第 56 卷 第 4 期　　气 象 学 报　　Vol. 56 No. 4
1998 年 8 月　　ACTA METEOROLOGICA SINICA　　Aug., 1998

线性和非线性横波型不稳定的数值研究

张　颖　张　铭

(中国气象局强风暴实验室, 北京, 100081)

摘　要

本文应用一个准二维的非线性非静力数值模式研究了线性和非线性横波型不稳定的中尺度模态的发展、演变和结构特征。结果表明: Richardson 数对横波型不稳定的发展和演变有影响。Ri 数越小, 不稳定增长越快, 且增长率最大的波的波长就越短。非线性横波型不稳定在其发展初期, 可以用线性理论作很好的近似; 随着不稳定的进一步发展, 扰动增强, 非线性作用增强, 其扰动结构与线性情况相比发生了很大变化, 扰动结构最后演变成以顺时针环流为主的结构。

关键词: 线性, 非线性, 横波, 不稳定。

1　引　言

观测研究表明: 强对流活动多数与中尺度对流系统有关, 如雨带、飑线、中尺度对流复合体(MCC) 等。Ogura 在分析中尺度雷暴系统时指出[1]: 在强对流发生前, 对流层低层首先出现数百公里尺度的辐合区, 其强度远远超过天气尺度系统所能提供的辐合值。由于中小尺度系统的空间和时间尺度都远比天气尺度要小, 因此其运动是非地转的, 甚至是非静力的。本文主要是用数值积分方法研究对强对流活动有组织和启动作用的一种非地转不稳定, 即横波型扰动不稳定的发生、发展和演变。

对于扰动传播方向平行于基本气流(即沿基本气流传播) 的二维非地转不稳定, 张可苏称之为横波不稳定[2]。在基本气流对横波型扰动的稳定性研究方面, 最早的工作主要集中在天气尺度波段上。Charney[3]和 Eady[4]最先发现了斜压气流对准地转天气尺度扰动的不稳定性, 即通常所谓的斜压不稳定, 从而得到了天气尺度和次天气尺度的 Eady 模态。1988 年张可苏将 f 平面的 Eady 模型推广到非地转情况[2], 得到了斜压基流的双模态不稳定谱: 在天气尺度和次天气尺度上出现 Eady 模态, 所得特征波具有准地转特征, 在几十至几百公里的尺度上, 出现了非地转斜压的中尺度模态, 在垂直剖面上中尺度模态呈非对称的 "猫眼" 流型。对同一线性风廓线, 中尺度模态的发展约为 Eady 模态的 4 倍, 这样大的增长率有可能产生足够强的垂直运动和低层辐合, 成为启动和组织深厚对流云团的一种动力学机制。

初稿时间: 1995 年 7 月 18 日; 修改稿时间: 1997 年 8 月 7 日。

资助课题: 中国气象局强风暴实验室 "飑线的数值试验及理论研究" 课题资助。

为了更好地研究线性与非线性横波型不稳定的扰动结构、发展和演变特征, 我们设计了一个准二维的非线性和非静力的斜压数值模式, 用数值试验的方法对横波不稳定的中尺度模态进行研究, 并用以讨论 Ri 数和非线性平流项对模波不稳定的发展、演变、移动及结构的影响。

2 数值模式及其稳定性

绝热、无粘、取 Boussinesq 近似的非静力平衡方程组为:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{}\frac{p}{x} + fv \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{}\frac{p}{y} - fu \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{}\frac{p}{z} - g \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{u}{x} + \frac{v}{y} + \frac{w}{z} = 0 \tag{5}$$

由于取该近似滤去了声波, 现设扰动量在 y 方向均匀, 即 $= \bar{}(y,z) + '(x,z,t)$, $p = \bar{p}(y,z) + p'(x,z,t)$, $= {}_0 + '(x,z,t)$, $u = \bar{u}(y,z) + \bar{u}'(x,z,t)$, $v = v'(x,z,t)$, $w = w'(x,z,t)$, 将上述假设代入方程组(1)～(5), 并引入流函数 $u' = -\frac{}{x}$, $w' = \frac{}{x}$, 消去 p', 则可得到研究横波不稳定的控制方程组:

$$\left[\frac{}{t} + (u' + \bar{u})\frac{}{x}\right] + w'\frac{}{z} - \bar{u}_y\frac{v'}{z} - v'\bar{u}_{yz} - w'\bar{u}_{zz} + f\frac{v'}{z} - \frac{g}{{}_0}\frac{}{x}' = 0 \tag{6}$$

$$\left[\frac{}{t} + (u' + \bar{u})\frac{}{x}\right]v' + w'\frac{v'}{z} + fu' = 0 \tag{7}$$

