

非纬向非平行基流中的对称不稳定*

丁汇

(国家气候中心, 北京, 100081)

沈新勇**

(北京大学地球物理系, 北京, 100871)

摘 要

文中讨论了非纬向非平行基流中的对称不稳定, 得到了新的非纬向基流下对称不稳定的判据条件。在存在横向切变时, 无旋层结流体中扰动的不稳定条件为 $Ri < \frac{1}{4} \sin^2(\beta - \alpha)$; 而在有旋层结流体中, 弱的横向切变在取一级近似时并不能改变对称不稳定的增长率, 但扰动必定传播, 传播方向是顺切变方向, 波长越短, 传播速度越快。

关键词: 对称不稳定, 非纬向基流, 非平行基流。

1 引 言

在北美、欧洲和东亚对气旋系统中中尺度雨带的观测研究都注意到, 在地面冷锋之前的暖区里经常有与冷锋走向平行的中尺度雨带。Hobbs^[1]把这种雨带叫做暖区雨带, 并作为锋面气旋降水的六类中尺度雨带之一; Browning^[2]根据此类雨带的对流性质, 称之为深厚对流型雨带。许梓秀等^[3]具体研究了东亚蒙古气旋冷锋前部平行于冷锋的中尺度雨带的宏观特征和活动规律。大量的理论研究表明: 这种走向与锋区附近热成风平行的平行类雨带可能是由对称不稳定或考虑了潜热影响后的条件对称不稳定所触发形成的。有关纬向基流中的对称不稳定条件已由 Emanuel 和张可苏等人^[4]得到, 而事实上大多数中尺度带状扰动以及基本气流并不平行于纬向方向, 而与纬向成一夹角(图略)。此时, 对称不稳定条件需要作修改吗? 新的对称不稳定条件又是什么? 这是文中首先要回答的问题。

另一方面, 许梓秀等人^[3]对 1963~1979 年 5~8 月间, 在蒙古、东北、华北气旋和低压冷锋天气形势下, 冷锋移经京、津、冀地区的 33 次过程中的雷达资料进行分析, 发现冷锋前部中尺度雨带的活动甚为频繁而复杂, 不仅有与冷锋平行的雨带, 还有与冷锋走向成较

* 初稿时间: 1996 年 5 月 23 日; 修改稿时间: 1997 年 3 月 18 日。

资助课题: 国家自然科学基金 49335061 课题。

** 现在南京大学大气科学系。

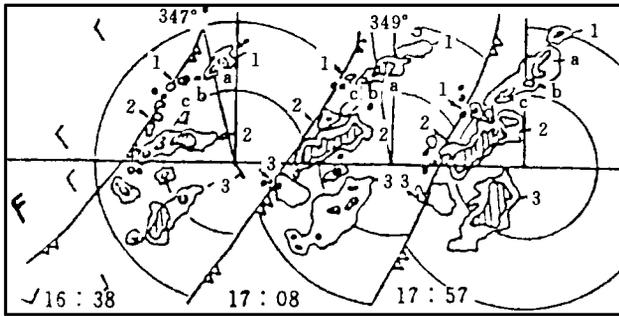


图1 1980年7月18日北京五公分雷达回波演变图
(回波强度外层 0dB, 斜线区 30dB, 倾角 2°; 距离每圈 100 km。取自[3])

大交角的中尺度雨带(图1)或者甚至垂直的中尺度雨带(图2), 其发生发展、传播特征与平行类明显不同, 它们产生的对流天气也有差异。从外部强迫效应来看, 这些雨带与对称轴(基流切变矢量方向)成一定夹角之根本原因可能是粘性摩擦效应^[5,6]和垂直加热廓线形式的不同^[7]。从内部动力稳定性来看, 其根本原因则可能与垂直于带状扰动的横向风切变有关。那么为什么平行类扰动在实际大气中出现较大的频数(50%), 而交角类和垂直类则分别只占较小的频数(36%, 14%)? 另外, 这些雨带很少呈现驻波形式的原地增长, 而呈现传播形式的增长, 其根本原因是什么? 这也是文中讨论问题的一个焦点。

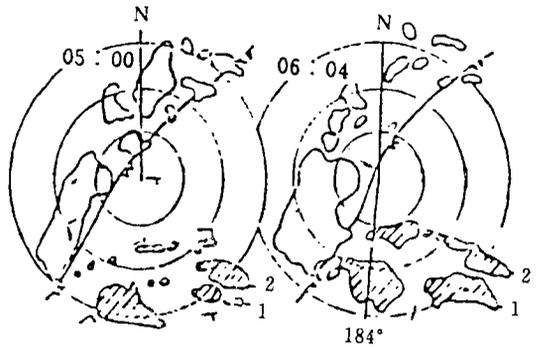


图2 1979年7月18日北京五公分雷达回波演变图
(PPI, 0dB, 倾角 2°; 距离每圈 50 km。取自[3])

