

海冰-海温非线性耦合系统的研究

林振山 乐 群

王勤学

(南京大学大气科学系, 南京, 210093) (北京师范大学, 北京, 100875)

王国复

曹鸿兴

(南京大学大气科学系, 南京, 210093) (中国气象科学研究院, 北京, 100081)

摘要

对 Saltzman 模式进行了两个方面的改进试验: (1) 引入气溶胶非线性参数方案并提高模式阶次; (2) 在改进(1)的基础上, 对 Saltzman 模式的云反馈机制再进行修正。定态解析解表明, 改进试验(1), (2) 均克服了 Saltzman 模式中海温二个平衡态仅相差 0.0012 K 这一严重缺陷。数值模拟表明, 系统存在二个平衡态, 而当气溶胶光学厚度增大时, 两极的冰冻面积将以指数形式增大。

关键词: 模式, 气溶胶, 云反馈机制, 平衡态。

1 引言

为研究太阳常数、 CO_2 等参数对海冰范围的影响, Saltzman 和 Mortz^[1] (1980) 建立了一个海温(ϕ) 和冰界范围 ($\psi = \sin \phi$, ϕ 为纬度) 的理想非线性时变系统, 其预报方程为:

$$\frac{d}{dt} = \frac{1}{C_w w D} \left\{ \int_0^\psi [H_s^{(1)} + H_s^{(2)} + H_s^{(3)} + H_s^{(4)}] d\phi - \right. \\ \left. \frac{1}{2} H_s^{(5)} d\phi \right\} - \frac{L_f}{2} M(\phi) \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{1}{2 i I} M(\phi) \quad (2)$$

其中: $M(\phi) = \frac{1}{L_f} [H_s^{(1)} + H_s^{(2)} + H_s^{(3)} + H_s^{(4)} + H_s^{(5)}] =$ 表示 ϕ 处的融化(冻结)率。 $H_s^{(1)}$, $H_s^{(2)}$, $H_s^{(3)}$, $H_s^{(4)}$, $H_s^{(5)}$ 是海表面的垂直热通量分别由短波辐射, 长波辐射, 感热向空中和向上面的覆冰的传导和对流所引起; L_f 是凝结潜热; c_w , w 分别是海冰的比热和密度; i, I 分别为海冰的密度和厚度, I 是海冰活动带的南北宽度; D 为海深, 对预报

方程中的各物理量进行参数化后得:

$$\frac{d}{dt} = k \left(\sum_{i=0}^6 i^i + (-7 + -8) \right) \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} = k \left(\sum_{i=0}^5 i^i + -6 \right) \quad (4)$$

这里的 i , i 均为展开系数。根据式(3)和(4), Saltzman 成功地求出海冰(界)的双平衡态, 并研究了气候变化与太阳常数和 CO₂ 的关系。但 Saltzman 模式有 3 个不足之处:

- (1) 与海冰(界)的双平衡态相对应的海温二个平衡态仅相差 0.0012 K;
- (2) 没有研究气溶胶的反馈作用;
- (3) 云反馈机制过于简化并与实际情况不符。

为克服 Saltzman 模式的不足, 首先对 Saltzman 模式进行了两个方面的改进试验。第一改进是引入气溶胶非线性参数方案并将模式提升为 8 次非线性方程组; 第二改进是在(1)的基础上再对 Saltzman 模式的云反馈机制进行修正。此外, 还利用改建的 8 次非线性方程组, 模拟了系统平衡态将随气溶胶光学厚度的变化。

2 模式及其定态解

假设: (1) 地球表面完全为海冰或冰川所覆盖; (2) 只考虑海洋-海冰之间的耦合作用; (3) 海底向上的垂直热通量忽略不计; 设 $T_z(\cdot)$ 是边界层顶温度, 取为:

$$T_z(\cdot) = T_z(0) - \frac{a_z}{2} z^2 \quad (T_z(0) = 288.5 \text{ K}, a_z = 27 \text{ K})$$

海表面温度与此同步变化:

$$T_s(\cdot) = T_0 - \frac{a_s}{2} z^2 \quad (T_0 = 300 \text{ K}, a_s = 27 \text{ K}) \quad (5)$$