$$\left[\frac{}{t} + (u' + \bar{u})\frac{}{x}\right]' + w'\frac{}{z}' + \frac{{}_0}{g}S^2u' + \frac{{}_0}{g}N^2w' = 0 \tag{8}$$

$$= {}^2 \quad u' = -\frac{}{z} \quad w' = \frac{}{x} \tag{9}$$

其中: $N^2 = \frac{g}{{}_0}\frac{\bar{}}{z}$, $S^2 = \frac{g}{{}_0}\frac{\bar{}}{y}$, 该系统的基本状态满足地转关系和热成风关系, 即有:

$$\frac{g}{{}_0}\frac{\bar{}}{y} = -f\bar{u}_z \tag{10}$$

本文将横波不稳定作为一个初值问题进行数值研究, 模式的控制方程为(6)～(9), 垂直方向分为 20 层, 水平网格距为 5 km, 变量 , ', v' 在水平和垂直方向均取跳点网格; 上下边界采用刚体边界, 水平侧边界为周期边界; 空间差分格式采用中央差, 时间积分采用向前

差、向后差两步积分[5], 积分步长为 30 s; 采用理想的初始场。模式的水平宽度为 100 km, 这样模式中只存在中尺度模态。

为检验设计模式的计算稳定和计算耗散, 根据理论分析, 当基本风场垂直切变为 0, $N^2 > 0$ 时, 即 Ri 数趋于无穷, 横波是稳定的。因此我们取 $\bar{u} = 10\ \mathrm{m\,s^{-2}}$, $N^2 = 8.0\times10^{-6}/\mathrm{s}^2$, 初始扰动涡度场为:

$$= \ {}_0\cos\left(\frac{2}{L}\right)\sin\left(\frac{2\ z}{H}\right) \tag{11}$$

其中 ${}_0 = 9\times10^{-6}\mathrm{s}^{-1}$, 水平宽度 $L = 100$ km, 垂直厚度 $H = 10$ km, 图 1 为式(11) 所对应的　场。初始场 $'$, v' 均为零。应用模式积分 72 h, 结果表明, 在整个积分过程中, 该模式是计算稳定的。图 2a 为平均扰动动能 $\frac{1}{2}\overline{(u'^2 + v'^2 + w'^2)}$ 随时间的演变图, 平均扰动动能随时间呈振荡变化, 积分 72 h 的　场(图 2b) 与初始场(图 1) 相比, 除波动发生位移外, 环流形势也无大变化。

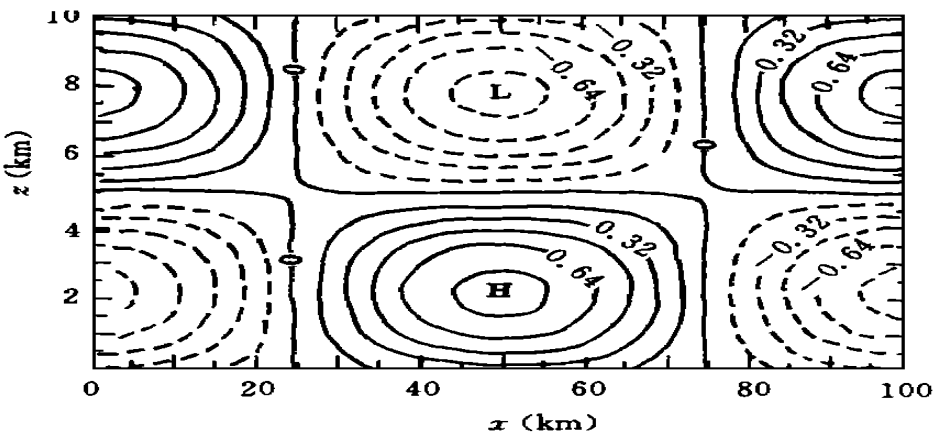


图 1　初始流函数场

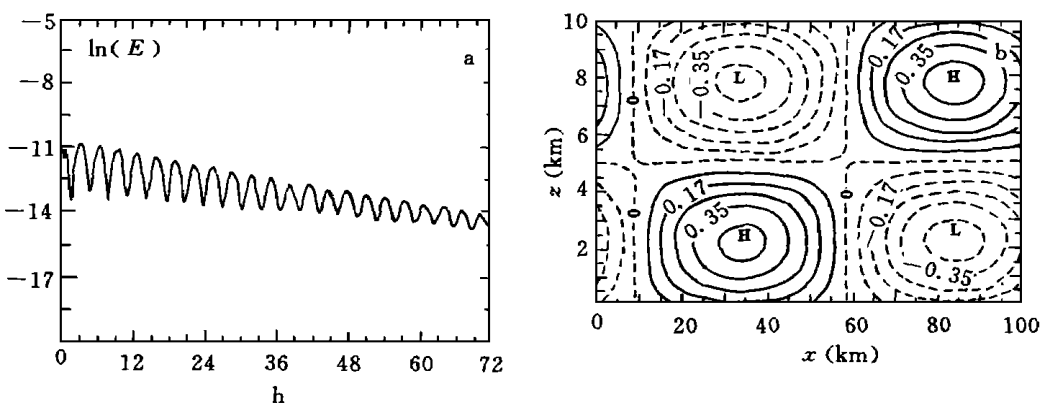


图 2　$Ri = \infty$ 时扰动动能随时间演变(a) 和模式积分 72 h　场(b)