2 坐标变换下的本征值问题

在非弹性假设条件下, 不考虑粘性摩擦、热力扩散、外源强迫的大气运动完全方程组为:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv \quad (1)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu \quad (2)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (5)$$

假设 $u = \bar{U} + u, v = \bar{V} + v, w = \bar{w}, p = \bar{P} + p, \rho = \bar{\rho} + \rho, \theta = \bar{\theta} + \theta$, 代入到方程组(1)~(5)中, 采用 Boussinesq 近似, 并且进行线性化处理, 则可得到任意方向基本气流与扰动不平行下的出发方程组:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial}{\partial y}\right) u = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho_0}\right) + f v - \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}\right) \bar{U} \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial}{\partial y}\right) v = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\rho_0}\right) - f u - \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}\right) \bar{V} \quad (7)$$

$$\lambda \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial}{\partial y}\right) w = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho_0}\right) + \frac{\theta}{\theta_0} g \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial}{\partial y}\right) \theta = -\left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}\right) \bar{\theta} \quad (10)$$

考虑到对于类似于雨带这样的带状扰动而言, 可以假定扰动沿着图 3 中扰动轴 ξ 轴方向是均匀的, 扰动轴 ξ 与 x 轴方向的夹角为 α , 而基本气流 V 方向(即对称轴方向)与 x 轴的夹角为 β , 为使 (x, y, z, t) 坐标系中的线性扰动方程组变换到 (ξ, η, z, t) 坐标系中, 作出如下的坐标变换:

$$\xi = x \cos \alpha + y \sin \alpha \quad (11)$$

$$\eta = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \quad (12)$$

$$z = z \quad (13)$$

$$t = t \quad (14)$$

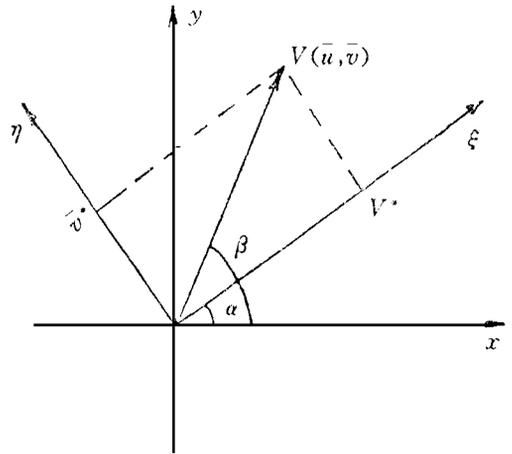


图 3 坐标变换示意图

相应地就有速度变换关系式 $(u, v) \rightarrow (u^*, v^*), (U, V) \rightarrow (U^*, V^*)$ 以及导数变换关系式, 并且可以得到微分算子变换。注意到对扰动场而言, $\frac{\partial}{\partial \xi} = 0$, 则方程组(6)~(10)变换以后的形式为:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V^* \frac{\partial}{\partial \eta}\right) u^* = f v^* - \left(u^* \frac{\partial}{\partial \xi} + v^* \frac{\partial}{\partial \eta} + w \frac{\partial}{\partial z}\right) U^* \quad (15)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nabla^* \frac{\partial}{\partial \eta}\right) v^* = - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{p}{\rho_0}\right) - f u^* - \left(u^* \frac{\partial}{\partial \xi} + v^* \frac{\partial}{\partial \eta} + w \frac{\partial}{\partial z}\right) \nabla^* \quad (16)$$

$$\lambda \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nabla^* \frac{\partial}{\partial \eta}\right) w = - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho_0}\right) + \frac{\theta}{\theta_0} g \quad (17)$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (18)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nabla^* \frac{\partial}{\partial \eta}\right) \left(\frac{\theta}{\theta_0} g\right) = - \left(u^* \frac{\partial}{\partial \xi} + v^* \frac{\partial}{\partial \eta} + w \frac{\partial}{\partial z}\right) \left(\frac{g}{\theta_0}\right) \quad (19)$$

从式(18)可见, 在 (η, z) 平面内 (v^*, w) 不可压缩, 从而可以引进流函数 Ψ , 使得 $v^* = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}$, $w = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}$, 在方程组(15) ~ (19) 中消去 p, θ 得到:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nabla^* \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathcal{U}^*}{\partial \eta}\right)^2 \left(\lambda \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}\right) &= \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta \partial z} \\ &- \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} - \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial u^*}{\partial \eta} + \left(f + \frac{\partial \mathcal{U}^*}{\partial \xi}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nabla^* \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathcal{U}^*}{\partial \eta}\right) \frac{\partial u^*}{\partial z} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nabla^* \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial \mathcal{U}^*}{\partial \eta}\right) u^* = - \left(f - \frac{\partial \mathcal{U}^*}{\partial \eta}\right) \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{U}^*}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \quad (21)$$

