 θ 随 r 的增加而减小, 它称为曳式 (trailing) 螺旋线, 这与式(36)和式(37)的分析相一致。图 1a 和图 1b 分别给出了 $m = 2$ 和 $m = 4$ 时下层中尺度气旋的螺旋图样, 图 2 给出的是气旋的三维螺旋斑图。

5 结 论

大气中尺度涡旋的三维流场在物理空间中形成一个非线性动力系统, 对该系统的定性和定量分析都表明, 中尺度涡旋具有螺旋结构。北半球大气中气旋下层逆时针螺旋向内, 反气旋下层顺时针螺旋向外。上层则相反。这种水平流场与涡旋中心附近的垂直运动配合就形成涡旋的三维螺旋斑图。显

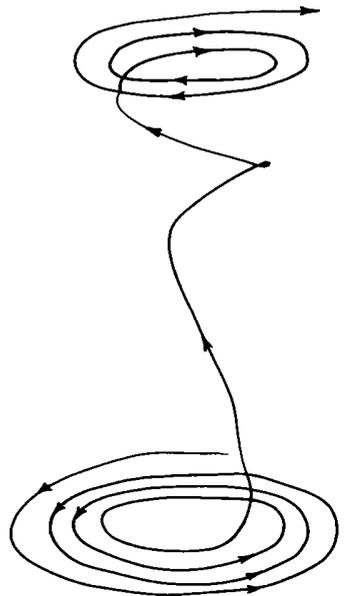


图 2 气旋的三维螺旋斑图

然地球的旋转和流体的粘性对于涡旋螺旋结构的形成是非常重要的。

参考文献

- 1 Bluestein H B. Synoptic-dynamic meteorology in midlatitudes. New York: Oxford University Press, 1992, 1, pp431
- 2 林家翘. 星系螺旋结构理论. 北京: 科学出版社, 1977. pp215
- 3 巢纪平, 叶笃正. 正压大气中的螺旋行星波. 大气科学, 1977, 35(2): 81 ~ 89
- 4 刘式适, 杨大升. 台风的螺旋结构. 气象学报, 1980, 38(3): 193 ~ 204
- 5 Veronis G. Cellular convection with finite amplitude in a rotating fluid. J Fluid Mech, 1959, 5: 401- 435
- 6 刘式达, 刘式适. 地球流体力学中的数学问题. 北京: 海洋出版社, 1990. pp565
- 7 刘式适, 刘式达. 大气动力学. 北京: 北京大学出版社, 1991. pp536
- 8 Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. New York: Oxford University Press, 1961. pp585

THEORY OF THE 3-D SPIRAL STRUCTURE FOR MESO-SCALE VORTEX IN THE ATMOSPHERE

Liu Shida Xin Guojun Liu Shikuo Liang Fuming

(Department of Geophysics, Peking University, Beijing, 100871)

Abstract

In this paper, the steady 3-D stream field and the corresponding Pressure and temperature (density) field are obtained from the equations describing the meso-scale vortex in the geophysical fluid. The 3-D velocity fields construct a nonlinear autonomous system in the physical space. It is shown that the centres of the cyclonic (anticyclonic) are low pressure (high pressure) with the horizontal convergence (divergence) motion in lower levels and the results are just the contrary in upper levels. So there exists the 3-D spiral structure in the meso-scale vortex, there are in conform fairly well with observations. It implies that the rotation of earth and viscosity of fluid play an important role in the spiral structure in order to ensure the mass conservation.

Key words: Atmospheric vortex, Spiral structure, Dynamical system.