3 线性横波不稳定

将方程组(6)～(9)线性化, 并假设 $\bar{u}$ 只是 z 的函数, 可得研究线性横波不稳定的方程组[2], 张可苏应用特征函数法, 计算出了 3 种不同 Ri 数的不稳定谱, 当 Ri 减小时不稳定谱向短波方向移动, 截断波长变短, 而增长率增大。

本文则将横波不稳定作为一个初值问题进行研究, 对于线性横波不稳定, 模式的控制方程与文献[2]中的相同。

3.1 试验 A $Ri = 0.5$ 时横波不稳定

本试验采用图 1 所示初始场, 用线性模式进行数值积分, 图 3a 给出了平均扰动动能随时间的演变, 平均扰动动能在 6.5 h 之前是衰减的, 此后近似呈指数增长, 在增长过程中, 每间隔大约 4 h 有一短时间的、小的减弱, 随着扰动增强, 这种衰减愈来越小。在该种 Ri 数条件下, 扰动的平均指数增长率近似为 $6.0\times10^{-5}\,s^{-1}$。

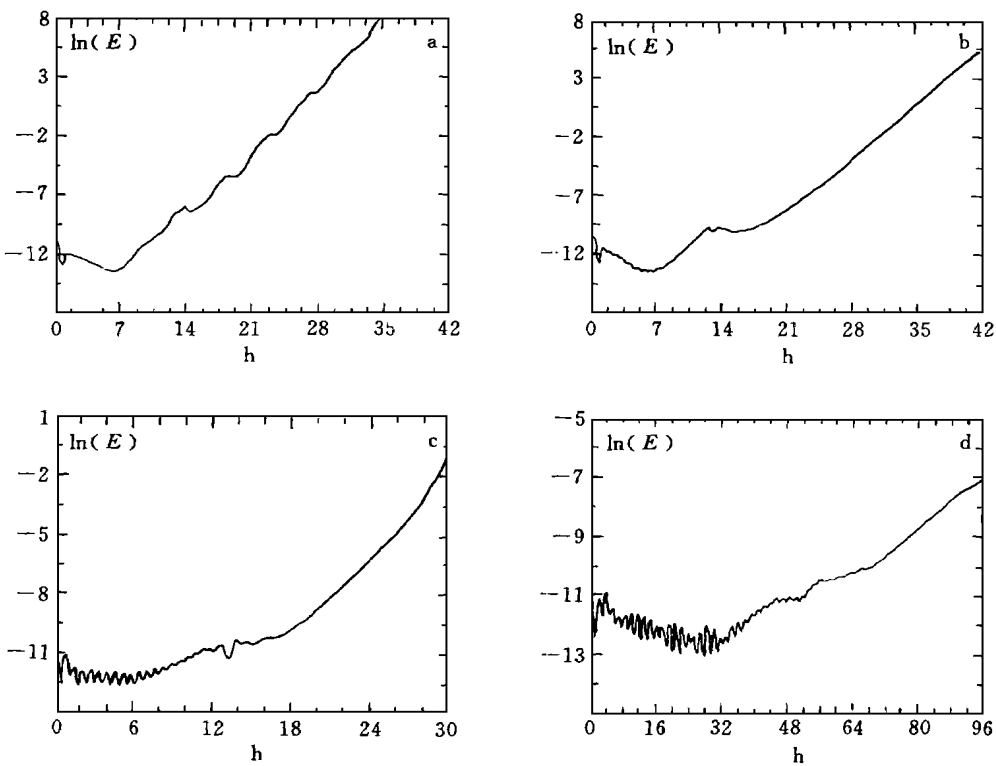


图 3 扰动动能随时间演变图

(a. $Ri = 0.5$; b. $Ri = 0.8$; c. $Ri = 2.1$; d. $Ri = 10.0$)

扰动发展后, 场是由初始时刻(图 1)的一个波逐步分裂出多个正负环流中心, 波动的水平波长逐渐缩短, 垂直方向变成一环, 积分 12 h 场出现了波列(图4a), 这些波列从低层倾斜着伸展到高层, 其强度是低层最强, 向上逐渐减弱。随着不稳定的发展, 这种波列