下面根据 ∇^* 的不同取值情况, 对方程组(20) ~ (21) 作不同的处理。

(1) 若考虑 (U, ∇) 虽为 (x, y, z) 的函数, 但在某些特定情况下能保持 ∇^* 为零, 此时基本气流与扰动轴平行。并且假定基本场满足热成风平衡关系, 定义静力稳定度 $N^2 = \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta}{\partial z}$, 则式(20) ~ (21) 退化为:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \left(\lambda \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}\right) = - f \frac{\partial \mathcal{U}^*}{\partial z} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta \partial z} - N^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} + f \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial u^*}{\partial z} \quad (22)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial z} = - \left(f - \frac{\partial \mathcal{U}^*}{\partial \eta}\right) \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{U}^*}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \quad (23)$$

设 U^* 只具有线性切变, 从式(22) ~ (23) 中消去变量 u^* , 则可得到只含一个变量 Ψ 的微分方程式:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \left(\lambda \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}\right) = - N^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} = - 2f \frac{\partial \mathcal{U}^*}{\partial z} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta \partial z} - f \left(f - \frac{\partial \mathcal{U}^*}{\partial \eta}\right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \quad (24)$$

它与刚性无滑的边界条件一起, 就构成了一个本征值问题, 用来描述非纬向基流中的对称不稳定。

(2) 另一方面, 如果考虑 (U, ∇) 只是 z 的函数, 而 θ 是 (x, y, z) 的函数, 此时 ∇^* 只是垂直坐标 z 的函数。用上面同样的步骤, 可以从式(20) ~ (21) 得到关于流函数 Ψ 的方程:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \nabla^* \frac{\partial}{\partial t}\right)^3 \left(\lambda \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \nabla^* \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(-N^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - 2f U_z^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial z} - f^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}\right) + 2f^2 \nabla_z^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial z} + 2f U_z^* \nabla_z^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (25)$$

令 $\Psi = \Psi(z) e^{im\eta + \omega t}$ 代入到式(25), 可得关于 $\Psi(z)$ 的常微分方程, 它与无滑的边界条件一起构成了坐标变换下的另一个本征值问题, 用来描述非平行基流中的对称不稳定:

$$\left[(\omega + im\nabla^*)^3 + f^2(\omega + im\nabla^*)\right] \frac{d^2 \tilde{\Psi}}{dz^2} + [2imf U_z^* (\omega + im\nabla^*) - 2imf^2 \nabla_z^*] \frac{d \tilde{\Psi}}{dz} + [- \lambda m^2 (\omega + im\nabla^*)^3 - m^2 N^2 (\omega + im\nabla^*) + 2m^2 f U_z^* \nabla_z^*] \tilde{\Psi} = 0 \quad (26)$$

$$\tilde{\Psi}(0) = \tilde{\Psi}(H) = 0 \quad (27)$$

3 本征值问题的求解

对于本征值问题式(24), 取 $\lambda = 1$, 由于是常系数微分方程, 并且类似于通常 (y, z) 坐标下的对称不稳定流函数方程, 可以在边界条件 $\Psi_{z=0, H} = 0$ 下, 假设波解 $\Psi \propto \sin \frac{n\pi}{H} z e^{im(\eta + a^* z) + \omega t}$, 此处 $a^* = \frac{S_2^2}{\omega^2 + F_2^*}$, $S_2^2 = -f U_z^*$, $F_2^* = f(f - U_\eta^*)$, 代入到方程(24)中得到:

$$\omega = \pm \left\{ -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \right\}^{1/2} \quad (28)$$

其中 $p = \frac{(2 + \alpha) F_2^* + \alpha N^2}{1 + \alpha}$, $q = \frac{\alpha(N^2 F_2^* - S_2^4) + F_2^*}{1 + \alpha}$, $\alpha = \left(\frac{mH}{n\pi}\right)^2$.

分析式(28), 可以得到 ω 出现正实数的条件 ($q < 0$), 即对称不稳定的条件:

$$Ri^* = \frac{N^2}{(\bar{U}_z^*)^2} = \frac{N^2}{(\bar{U}_z \cos \alpha + \bar{V}_z \sin \alpha)^2} < \frac{f}{f_a^*} - \frac{f_a^*}{f} n^2 \left(\frac{L^*}{L_0^*}\right)^2 \quad (29)$$

其中 $f_a^* = f - \bar{U}_\eta^*$, $L_0^* = \bar{U}_z^* H / f$, n 为垂直波数, $L^* = \pi m$ 为 η 方向上的半波长。