2.1 对原模式的改进

引入 King M D (1984) 平流层气溶胶吸收和反射的太阳辐射的参数化方案^[2]:

$$r_k^*(\text{ref}, \cdot) = a_k^* \text{ref} + b_k^* \text{ref}^2 \quad (6)$$

$$x_k^*(\text{ref}, \cdot) = e_k^* + f_k^* \text{ref} + g_k^* \text{ref}^2 \quad (7)$$

其中, r_k^* 和 x_k^* 分别代表气溶胶的反射率和吸收率, $a_k^*, b_k^*, e_k^*, f_k^*, g_k^*$ 是系数值; $k = 1, 2$ 分别表示对波长 0.83 m 和 > 0.83 m 的反向散射率和吸收率。王勤学^[2] (1995) 计算了 r_k^*, x_k^* 与参考气溶胶光学厚度 ref 和 \cdot 的关系式:

$$r_k^* = 0.330 \text{ ref} - 0.2462 \text{ ref}^2 - (0.0154 \text{ ref} - 0.0215 \text{ ref}^2) \quad (8)$$

$$x_k^* = 0.0513 + 0.0008 \text{ ref} + 0.0012 \text{ ref}^2 + 0.0104 \text{ ref} - 0.0157 \text{ ref}^2 + 0.0680 \text{ ref}^2 \quad (9)$$

2.2 参数化方案

2.2.1 采用 Saltzman 模式里的云量参数化方案:

$$n = 0.45 + 0.45 \frac{3}{3} \quad (10)$$

2.2.2 短波辐射通量 $H_s^{(1)}$

$$\begin{aligned} H_s^{(1)} &= (1 - n) H_{\text{clear}}^{(1)} + H_{\text{cloudy}}^{(1)} \\ &= (1 - n) R_0 \text{ clear} + n R_0 \text{ cloudy} \end{aligned} \quad (11)$$

其中:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{clear} = 1 - (d + r) \\ \text{cloudy} = 1 - (d + n + T + n + k^*) \\ = d + r + k \end{array} \right. \quad (12)$$

式中 d 为除水汽外大气的吸收率; r 为水汽吸收率, T 和 n 是云顶上的大气和云量的吸收率; n 为云滴的吸收率; k^* 为气溶胶; k 为气溶胶吸收率。

$$\left\{ \begin{array}{l} d = d(0)p(\) \\ r(\) = 1 + 2T_s(\)p(\) \\ k = k^* p(\) \end{array} \right. \quad (13)$$

把式(8), (9), (10), (12), (13)代入式(11)得:

$$H_s^{(1)} = R_0 \sum_{i=0}^7 i^{-i} \quad (14)$$

其中, R_0 为太阳常数的三分之一, $i(i = 0, 1 \dots 7)$ 。 $H_s^{(1)}$ 的参数化方案见附录。

2.2.3 长波辐射通量

$$H_s^{(2)} = T_s^4 (1 - v)(1 - c) \quad (15)$$

这里:

$$v = v + c - t - z \quad (16)$$

v , c , z 分别为水汽, CO_2 , O_3 的辐射系数, t 为上述气体重迭部分的辐射系数, 可取为 0.12。其中:

$$\left\{ \begin{array}{l} v = \frac{*}{v} + 2(T_s - 286) \\ c = \frac{*}{c} + 10(\overline{T_s} - 278) \end{array} \right. \quad (17)$$

把上述各式代入式(15)得:

$$H_s^{(2)} = (1 - n) (0T_s^4 - 2T_s^5) \quad (18)$$

T_s^4 , T_s^5 的近似处理为:

$$T_s^4 = 6T_s^{*2}T_s - 8T_s^{*2}T_s + 3T_s^{*4} = \frac{2}{4} + \frac{4}{5} \frac{-2}{2} + \frac{-4}{6}$$

$$T_s^5 = \frac{2}{7} + \frac{4}{8} \frac{-2}{2} + \frac{-4}{9}$$

又有:

$$0 = 3 - c, \quad 3 = 1 - \frac{*}{v} + 2T_s$$

对于 c 取 Bryson 和 Dittberner (1976)^[2] 推导结果

$$c = b_8 \ln [\text{CO}_2] + b_9 \quad (19)$$

有关感热、潜热、冰界表面热通量的计算均与 Saltzman 的相同, 且取相同的参数值。由式(5)~(19)可得:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_s^{(2)} = 65.961 - 5.237 \frac{2}{2} - 26.875 \frac{3}{3} - \\ \quad 2.522 \frac{4}{4} + 2.165 \frac{5}{5} + 1.043 \frac{7}{7} \\ H_s^{(3)} = 5.2 + 21.6(1 - \frac{2}{2}) \frac{2}{4} \\ H_s^{(4)} = 119.58 - 101.4 \frac{2}{2} - 85.09 \frac{4}{4} + \\ \quad 122.93 \frac{6}{6} - 33.24 \frac{8}{8} + 66.35 \frac{2}{4} - \\ \quad 84.58 \frac{4}{6} + 33.24 \frac{6}{8} \\ H_s^{(5)} = r(-), \quad r = 10 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}, \quad = 273 \text{ K} \end{array} \right. \quad (20)$$

2.3 定态解

将式(5)~(20)代入式(1)~(2), 并令

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= 0 \\ \frac{d}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

则可求得含气溶胶高阶非线性海冰-海温耦合系统的两个定态:

$$(0.8950, 281.41 \text{ K}); \quad (0.5324, 281.27 \text{ K}) \quad (22)$$

而 Saltzman 所求的两个定态则为: (0.8783, 277.6112 K); (0.6544, 277.610 K)。

由于 Saltzman 所计算的二个定态的海温值几乎是一样的, 即 0.0012 K 的海温温差将导致较大的冰界范围的变化。这是十分不合理的。此外, Saltzman 所计算的二个定态的海温值亦太低了。而引入气溶胶反馈机制并提高模式的非线性耦合幂次的方案(1), 不仅克服 Saltzman 所计算的二个定态的海温值几乎是一样的缺点, 还提高了海温两定态的温度值。总之, 方案(1)所导出的模式较 Saltzman 模式已有较大的改善。但式(22)的第二定态的海温值似乎高了一点, 为此, 以下将对 Saltzman 模式进行方案(2)的改进, 即在方案(1)的基础上对 Saltzman 模式的云参数方案进行改进。

2.4 云参数方案的改进及其定态解

考虑到云对温度的反馈作用, 引入仪垂祥(1991)^[3]的云量计算方案:

$$n = o / n + r T_s / n - 273$$

即: $n = 4 + 2 T_s = 4 + 2(T_o - a_z^2 / \tau^2)$ (23)

其中, $o = 0$, $n = 0.1206$, $r = 3.816 \times 10^{-3}$

$$\tau = -273 T / n, \tau = T / n$$

以式(23)替代式(10), 由式(5)~(19)可得:

$$H_s^{(2)} = b_0 + b_2 \frac{2}{2} + b_4 \frac{4}{4} + b_6 \frac{6}{6} \quad (24)$$

式中 b_0, b_2, b_4 和 b_6 的表达式见附录。而 $H_s^{(3)}, H_s^{(4)}$ 和 $H_s^{(5)}$ 的参数化方案见参考文献[1]。

$$\begin{cases} H_s^{(3)} = c_1 + c_2 \frac{2}{2} + c_3 \frac{2}{4} + c_4 \frac{(1 - \tau^2)}{4} 2 \\ H_s^{(4)} = d_0 + d_1 \frac{2}{2} + d_2 \frac{4}{4} + d_3 \frac{6}{6} + d_4 \frac{8}{8} + d_5 \frac{2}{4} + d_6 \frac{4}{6} + d_7 \frac{6}{6} \\ H_s^{(5)} = r(-) \quad (r = 10 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}) \end{cases} \quad (25)$$

把式(14), (24), (25)代入式(1), (2)可得控制方程:

$$\frac{d}{dt} = k_0 \left(\sum_{i=0}^8 i^i + (-9 + 10) \right) \quad (26)$$

$$\frac{d}{dt} = k \left(\sum_{i=0}^7 i^i + (-8) \right) \quad (27)$$

其中, $k = \frac{1}{C_w w_0}$, $k = \frac{1}{2 I}$; 系数 i, i 见附录。

式(26)~(27)就是所建立的含参数非线性海冰-海温气候模式, 它与 Saltzman 模式(3), (4)比较有以下优点:

(1) 考虑了云对温度的反馈作用。

(2) 气溶胶和云量等参数的引入, 提高了模式的耦合次数, 由原来的 6 次耦合提高到 8 次, 这将更地反映气候系统的非线性性质, 模拟结果也将更接近实际。

3 稳定性分析

3.1 平衡态

系统(26), (27)的平衡态, 应满足以下方程:

$$\sum_{i=0}^8 i^i + (-9 + 10) = 0 \quad (28)$$

$$\sum_{i=0}^7 k_i^{i-1} + \sum_{i=0}^8 k_i^{i-1} = 0 \quad (29)$$

由式(29)得:

$$0 = - \sum_{i=0}^7 k_i^{i-1} / \sum_{i=0}^8 k_i^{i-1} \quad (30)$$

将式(30)代入式(28)得:

$$\sum_{i=0}^8 k_i^{i-1} = 0 \quad (31)$$

其中: $k_i = \sum_{i=0}^8 (m_0 + m_{10})^{-1}$ ($i = 0, 1, 2 \dots 7$), $k_8 = \sum_{i=0}^8 m_8$ 。

取文献[1]中有关参数的估计值, 可以计算出有关系数, 从而可求出方程(31)的根。其中在 $0 < < 1$ 区间有两个定态: $(0.8585, 281.2691 \text{ K})$; $(0.4385, 279.7976 \text{ K})$, 显然, 该解不仅克服了 Saltzman 模式中海温二个平衡态仅相差 0.0012 K 这一严重缺陷, 而且较方案(1)的两定态的海温取值更为合理。可见, 气溶胶和云对海冰-海温非线性系统的反馈作用是十分重要的, 尤其是云的反馈作用。

3.2 平衡态的稳定性讨论

令 $\dot{x} = x - x_0$, $\dot{y} = y - y_0$, 则式(26), (27)的距平方程为:

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=0}^8 m_i^{i-1} + (m_9 + m_{10}) \quad (32)$$

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{i=0}^7 n_i^{i-1} + n_8 \quad (33)$$

系数 m_i, n_i 见附录, 其线性化系统为:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} - \\ - \\ - \\ - \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} - \\ - \\ - \\ - \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} - \\ - \\ - \\ - \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} - \\ - \\ - \\ - \end{pmatrix} \end{bmatrix}_{(0,0)} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

满足 $(\lambda, \mu) = e^{w_i}$ 的特征值为

$$w = a \pm \sqrt{(a^2 - b^2)} = w_r \pm j w_i \quad (34)$$

其中

$$\left\{ a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} - & - \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{K}{2} M_{10} + \frac{K}{2} n_1 \right. \quad (35)$$

$$b = \begin{pmatrix} - & - & - & - \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= K K \left[M_{10} n_1 - \sum_{i=0}^8 \begin{pmatrix} - & - & - & - \\ i & i-1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \right]$$

如果 $w_r = 0$ 则平衡态是稳定的, 反之则是不稳定的。把两平衡态的值代入计算得:

(1) $(0.8585, 281.2691)$ 特征值: $a = -4.5337 \times 10^{-10} < 0$, $b = 7.309 \times 10^{-20} > 0$, 故是稳定的焦点, 是吸引子; 在平衡态附近有一振动后, 随时间的推移点有回复到 $(0^{(1)}, 0^{(1)})$ 的趋势。

(2) $(0.4385, 279.7976)$ 特征值: $a = 4.3221 \times 10^{-10} > 0$, $b = -7.6371 \times 10^{-20} < 0$, 是不稳定的鞍点, 是排斥子; 微小振动后有远离平衡点的趋势。