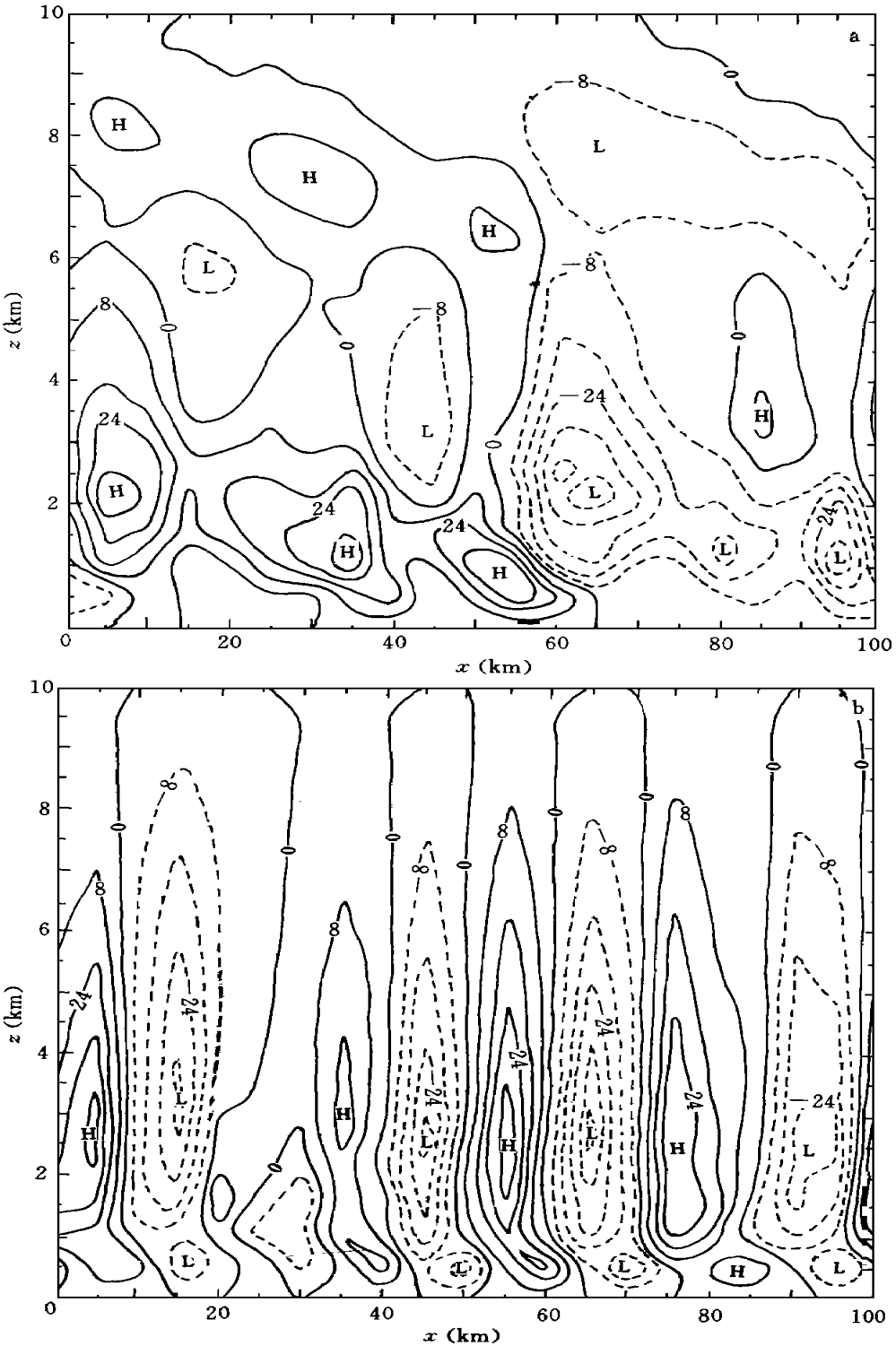


图 4　试验 A 的　场
(a. 12 h; b. 24 h)

结构消失, 场水平波长进一步变短, 形成了许多正负环流圈, 环流的正负大值区位于低层, 其上环流呈铅直状, 即出现了“猫眼”结构(参见图4b, 并可与张可苏文[2]中解析结果的图相比较), 这时扰动的水平波长大约在20 km。此后扰动的水平波长较稳定, 并随着不稳定的发展而不断增强, 正环流与负环流的强度差异及范围差异不明显。此种波动不仅增长, 而且产生了沿基流方向的移动, 其移速平均约为3.0 m/s, 这与张立凤等计算得到的无加热时缓慢传播的中尺度模态的相速接近[6]。上述模拟结果表明, 对线性横波不稳定而言, 在 $Ri = 0.5$情况, 波长在20～25 km 波动增长最快, 而我们的数值积分的最终结果也正是体现了这种增长率最大的波动结构特征, 从而也说明了横波不稳定的增长率对于波长具有选择性。