它在形式上类似于通常的对称不稳定判据, 但物理意义并不相同。需要注意的是, 这里风速 U^* 并不是通常意义上的纬向风速 (因为 ∇ 不为零), 而是沿着扰动轴 ξ 上的非纬向基本气流。基流 U^* 的水平切变也必须取为沿着垂直于扰动轴方向 (即 η 轴方向) 上的切变。式(29)即为一类修正以后的非纬向基流对称不稳定的判据条件。这在实际资料的分析中要特别加以注意, 必须采取新的对称不稳定条件。

对于本征值问题式(26) ~ (27), 由于其是变系数常微分方程, 下面分两种情况进行求解:

(1) 在方程(26)中假设 $f = 0$, $\lambda = 0$, 其基流 ∇^* 具有线性切变, $\nabla^* = -U \sin \alpha + \bar{V} \cos \alpha = -(\bar{U}_z \sin \alpha - \bar{V}_z \cos \alpha) z \triangleq bz$, 此处, $b = -(\bar{U}_z \sin \alpha - \bar{V}_z \cos \alpha)$, 扰动复相速

度 $c = i\omega/m$, 则式(26) 简化为:

$$\frac{d^2\tilde{\Psi}}{dz^2} + \frac{N^2}{(-c + bz)^2}\tilde{\Psi} = 0 \quad (30)$$

作坐标变换 $\zeta = \ln(-c + bz)$, 式(30) 变为:

$$\frac{d^2\tilde{\Psi}}{d\zeta^2} - \frac{d\tilde{\Psi}}{d\zeta} + \frac{N^2}{b^2}\tilde{\Psi} = 0 \quad (31)$$

当 $\frac{N^2}{b^2} < \frac{1}{4}$ 时,

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi} &= e^{\frac{1}{2}\zeta} \left(c_1 e^{\frac{1}{2} \sqrt{1 - 4N^2/b^2}\zeta} + c_2 e^{-\frac{1}{2} \sqrt{1 - 4N^2/b^2}\zeta} \right) \\ &= (-c + bz)^{\frac{1}{2}} \left[c_1 (-c + bz)^{\frac{1}{2} \sqrt{1 - 4N^2/b^2}} + c_2 (-c + bz)^{-\frac{1}{2} \sqrt{1 - 4N^2/b^2}} \right] \end{aligned} \quad (32)$$

在上式中代入边条件 $\tilde{\Psi}_{z=0,H} = 0$, 就有:

$$(-c)^{\frac{1}{2}} \left[c_1 (-c)^{\frac{1}{2} \sqrt{1 - 4N^2/b^2}} + c_2 (-c)^{-\frac{1}{2} \sqrt{1 - 4N^2/b^2}} \right] = 0 \quad (33)$$

$$(-c + bH)^{\frac{1}{2}} \left[c_1 (-c + bH)^{\frac{1}{2} \sqrt{1 - 4N^2/b^2}} + c_2 (-c + bH)^{-\frac{1}{2} \sqrt{1 - 4N^2/b^2}} \right] = 0 \quad (34)$$

由于系数 c_1 和 c_2 不全为零, 所以式(33) ~ (34) 关于 c_1 和 c_2 的系数行列式必须为零, 从而可求得特征复相速度 c :

$$c = \frac{bH}{2} \pm i \frac{bH}{2} \operatorname{ctg} n\pi / \sqrt{1 - 4N^2/b^2} \quad (35)$$

故扰动相速度

$$cr = \frac{bH}{2} = \frac{1}{2} (-U_z \sin \alpha + \bar{V}_z \cos \alpha) H \quad (36)$$

扰动增长率

$$mci = \frac{m}{2} (-U_z \sin \alpha + \bar{V}_z \cos \alpha) H \operatorname{ctg} n\pi / \sqrt{1 - 4N^2/b^2} \quad (37)$$

当 $\frac{N^2}{b^2} = \frac{1}{4}$ 时,

$$\tilde{\Psi} = (c_1 + c_2 \zeta) e^{\frac{1}{2}\zeta} = (-c + bz)^{\frac{1}{2}} [c_1 + c_2 \ln(-c + bz)] \quad (38)$$

当 $\frac{N^2}{b^2} > \frac{1}{4}$ 时,

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi} &= e^{\frac{1}{2}\zeta} \left[c_1 \sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{4 \frac{N^2}{b^2} - 1} \zeta \right) + c_2 \cos \left(\frac{1}{2} \sqrt{4 \frac{N^2}{b^2} - 1} \zeta \right) \right] \\ &= (-c + bz)^{\frac{1}{2}} \left\{ c_1 \sin \left[\frac{1}{2} \sqrt{4 \frac{N^2}{b^2} - 1} \ln(-c + bz) \right] + \right. \end{aligned}$$

$$c_2 \cos \left[\frac{1}{2} \sqrt{4 \frac{N^2}{b^2} - 1} \ln(-c + bz) \right] \quad (39)$$