4 气溶胶光学厚度对平衡态的影响

由于引入了气溶胶反馈机制, 气溶胶的光学厚度必对平衡态的演化产生一定下的影响。图 1 是平衡态 r_0 随气溶胶光学厚度 η_{ref} 的变化情况。

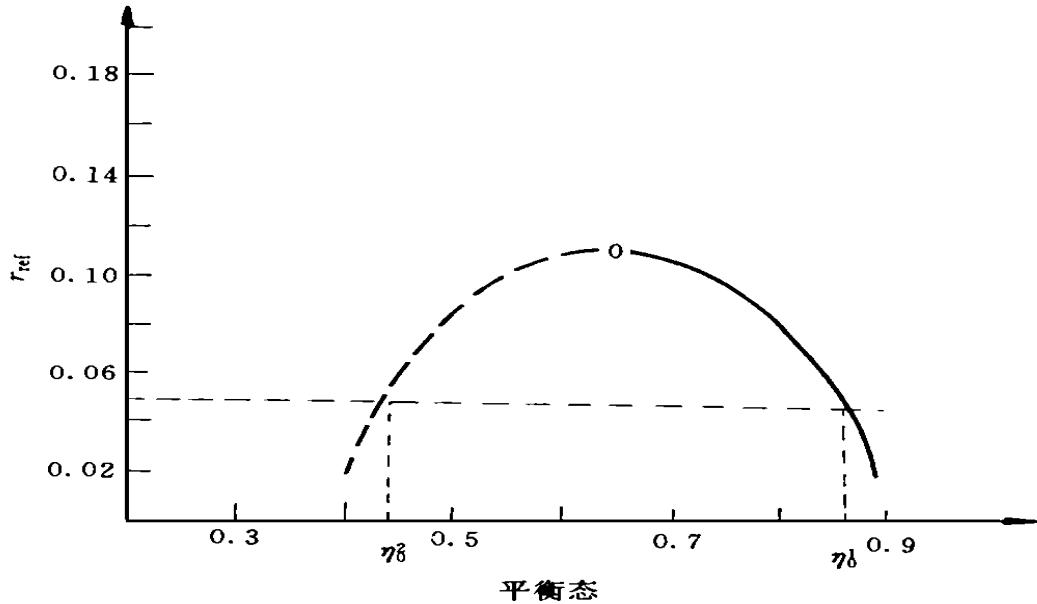


图 1 平衡态随参数 η_{ref} 的变化

从图 1 可以看出, 与气溶胶光学厚度 η_{ref} 所对应的平衡态有两支, 即左边的不稳定分支(虚线)和右边的稳定分支(实线), 分岔点是 $\eta_{\text{ref}} = 0.11$ 。由于系统演化的是稳定的平衡态(不稳定的平衡态仅是过渡的暂态), 所以气溶胶光学厚度起着稳定的负反馈作用。从图 1 还可以看出, 冰界对气溶胶光学厚度的响应是非线性的, 当气溶胶光厚度增大时, 两极的冰冻面积将以指数形式增大。所以, 大规模的火山爆发、森林燃烧和核爆炸都将导致“冰期”的出现。

5 结语

1. 对 Saltzman 模式引入气溶胶非线性参数方案并提高模式阶次后, 克服了 Saltzman 模式中海温二个平衡态仅相差 0.0012 K 这一严重缺陷;
2. 在引入气溶胶非线性参数方案后, 又将 Saltzman 模式的云反馈机制进行修正, 使得两定态解析解更为合理。所以, 气溶胶和云对海冰-海温非线性系统的反馈作用是十分重要的。
3. 数值模拟表明, 当气溶胶光学厚度增大时, 两极的冰冻面积将以指数形式增大。所以大规模的火山爆发、森林燃烧和核爆炸都将导致“冰期”的出现。

参考文献

- 1 Saltzman B and Mortz R. A time-dependent climatic feedback system involving sea-ice extent, ocean temperature and CO₂. *Tellus*, 1980, 32: 93– 118
- 2 王勤学, 曹鸿兴. 一个理想反馈系统演化的数值模拟. *北京师范大学学报*, 1995, 增刊 1: 87 ~ 95
- 3 仪垂祥. 云量-海温气候系统的研究: [学位论文]. 南京: 南京大学大气科学系, 1991, 30 ~ 61

STUDY ON THE NONLINEAR COUPLED SYSTEM OF ICEBOUNDARY AND SEA TEMPERATURE

Lin Zhenshan Yue Qun

Wang Qinxue

(Nanjing University, Nanjing, 210093) (Peking Normal University, Beijing, 1000)

Wang Guofu

Cao Hongxin

(Nanjing University, Nanjing, 210093) (Chinese Academy of Meteorological Sciences, Beijing, 100081)

Abstract

Two plans of parameter are introduced to the Saltzman s Model to improve its properties. One is aerosol parameter and the other is cloud. The solutions show that both plans overcome the sortcoming of Saltzman s Model which the difference between its two steady states is only 0.0012 K. The numerical experiment shows that there exists two equilibrium states, and the icecover will increase in an exponential form with the increasing of aerosol.

Key words: Model, Aerosol, Feedback mechanism of cloud, Equilibrium states.