图5为积分24 h 的 ′场, 其也是由许多小的冷暖中心组成, 波长与 场相同, 也具有上述的“猫眼”结构。 ′的扰动最强区集中于低层, 向上迅速衰减, 增暖区位于负环流区, 降温区位于正环流区, 这种结构与张可苏计算的横波不稳定扰动结构完全相同[2]。

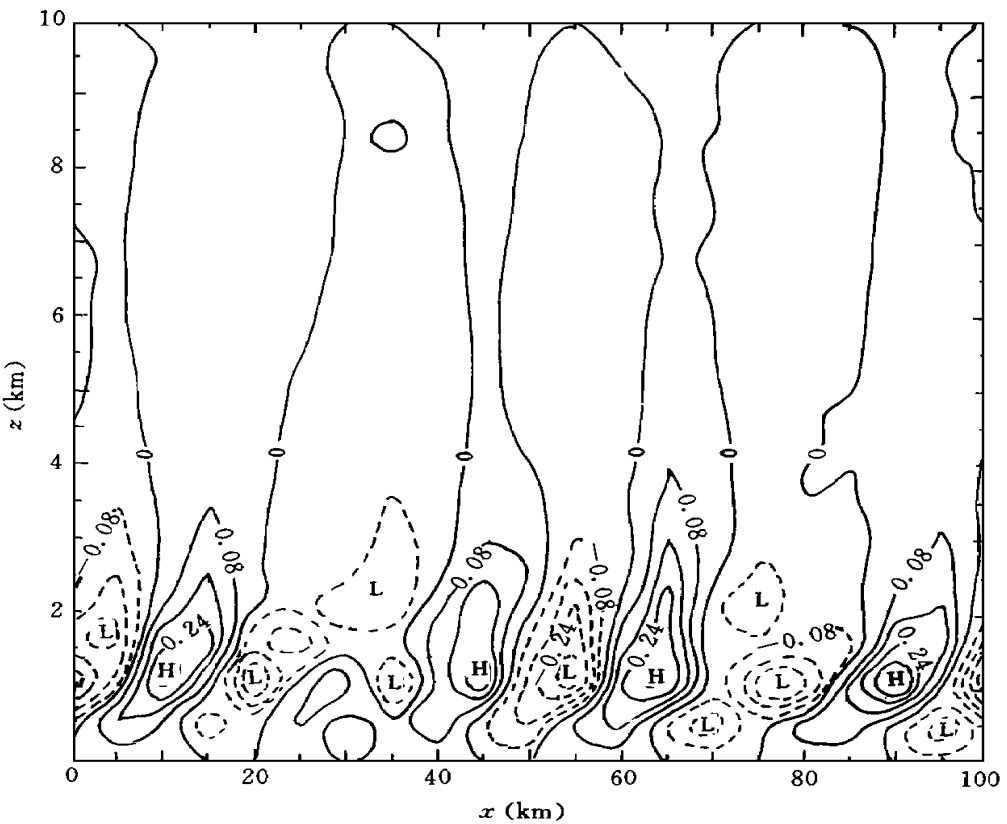


图5 试验 A 积分24 h 的 ′场

此外, 还取 $Ri = 0.8$进行了模拟试验, 其演变过程和结构特征与 $Ri = 0.5$时相同, 只是增长速度比后者慢(如图3b 为 $Ri = 0.8$时扰动动能的演变过程)。