在式(38)、(39)中代入边条件 $\Psi_{z=0,H} = 0$, 可以发现当 $\frac{N^2}{b^2} > \frac{1}{4}$ 时, 扰动的增长率都为零, 即扰动均为中性。从而无旋的静力平衡流体中, 扰动的不稳定条件为:

$$\frac{N^2}{b^2} < \frac{1}{4} \quad (40)$$

定义 Richardson 数 $Ri = \frac{N^2}{U_z^2 + V_z^2}$, 注意到 $\tan \beta = \frac{V}{U} = \frac{V_z}{U_z}$ 判据式(40)或改写为:

$$Ri < \frac{1}{4} \sin^2(\beta - \alpha) \quad (41)$$

分析此判据式(41), $\beta - \alpha = 0$ 时, $Ri < 0$; $\beta - \alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ 时, $Ri < \frac{1}{4}$ 。故基流垂直于扰动轴的无旋层结流体相对于基流平行于扰动轴的流体而言, 不稳定条件要宽松一些, 从而不稳定扰动也就愈容易发展。此时, 带状扰动总是偏向于与基流成一夹角。

(2) 标志 $A = (\omega + im\bar{V}^*)^3 + f^2(\omega + im\bar{V}^*)$, $B = 2imf\bar{U}_z^*(\omega + im\bar{V}^*) - 2imf^2\bar{V}_z^*$, $C = -m^2(\omega + im\bar{V}^*)^3 - m^2N^2(\omega + im\bar{V}^*) + 2m^2f\bar{U}_z^*\bar{V}_z^*$, 则方程(26)在 $\lambda = 1$ 时可写成如下形式:

$$A \frac{d^2\Psi}{dz^2} + B \frac{d\Psi}{dz} + C\Psi = 0 \quad (42)$$

假设垂直于扰动轴方向上的风切变 \bar{V}_z^* 与平行于扰动轴上的风切变 \bar{U}_z^* 相比较来说, 是一个充分小的量, 即 $\epsilon = \bar{V}_z^*/\bar{U}_z^* < 1$, 此时 $\bar{V}^* = \bar{V}_z^*z = \epsilon\bar{U}_z^*z$ 。将方程(42)的解 Ψ 以及 ω 按照 ϵ 写成级数形式:

$$\Psi = \Psi_0 + \epsilon\Psi_1 + \epsilon^2\Psi_2 + \dots \quad (43)$$

$$\omega = \omega_0 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2 + \dots \quad (44)$$

这样方程(42)的系数 A, B, C 可写成:

$$\begin{aligned} A &= A_0 + \epsilon A_1 + O(\epsilon^2) \\ &= \omega_0^3 + f^2\omega_0 + (3\omega_0^2 + f^2)(\omega_0 + im\bar{U}_z^*z)\epsilon + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} B &= B_0 + \epsilon B_1 + O(\epsilon^2) \\ &= 2imf\bar{U}_z^*\omega_0 + 2imf\bar{U}_z^*(\omega_0 - f + im\bar{U}_z^*z)\epsilon + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} C &= C_0 + \epsilon C_1 + O(\epsilon^2) \\ &= -m^2\omega_0^3 - m^2N^2\omega_0 + m^2[2f(\bar{U}_z^*)^2 - 3(\omega_0^2 + N^2)(\omega_0 + im\bar{U}_z^*z)]\epsilon + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (47)$$

将式(43)、(45) ~ (47)代入到方程(42)中, 就到 $O(\epsilon^0)$ 、 $O(\epsilon^1)$ 各阶近似方程:

$O(\epsilon^0)$ 方程:

$$A_0 \frac{d^2\Psi_0}{dz^2} + B_0 \frac{d\Psi_0}{dz} + C_0\Psi_0 = 0 \quad (48)$$

$O(\epsilon^1)$ 方程:

$$A_0 \frac{d^2}{dz^2} \Psi_1 + B_0 \frac{d}{dz} \Psi_1 + C_0 \Psi_1 = -A_1 \frac{d^2}{dz^2} \Psi_0 - B_1 \frac{d}{dz} \Psi_0 - C_1 \Psi_0 = 0 \quad (49)$$

下面首先求解 $O(\epsilon^0)$ 方程(48), 方程(48) 变化为:

$$\frac{d^2}{dz^2} \Psi_0 + \frac{2imfU_z^*}{\omega^2 + f^2} \frac{d}{dz} \Psi_0 - m^2 \frac{\omega^2 + N^2}{\omega^2 + f^2} \Psi_0 = 0 \quad (50)$$

令 $\Psi_0 = \Phi(z) e^{-az}$ (此处定义 $a = \frac{imfU_z^*}{\omega^2 + f^2}$), 则式(50) 变换为关于 $\Phi(z)$ 的方程:

$$\frac{d^2}{dz^2} \Phi + m^2 \left[\frac{f^2 U_z^{*2}}{(\omega^2 + f^2)^2} - \frac{\omega^2 + N^2}{\omega^2 + f^2} \right] \Phi = 0 \quad (51)$$