附录

 $H_3^{(1)}$ 的参数化方案

$$\begin{aligned}
 3 &= 30 + 31 + 32 + 32^2 & 4 &= 40 + 41 + 32^2 \\
 30 &= 1 + 2T_0 + d(0) + 0.51298 + 2.134 \times 10^{-3} \text{ref} + 1.62944 \times 10^{-3} \text{ref}^2 \\
 31 &= 0.01042 - 0.0157 \text{ref}^2 & 32 &= 0.068 + 0.01376 \text{ref} - 0.0014369 \text{ref}^2 \\
 40 &= 4 - 0.142732 \text{ref} + 0.53862 \text{ref}^2 & 41 &= -0.0154 \text{ref} + 0.0215 \text{ref}^2 \\
 42 &= 0.40379 \text{ref} - 0.23499 \text{ref}^2 \\
 d(0) &= 0.0470 & 1 &= -0.8496 & 2 &= 0.00327 & 3 &= 0.1784 \\
 5 &= 0.07779 & 6 &= -0.8300 & 7 &= 1.0153 & 8 &= -3.7655 & 9 &= 4.0526 \\
 0 &= 1 - r - 10 - 40(4 + 2T_0) & a_1 &= -31 - 10 - 41(4 + 2T_0) + 5a_0 \\
 a_2 &= -32 + \frac{-2a_3}{2} + 31 - 30 + 42(4 + 2T_0) + 40 - \frac{-2a_3}{2} + 5(-31 - 30 - \\
 &\quad 41 - 41 - 2T_0) + 6a_6 \\
 a_3 &= -32 - 7 + \frac{-2a_3}{2} - 31 - 8 - 30 - 9 + 41 - \frac{-2a_3}{2} + 5(-32 + \frac{-2a_3}{2} - 31 - 7 - 30 - 8 - 42 - 4 - \\
 &\quad 42 - 2T_0 + 4a_0 - \frac{-2a_3}{2}) + A_6(-A_{31} - A_{30}a_7 - A_{41}k_4 - A_{41}k_2T_0) \\
 a_5 &= -A_{32}a_9 + \frac{A_2A_2a_3}{G^2} + A_8(-A_{32}a_9 + \frac{K_2A_2a_3}{G^2} - A_{31}a_9 + A_{42}k_2a_3 \frac{1}{G^2}) + A_6(-A_{32}a_7 + \frac{A_2A_2a_3}{G^2} - \\
 &\quad A_{31}a_8 - A_{30}a_9 + A_{41} \frac{K_2a_3}{G^2}) \\
 A_6 &= A_8(-A_{32}a_9 + \frac{A_2A_2a_3}{G^2}) + A_6(-A_{32}a_8 + \frac{A_2A_2a_3}{G^2} - A_{31}a_9 + A_{42}k_2a_3 \frac{1}{G^2}) \\
 A_7 &= A_6(-A_{32}a_9 + \frac{A_2A_2a_3}{G^2})
 \end{aligned}$$

 $H_3^{(2)}$ 的参数化方案

$$\begin{aligned}
 b_0 &= R(1 - B_1 T_0)(B_{0B4} - B_{2B7}) \\
 b_2 &= -R(B_{0B4} - B_{2B7})a_3 - (1 - B_1 T_0)(B_{5B0} - B_{2B8}) \\
 b_4 &= R(1 - B_1 T_0)(B_{0B6} - B_{2B9}) - R(B_{5B0} - B_{2B8})a_3 \\
 b_6 &= -R(B_{0B6} - B_{2B9})a_3
 \end{aligned}$$

控制方程(26), (27)系数

$$\begin{aligned}
 W_0 &= eW_0 - H_3^{(31)} - \frac{D}{2}W \\
 W_1 &= R_0A W - B W - C_1 + C_2/3 + C_3/5 - eW_1 - (d_0 + d_1/3 + d_2/5 + d_3/7 + d_4/9) + \\
 &\quad H_3^{(31)} - DW/2 \\
 W_2 &= R_0A W - eW_2 - DW/2 & W_3 &= R_0A W - eW_3 - DW/2 & W_4 &= R_0A W - eW_4 - DW/2 \\
 W_5 &= R_0A W - eW_5 - DW/2 & W_6 &= R_0A W - DW/2 & W_7 &= R_0A W - DW/2 \\
 W_8 &= R_0A W & W_9 &= B W & W_{10} &= -DW/2 \\
 U_0 &= 0.67R_0A U - BU - (c_2 - c_1 - c_3 + d_0 + d_2 + d_3 + d_4) - eU_0 - rSG \\
 U_1 &= 0.67R_0A U & U_1 &= 0.67R_0A U - eU_1 \\
 U_3 &= 0.67R_0A U - eU_3 & U_4 &= 0.67R_0A U - eU_4 & U_5 &= 0.67R_0A U - eU_5 \\
 U_6 &= 0.67R_0A U & U_7 &= 0.67R_0A U & U_8 &= B U + v
 \end{aligned}$$