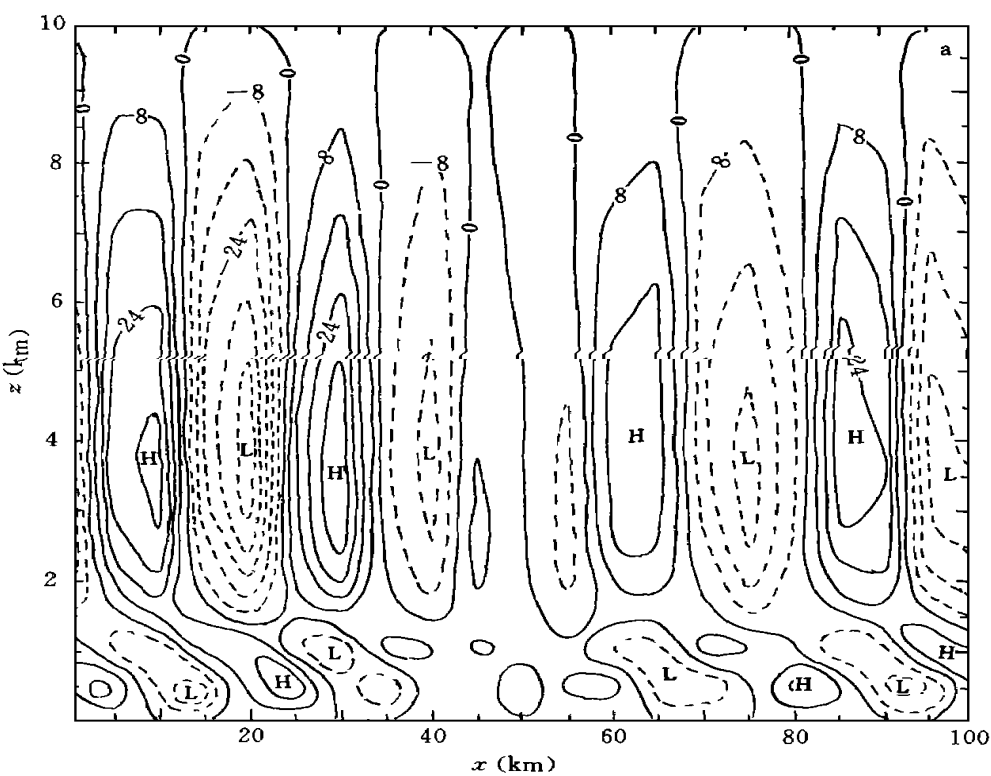
3.2 试验 B $Ri = 2.1$时的横波不稳定

该试验除 $Ri = 2.1$外, 其它条件均与试验 A 相同。试验结果表明, 此时扰动的发展演

变与前面$Ri < 1$的情形有明显的差异。后者扰动以增长为主, 而前者($Ri = 2.1$) 在整个数值积分过程中出现了两个阶段, 即振荡阶段和增长阶段, 后一阶段的演变趋势与$Ri = 0.5$时增长过程相似, 试验 A 由于不稳定的增长率大, 前阶段很短, 很快进入后阶段了。图3c 为$Ri = 2.1$时平均动能随时间的演变, 其在前8 h 主要是呈高频振荡变化, 并且振幅略有衰减, 8 h 之后开始呈波动增长, 波动的振幅减小, 周期略大于8 h 之前的振荡周期; 18 h 之后平均扰动动能呈指数增长, 在此种Ri数条件下, 其指数增长率近似为3.1×10^{-5} s^{-1}, 而此时不稳定的扰动结构与$Ri = 0.5$时相似, 只是波长略长一些, 增长率最大时波长稳定在25～30 km(图6a) 。

此外, 本文还选取了$Ri = 10$进行了模拟试验, 其演变过程和结构特征与$Ri = 2.1$时相似, 扰动在演变过程中也出现了两个阶段, 即振荡阶段和增长阶段, 只是$Ri = 10$时其振荡阶段较长, 增长率较小(图3d) 。

通过上述几种不同Ri数的数值试验可以发现, Ri数对横波不稳定的中尺度模态的发展演变过程有较大影响, 当Ri数较小时, 由于波动的增长率较大, 扰动以指数增长为主, 当Ri数增大后, 扰动在按指数增长前出现了较长时间的高频振荡变化。Ri数越小, 不稳定增长得越快, 其增长率最大的波的波长亦越短, 由于横波不稳定的增长率对波长具有选择性, 因此数值积分的最终结果体现了增长率最大的波动的特点。横波不稳定的中尺度模态的扰动场均具有不规则的 "猫眼" 结构, 扰动主要集中在中低层, 并可以向上传播, 与 ′的配置为增暖区位于反时针环流区, 降温区位于顺时针环流区。