再令 $\Phi = D \sin \frac{n\pi}{H} z$ (D 为常数, 这样使得 $\Psi_0|_{z=0, H} = 0$, 满足刚性边界条件), 代入到式(51) 得:

$$\omega^4 + \frac{(2 + \alpha_1)f^2 + \alpha_1 N^2}{1 + \alpha_1} \omega^2 + \frac{f^4 + \alpha_1 N^2 f^2 - \alpha_1 f^2 U_z^{*2}}{1 + \alpha_1} = 0 \quad (52)$$

这里 $\alpha_1 = (\frac{mH}{n\pi})^2$, 分析此式可见, 要使得 $\omega^2 > 0$, 必须 $f^4 + \alpha_1 N^2 f^2 - \alpha_1 f^2 U_z^{*2} < 0$, 即 $(U_z^*)^2 > \frac{f^2}{\alpha_1} + N^2$.

再求解 $O(\epsilon^1)$ 方程, 将 $\Psi_0 = D \sin \frac{n\pi}{H} z e^{-az}$ 代入到式(49), 就有:

$$A_0 \frac{d^2}{dz^2} \Psi_1 + B_0 \frac{d}{dz} \Psi_1 + C_0 \Psi_1 = -A_1 D \left[(a^2 - \frac{n^2 \pi^2}{H^2}) \sin \frac{n\pi}{H} z - 2a \frac{n\pi}{H} \cos \frac{n\pi}{H} z \right] e^{-az} - B_1 D \left(\frac{n\pi}{H} \cos \frac{n\pi}{H} z - a \sin \frac{n\pi}{H} z \right) e^{-az} - C_1 D \sin \frac{n\pi}{H} z e^{-az} \quad (53)$$

令 $\Psi_1 = \Phi_1(z) e^{-az}$, 这样就可以得到关于 $\Phi_1(z)$ 的微分方程:

$$A_0 \frac{d^2}{dz^2} \Phi_1 + (C_0 - A_0 a^2) \Phi_1 = -A_1 D \left[(a^2 - \frac{n^2 \pi^2}{H^2}) \sin \frac{n\pi}{H} z - 2a \frac{n\pi}{H} \cos \frac{n\pi}{H} z \right] - B_1 D \left(\frac{n\pi}{H} \cos \frac{n\pi}{H} z - a \sin \frac{n\pi}{H} z \right) - C_1 D \sin \frac{n\pi}{H} z \quad (54)$$

可以证明 $\frac{C_0 - A_0 a^2}{A_0} = (\frac{n\pi}{H})^2$, 另外记 $A_1 = a_1 + a_2 z$, $B_1 = b_1 + b_2 z$, $C_1 = c_1 + c_2 z$ 代入到式(54) 中, 得到:

$$A_0 \frac{d^2}{dz^2} \Phi_1 + A_0 \left(\frac{n\pi}{H} \right)^2 \Phi_1 = G_1 \sin \frac{n\pi}{H} z + G_2 \cos \frac{n\pi}{H} z + G_3 z \sin \frac{n\pi}{H} z + G_4 z \cos \frac{n\pi}{H} z \quad (55)$$

其中 $G_1 = D \left[-a_1 (a^2 - \frac{n^2 \pi^2}{H^2}) + b_1 a - c_1 \right]$ (56)

$$G_2 = D \left[2a_1 a \frac{n\pi}{H} - b_1 \frac{n\pi}{H} \right] \quad (57)$$

$$G_3 = D \left[-a_2 (a^2 - \frac{n\pi}{H}) + b_2 a - c_2 \right] \quad (58)$$

$$G_4 = D \left(2a_2 a \frac{n\pi}{H} - b_2 \frac{n\pi}{H} \right) \quad (59)$$

可以设 Φ 的解由式(55)对应的齐次方程通解与非齐次特解迭加所得:

$$\begin{aligned} \Phi = & D_1 \sin \frac{n\pi}{H} z + D_2 \cos \frac{n\pi}{H} z + D_3 z \sin \frac{n\pi}{H} z \\ & + D_4 z \cos \frac{n\pi}{H} z + D_5 z^2 \sin \frac{n\pi}{H} z + D_6 z^2 \cos \frac{n\pi}{H} z \end{aligned} \quad (60)$$