其中:

$$A W = a_0 + a_3(A_{40}k_2 + A_2)/3$$

$$\begin{aligned}
A \bar{W} &= a_1 / 3 + a_5 (A_{2A7} + A_{4A2} + A_{A5} - A_{40A2A5}) / 4 \\
A \bar{W} &= (1 - A_{B2} - A_{B1A7} - A_{B0A8} - A_{42A4} - A_{42A12}T_0) / 3 + A_5 (- A_{B1} - A_{B0A7} - A_{41A4} - A_{4K2}T_0) - A_6 a_0 \\
+ & a_3 (A_{6A8} + A_{6A8A7} + A_{41A5K2} + A_{2A6} + A_{40A6K2}) / 5 \\
A \bar{W} &= [(- A_{B2A7} - A_{B1A8} - A_{B1A9} + A_5 (- A_{B2} - A_{B1A7} - A_{B0A8} - A_{42A4} - K_2 T_{0A42} + A_6 (- a_{31} - A_{30A7} - A_{41K4} - A_{41K2}T_0))] / 4 + A_5 [(A_{2A9} + A_{2A8} + A_{6A2A7} + A_{42K2A5} + A_{41A6A2}) / 6 \\
A \bar{W} &= [(- A_{B2A9} - A_{B1A9}) + A_5 (- A_{B2A7} - A_{B1A8} - A_{B0A9}) + A_6 (- A_{B2} - A_{B1A7} - A_{B0A8} - K_2 T_{0A42} - A_{42K2}T_0)] / 5 + A_5 (A_{2A5A9} + A_{2A6A8} + A_{42K2A6}) / 7 \\
A \bar{W} &= [(- A_{B2A9} + A_5 (- A_{B2A8} - A_{B1A9}) + A_6 (- A_{B2A7} - A_{B1A8} - A_{B0A9})] / 6 \\
A \bar{W} &= [A_5 (- A_{B2A9}) - A_6 (- A_{B2A8} - A_{B1A9})] / 7 \quad A \bar{W} = - A_{2A9A32} / 8 \\
B \bar{W} &= R(1 - B_{1K4} - B_1 T_0) [B_4 (B_3 - E^* + b_{10H^*}) - B_{2B7}] + R[(- B_{1K4} - B_{1K2}T_0) B_5 + B_{1B4K2}a_3] (B_3 - E^* + b_{10H^*}) - B_{1B2B7K2}a_3 - (1 - B_{1K4} - B_{1K2}T_0) B_{2B8}] / 3 \\
B \bar{W} &= - b_{10R} [(1 - B_{1K4} - B_{1K2}T_0) B_4 - [(1 - B_{1K4} - B_{1K2}T_0) B_5 + B_{1B4K2}a_3] / 3 + [(1 - B_{1K4} - B_{1K2}T_0) B_6 + B_{1B5K2}a_3] / 5 + B_{1B6K2}a_3 / 7] \\
A \bar{U} &= a_0 + (A_{40K2} + K_2) a_3 \quad A \bar{U} = a_1 + a_3 (A_{2A7} + A_{4K2} + A_{2A5} + A_{40K2}a_3) \\
A \bar{U} &= - A_{B2} - A_{B1A7} - A_{B0A8} - A_{42}(K_4 + K_2 T_0) + A_5 (- A_{B1A30A7} - A_{41K4} - A_{41K2}T_0) + A_6 a_0 + a_2 (A_{2A8} + A_{6A41K2} + A_{2A6} + A_{40A6K2} + A_{6A2A7} + A_{42K2}) \\
A \bar{U} &= - A_{B2A7} - A_{B1A8} - A_{B0A9} + A_5 (- A_{B2} - A_{B1A7} - A_{B0A8} - A_{42K4} - A_{42K2}T_0) + A_6 (- a_{31} - A_{30A7} - a_{41K4} - A_{41K2}T_0) + (A_{2A9} + A_{2A5A8} + A_{2A6A7} + A_{41A6K2} + A_{42K2A5}) a_3 \\
A \bar{U} &= - A_{B2A8} - A_{B1A9} + A_5 (- A_{B2A7} - A_{B1A8} - A_{B0A9}) + A_6 (- A_{B2} - A_{B1A7} - a_{30A8} - A_{42K4} - A_{46K2}T_0) + (A_{2A5A9} + A_{2A6A8} + A_{42K2A6}) a_3 \\
A \bar{U} &= - A_{B2A9} + A_5 (- A_{B2A8} - A_{B1A9}) + A_6 (- A_{B2A7} - A_{B1A8} - a_{30A9}) + A_{2A6A9}a_3 \\
A \bar{U} &= - A_{5A32A9} + A_6 (- A_{B2A8} - A_{B1A9}) \quad A \bar{U} = - A_{2A9A6} \\
B \bar{U} &= R[1 - B_1(K_4 + K_2 T_0 - K_2 a_3)] b_{10S^4} \\
B \bar{U} &= R[1 - B_1(K_4 - K_2 T_0 - K_2 a_3)] [S_6^4 (B_3 - E^* - b_{10H^*}) - B_{2S^5}] \\
\end{aligned}$$