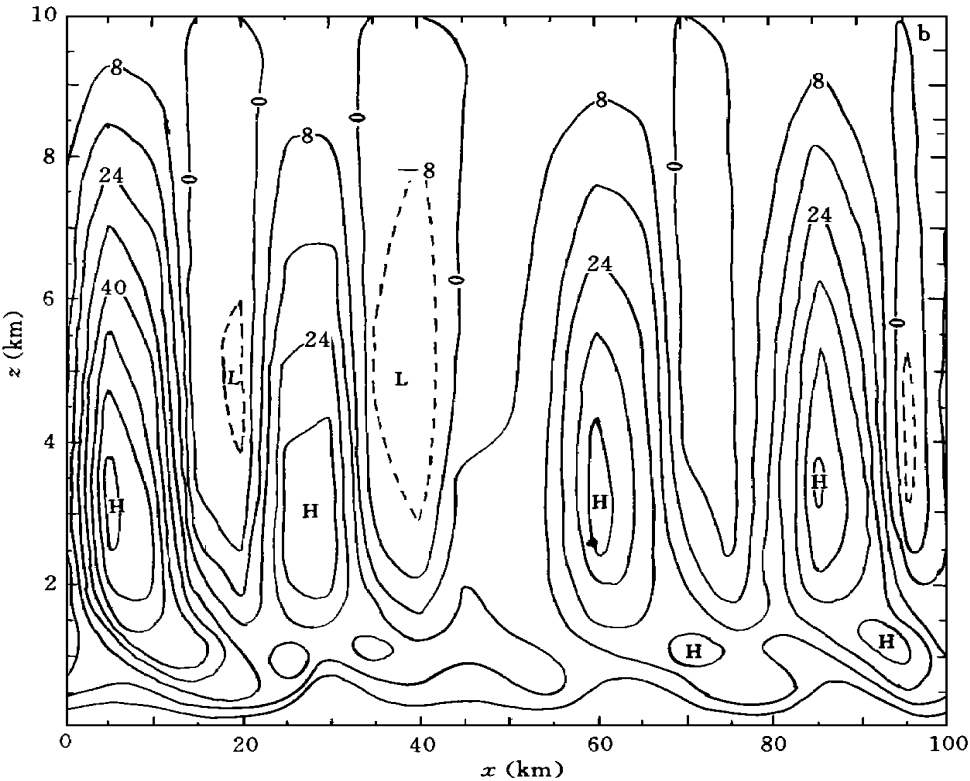


图6 $Ri = 2.1$时模式积分30 h 的 场

(a. 线性; b. 非线性)

4 非线性横波不稳定

研究非线性横波不稳定的数值模式, 我们采用方程(6)～(9)作为控制方程组, 数值计算的方法与线性情况相同, 不再赘述。为了便于与线性结果比较, 选取与试验 A 和 B 相同的初始场和 Ri 数进行模拟试验。

4.1 试验 C $Ri = 0.5$时的非线性横波不稳定

该试验的初始场和基本状态与试验 A 相同, 数值积分的结果表明, 当扰动量较小时(20 h 前), 不稳定的环流结构及其演变过程与线性横波不稳定(试验 A) 相同, 但非线性横波不稳定的增长速度比线性时略慢一些, 当扰动增大以后, 非线性横波不稳定的增长速度略有加快。随着扰动的增大, 非线性作用增大, 不稳定的结构开始发生变化。正环流的增长 速度明显大于负环流, 从而导致正环流的强度越来越大(与试验 A 相比), 而负环流的强度则越来越小(如图7, 非线性模式积分24 h 的 场), 最终一些负环流中心消失或变成低槽, 整个区域都被正环流占据。这是因为非线性波的振幅与波形和波长有关, 振幅越大其波形与正弦波差得越远, 这样正负环流相差得也就越大。众所周知, 正弦波的解是正负环流对称的, 我们的试验结果正体现了非线性波动的特点。在整个积分过程中, 不稳定也沿基本气流移动, 其平均移速为3.0 m/s。