其中 D_1, D_2 是由刚性边界条件决定的常数, D_3, D_4, D_5, D_6 则由下列方程组所决定:

$$- 2 \frac{n\pi}{H} D_4 + 2D_5 = \frac{G_1}{A_0} \quad (61)$$

$$2 \frac{n\pi}{H} D_3 + 2D_6 = \frac{G_2}{A_0} \quad (62)$$

$$- 4 \frac{n\pi}{H} D_6 = \frac{G_3}{A_0} \quad (63)$$

$$4 \frac{n\pi}{H} D_5 = \frac{G_4}{A_0} \quad (64)$$

因为 $\Psi_1|_{z=0, H} = 0$, 从而 $\Phi|_{z=0, H} = 0$, 在式(60)中运用这样的边界条件:

$$D_2 = 0 \quad (65)$$

$$D_2 \cos n\pi + D_4 H \cos n\pi + D_6 H^2 \cos n\pi = 0 \quad (66)$$

由式(65) ~ (66) 得到

$$D_4 + D_6 H = 0 \quad (67)$$

从式(61) ~ (64) 解出 D_4, D_6 代入式(67), 就有:

$$G_1 + \frac{H}{2} G_3 - \frac{H}{2n\pi} G_4 = 0 \quad (68)$$

将 $G_i (i = 1, 4)$ 表达式(56) ~ (59) 代入式(68), (68) 就变为如下形式:

$$\begin{aligned} - a_1 (a^2 - \frac{n^2 \pi^2}{H^2}) + b_1 a - c_1 + \frac{H}{2} [- a_2 (a^2 - \\ \frac{n^2 \pi^2}{H^2}) + b_2 a - c_2] - a_2 a + \frac{b_2}{2} = 0 \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned}
 \text{由于 } a_1 &= (3\omega^2 + f^2)\omega & a_2 &= imU_z^*(3\omega^2 + f^2) \\
 b_1 &= 2imf U_z^*(\omega - f) & b_2 &= -2m^2f(U_z^*)^2 \\
 c_1 &= m^2[2f U_z^{*2} - (3\omega^2 + N^2)\omega] & c_2 &= -im^3U_z^*(3\omega^2 + N^2)
 \end{aligned}$$

故可以得到 ω 解的表达式:

$$\begin{aligned}
 \omega &= [(a^2 - \frac{n^2\pi^2}{H^2})(3\omega^2 + f^2) - m^2(3\omega^2 + N^2) - 2imf U_z^* a]^{-1} \{-2m^2 \\
 & f(U_z^*)^2 - 2imf^2 U_z^* a + \frac{b_2}{2} - a_2 a - \frac{H}{2}[a_2(a^2 - \frac{n^2\pi^2}{H^2}) - b_2 a - c_2]\} \quad (70)
 \end{aligned}$$

精确到 $O(\epsilon)$ 时 Ψ 的解的表达式如下:

$$\begin{aligned}
 \Psi &= \Psi_0 + \epsilon\Psi_1 = (\Phi_0 + \epsilon\Phi_1)e^{-a_2 z} \\
 &= D \sin \frac{n\pi}{H} z e^{-a_2 z} + \epsilon(D_{1s} \sin \frac{n\pi}{H} z + D_{2c} \cos \frac{n\pi}{H} z + D_{3z} \sin \frac{n\pi}{H} z + \\
 & D_{4z} \cos \frac{n\pi}{H} z + D_{5z^2} \sin \frac{n\pi}{H} z + D_{6z^2} \cos \frac{n\pi}{H} z) e^{-a_2 z} \quad (71)
 \end{aligned}$$

取 $N^2 = 8.0 \times 10^{-6} \text{ s}^{-2}$, $Ri^* = N^2/(U_z^*)^2 = 0.6$, $f = 0.9 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $n = 1$, $H = 10 \text{ km} = 10^4 \text{ m}$, $L^* = 100 \text{ km} = 10^5 \text{ m}$, 则可求得 $\omega = 0.6054 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\omega = -5.7358 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. 由此可见, 在弱的横向切变 V_z^* 情况下, 它并不能使得对称不稳定的增长率发生改变, 因而非平行型扰动并不比平行型扰动占有优势, 这也可能是扰动顺着风向排列、平行类扰动在实际大气中出现的频数较多(50%)的原因之一。至于为什么非平行型扰动亦可以出现? 则可能与强的横向切变 V_z^* 超过一定临界值有关, 此时小参数展开方法已失效, 详细的数值计算可以进行讨论。此外, 由于横向切变 V_z^* 的存在, 将 a, a_2, b_2 和 c_2 的表达式代入到 ω 的表达式(70)中, 发现 ω 为纯虚数, 因此不稳定模将不可能以驻波形式出现, 而必定在 η 方向上传播。一般情况下, $U_z^* > 0$, 则在 $V_z^* > 0$ 的情况下, 不稳定扰动向 η 的正方向传播; 反之, $V_z^* < 0$ 时, 不稳定扰动向 η 的负方向传播。总而言之, 扰动是顺切变传播的。图 4 表示了 ω 的虚部 $(\omega)_i$ 随半波长 L^* 的变化情况, 波长越短, 传播速度越快。在大部分波段范围内, 由于非平行切变基流而导致的扰动传播速度都差不多, 只是在 $L^* < L_c^*$ (L_c^* 与基本参数有关, 此处大约 60 km) 时, 传播速度发生了跃变, 这种短波的传播速度很快变得相当大。