离差方差系数

$$\begin{aligned}
m_1 &= \bar{W} + 2\bar{W}_{G0} + 3\bar{W}_{G0}^2 + 4\bar{W}_{G0}^3 + 5\bar{W}_{G0}^4 + 6\bar{W}_{G0}^5 + 7\bar{W}_{G0}^6 + 8\bar{W}_{G0}^7 + \bar{W}_{HO} \\
m_2 &= \bar{W} + 3\bar{W}_{G0} + 6\bar{W}_{G0}^2 + 10\bar{W}_{G0}^3 + 15\bar{W}_{G0}^4 + 21\bar{W}_{W7}\bar{W}_0^5 + 28\bar{W}_{G0}^6 \\
m_3 &= \bar{W} + 4\bar{W}_{G0} + 10\bar{W}_{G0}^2 + 20\bar{W}_{G0}^3 + 25\bar{W}_{G0}^4 + 56\bar{W}_{G0}^5 \\
m_4 &= \bar{W} + 5\bar{W}_{G0} + 15\bar{W}_{G0}^2 + 35\bar{W}_{G0}^3 + 70\bar{W}_{G0}^4 \\
m_5 &= \bar{W} + 6\bar{W}_{G0} + 21\bar{W}_{G0}^2 + 45\bar{W}_{G0}^3 \\
m_6 &= \bar{W} + 7\bar{W}_{G0} + 28\bar{W}_{G0}^2 \quad m_7 = \bar{W} + 8\bar{W}_{G0} \\
m_8 &= \bar{W} \quad m_9 = \bar{W} \quad m_{10} = \bar{W}_{G0} + \bar{W}_0 \\
n_1 &= \bar{U}_1 + 2\bar{U}_2\bar{G}_0 + 3\bar{U}_2\bar{G}_0^2 + 4\bar{U}_4\bar{G}_0^3 + 5\bar{U}_5\bar{G}_0^4 + 6\bar{U}_6\bar{G}_0^5 + 7\bar{U}_7\bar{G}_0^6 \\
n_2 &= \bar{U}_3 + 3\bar{U}_3\bar{G}_0 + 6\bar{U}_4\bar{G}_0^2 + 10\bar{U}_5\bar{G}_0^3 + 15\bar{U}_6\bar{G}_0^4 + 21\bar{U}_7\bar{G}_0^5 \\
n_3 &= \bar{U}_3 + 4\bar{U}_4\bar{G}_0 + 10\bar{U}_5\bar{G}_0^2 + 20\bar{U}_6\bar{G}_0^3 + 35\bar{U}_7\bar{G}_0^4 \\
n_4 &= \bar{U}_4 + 5\bar{U}_5\bar{G}_0 + 15\bar{U}_5\bar{G}_0^2 + 35\bar{U}_7\bar{G}_0^3 \\
n_5 &= \bar{U}_5 + 6\bar{U}_6\bar{G}_0 + 21\bar{U}_7\bar{G}_0^2 \quad n_6 = \bar{U}_6 + 7\bar{U}_7\bar{G}_0 \quad n_7 = - \bar{U}_7 \quad n_8 = \bar{U}_8
\end{aligned}$$