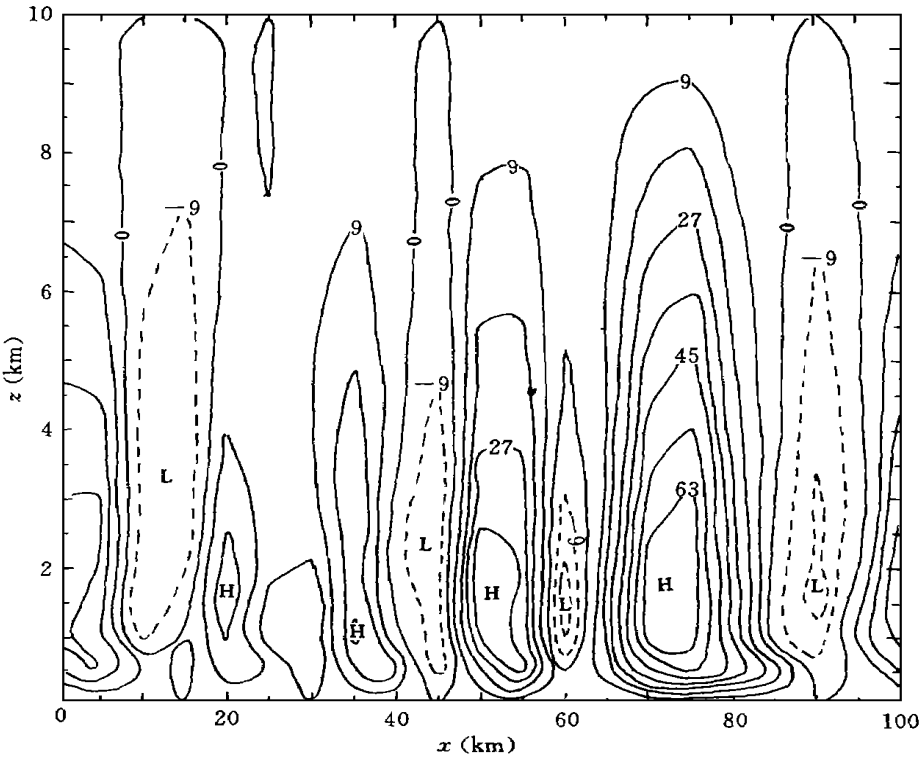


图7　非线性模式积分24 h 的　　场

4. 2　试验 **D**　$Ri = 2.1$时的非线性横波不稳定

本试验的基本状态和初始场同试验 B。在积分25 h 前扰动具有线性横波不稳定的结构特点和演变特征。25 h 后, 随着不稳定扰动的不断发展,　　为正值的环流圈(负环流) 增长速度减慢, 而　　为负值的环流圈(正环流) 则增长速度加快。扰动越强, 这种变化变越快, 非线性作用的结果使原先正负环流对称的横波不稳定环流演变成以正环流为主的不对称环流形式(图6b) 。

通过上述两数值试验可见, 非线性横波不稳定在其发展初期, 由于扰动较小, 非线性相互作用很弱, 其发展演变及结构与线性情况相同; 随着不稳定扰动的增强, 非线性作用也增强, 扰动的结构具有非线性椭圆余弦波的特征, 正环流的强度比负环流强; 不稳定扰动越强, 非线性作用就越强, 最终形成的环流结构具有非线性孤立波的特性, 即负环流消失, 只存在正环流。

5　结　语

应用一个准二维的非静力平衡模式对线性与非线性横波不稳定进行了数值模拟试验, 结果表明:

(1) 线性横波不稳定中尺度模态的扰动结构为: 流函数场具有上文所述的 "猫眼 "结

构, θ'的增温区位于反时针环流区, 降温区位于顺时针环流区, Ri 数的大小对横波不稳定的发展和演变都有影响, Ri 数越大不稳定增长越慢。

(2) 非线性横波不稳定在其发展初期, 由于非线性作用较弱, 其结构和演变特征都与线性情况相同, 因此, 在其扰动发展初期可以应用线性理论作很好的近似。

(3) 随着不稳定的发展, 扰动的增强, 非线性横波不稳定的结构与线性情况相比出现了很大的差别, 扰动的负环流不断减弱, 正环流不断加强, 最后环流结构是以正环流为主, 这正体现了非线性波动的特点。

综上研究表明: 横波型不稳定的扰动主要集中在低层并能在该处产生很强的幅合, 这种强辐合可以激发飑线等中尺度对流系统。此外实际大气中有许多天气系统是沿基本气流传播的, 如雨带中的雨团, 沿急流传播的大风核等, 横波型不稳定则也可以从动力学上解释这些系统生成和演变的原因。

参考文献

1 Ogura Y and Chen Y L. A life history of an intense mesoscale convective storm in Oklahoma. J Atmos Sci, 1977, 33: 1458～1479

2 张可苏. 斜压气流的中尺度稳定性Ⅱ. 横波型不稳定. 气象学报, 1988, 46(4): 385～391

3 Charney J G. The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current. J Meteor, 1947, 4: 135～162

4 Eday E T. Long waves and cyclone waves. Tellus, 1949, 1: 33～52

5 张铭等. 谱模式中一种时间积分方案的理论分析和数值试验. 空军气象学院学报, 1986, 7(2): 56～63

6 张立凤, 张铭. 与沿基流传播的非地转不稳定. 空军气象学院学报, 1991, 12(2): 67～75

THE NUMERICAL STUDY OF LINEAR AND NON-LINEAR TRANSVERSE INSTABILITY

Zhang Ying Zhang Ming

(*severe storm laboratory*, *CMA*, *Beijing*, 100081)

Abstract

A non-linear and non-hydrostatic two-dimensional numerical model is used to study the development, evolution and structure of meso-mode transversal instability. The numerical test states that development and evolution of transverse instability are affected by Ri number. The smaller Ri is, the larger its incresing rate and the shorter its wave length with the largest incresing rate is.

The initial growing of the transverse instability perturbations can be fairly well approximated by linear theory. With increase of the perturbations, non-linear interaction of advection term enhances, and its sturctrues has great change, at last clock-wise circulations dominate in the disturbance structures.

Key words: Linear, Nonlinear, Transverse, Instabilyty.