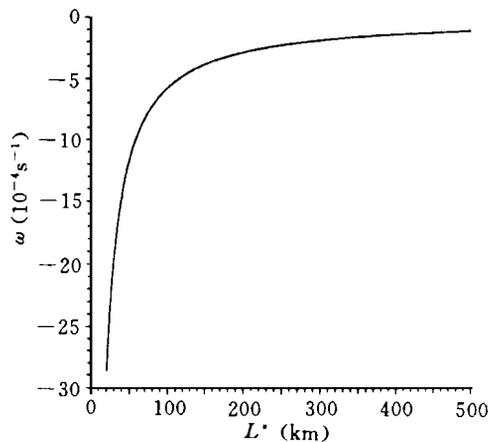


图 4 $(\omega)_i$ 随半波长 L^* 的变化

4 结 语

由于在锋面系统中经常观测到并非呈纬向的中尺度雨带,在扰动与锋区附近热成风平行的情况下(∇ 不为零),就需要对原先的纬向基流对称不稳定的条件加以修正。通过水平面上旋转坐标变换,得到了新的非纬向基流对称不稳定的判据条件。尽管形式上类似于通常的对称不稳定判据条件,但是其物理意义并不相同,基流以及基流的切变都需要加以修正。因此,在实际的资料分析应用中,必须要注意采取新的对称不稳定条件才合适。

在存在横向切变时,无旋层结流体中由于基流与带状扰动存在夹角的不稳定判据条件要宽松一些,因而不稳定扰动总是尽可能偏向于与基流成一夹角、甚至于垂直。在有旋层结流体中,通过小参数展开方法指出,弱的横向切变并不能改变对称不稳定的增长率,所以平行类扰动在实际大气中出现的频数较多一些(50%)。由于这种横向切变的存在,不稳定扰动也不可能以驻波形式存在,而必定呈现传播形式的增长。传播方向是顺切变方向,波长越短,传播速度越快。在大部分波段范围内,扰动的传播速度都差不多,只是在 $L^* < L_c^*$ 的超短波部分,传播速度会发生跃变。有关强的横向切变对对称不稳定扰动的发展和传播的影响是我们今后要研究的课题之一,可以通过数值差分方法加以讨论。

致谢: 本文是国家自然科学基金会重点项目的研究成果之一,初稿曾刊载于该项目的论文集中,这次正式发表时,对公式推导作了不少修改,作者感谢李泽椿、陶诗言先生等项目验收组成员所提出的宝贵修改意见。

参考文献

- 1 Hobbs P V. Organization and structure of clouds and precipitation on the mesoscale and microscale in cyclonic storms. *Rev Geophys Space Phys*, 1978, 16: 741 ~ 755
- 2 Browning K A. Mesoscale structure and mechanisms of frontal precipitation systems. *Mesoscale Meteorology*, May 30- June 10, 1983, Sweden
- 3 许梓秀,王鹏云. 冷锋前部中尺度雨带特征及其机制分析. *气象学报*, 1989, 47: 199 ~ 206
- 4 张可苏. 大气动力学模式的比较研究. *中国科学*, 1980, (3): 277 ~ 287
- 5 Lilly D K. On the instability of Ekman boundary flow. *J Atmos Sci*, 1966, 23: 481 ~ 494
- 6 Busse F H, Chen W L. On the (nearly) symmetric instability. *J Atmos sci*, 1981, 38: 877 ~ 880
- 7 Nehr Korn T. Wave-CISK in a baroclinic basic state. *J Atmos Sci*, 1986, 43: 2773 ~ 2791

SYMMETRIC INSTABILITIES OF NON-ZONAL AND NON-PARALLEL MEAN FLOWS

Ding Yihui

(*National Climate Centre, Beijing, 100081*)

Shen Xinyong

(*Department of Geophysics, Peking University, Beijing, 100871*)

Abstract

Symmetric instabilities of non-zonal and non-parallel mean flows are discussed in this paper by using of nonhydrostatic equilibrium mode on a f -plane in which sonic wave is filtered under anelastic assumption. The new condition of symmetric instability of non-zonal mean flows has been found. In consideration of the shear of mean flows across the band disturbance, the instability condition of non-rotation stratified fluid is $Ri < \frac{1}{4} \sin^2(\beta - \alpha)$. The weak shear of mean flows across the band disturbance can't change the growth rate of symmetric instability in rotation stratified fluid under $O(\epsilon)$ approximation. The disturbance must propagate along downshear. The shorter the wavelength is, the bigger the phase velocity is.

Key words: Symmetric instability, Non-zonal mean flow, Non-parallel mean flow.