

三维层结大气随高度变化基流的不稳定性及半椭圆定理

林乃实 孙立潭

(空军气象学院, 南京, 211101)

摘 要

本文应用 Howard(1961)所用的精巧积分方法研究了三维非静力平衡层结大气随高度变化基流上重力内波的不稳定性质。给出了不稳定产生的必要条件和相速度在相速复平面上的分布规律;发展了 Miles 定理和 Howard 半圆定理;得到了有限深度气层的半椭圆定理。并指出在随高度变化的基流中,重力内波的不稳定范围与基流的垂向结构及波传播方向有关;半椭圆的位置和长轴分别重合于 Howard 半圆的位置和直径,而短轴则依赖于与 Richardson 数相关的参数 J_0 , R_0 和波数 k 及流场厚度参数 k_0 。

关键词: 随高度变化基流,重力内波不稳定,半椭圆定理。

1 引 言

Miles(1961)^[1]研究了层结流体中平行剪切流上扰动的不稳定条件并得出了著名的 Miles 定理。此后 Howard(1961)^[2]通过精巧的积分处理,不仅给出了不稳定扰动的条件,而且还进一步研究了不稳定扰动的增长率,给出了 Howard 半圆定理。随后许多科学工作者把上述两个定理分别推广至大气动力学与海洋动力学之中。如 Dutton(1976)^[3]曾将该两定理推广到三维大气中;秦曾灏(1986)^[4]又将其推广至考虑自由面起伏的准三维的海洋波动问题中,即基本流是单向的平行剪切流,有铅直切变,重力内波与基本流处一个方向上,在与之垂直的水平方向上内波扰动也有变化。缪国平和刘应中(1990)^[5]还研究了正交双向的平行剪切流上波动的不稳定问题。

此外, Kochar 和 Jain(1979)^[6], Makov 和 Stepanyant(1984)^[7]考虑了层结因子对不稳定波动发展的抑制作用,建立了半椭圆定理。文献[6]指出在相速复平面上,不稳定波动的复波速被限制在一个半椭圆之内,该半椭圆的长轴重合于 Howard 半圆的直径,而短轴则取决于气层的最小 Richardson 数;文献[7]进一步指出该椭圆的短轴不仅依赖于气层的最小 Richardson 数,而且还与不稳定波的波数有关。以上均是针对单向的平行切变流而论的。

事实上,单向平行剪切流是一种比较特殊的情况,扰动传播也不一定与基本流同向。本文讨论的是层结大气平行剪切流的三维不稳定,即平行剪切流是正交双向的,例如在某一水平方向上平行剪切流流速为 $\bar{u}(z)$, z 为铅直坐标;与之正交的水平方向上平行剪切流

流速为 $\bar{v}(z)$; 它们在铅直方向上的切变规律可以(且应该是)不一样。这样剪切流的合速度沿铅直方向是变向的, 换言之合成剪切流矢量并不是平行的, 文中所谓的随高度变化基流系指互为正交的基流流速分量而言的。重力内波水平传播的方向也可以是任意的。

本文就这种随高度变化基本流上的大气重力内波进行了研究, 得出了此基流上重力内波不稳定的条件, Howard 半圆定理及半椭圆定理。

2 能量守恒型模式及波动振幅变化方程

文献[8]指出, 目前中小尺度动力学中广为应用的动量无辐散模式或滞弹性模式(文献[9])不具有总能量守恒性质, 因而这种内含的虚假能源必定导致波动的虚假增长。Durran 指出: 相对于总能量守恒的线性化完全弹性模式其振幅误差在250K 的等温大气中于10km 高度处可达22%, 而其频率误差在云内可达 10^{-2} , 云外达 $10^{-3[10]}$ 。为避免这种虚假增长对半椭圆定理的影响, 今采用 Lipps 和 Hemler(1982)^[11] 的能量守恒型非弹性模式, 它既无振幅相对误差, 也无频率误差(Lipps, 1990)^[12]。

不计科氏力的作用, 则绝热无粘大气中随高度变化基流上重力内波的控制方程组为

$$\frac{u'}{t} + \bar{u} \frac{u'}{x} + \bar{v} \frac{u'}{y} + w' \frac{\bar{u}}{z} = - \frac{p'}{x} \quad (1)$$

$$\frac{v'}{t} + \bar{u} \frac{v'}{x} + \bar{v} \frac{v'}{y} + w' \frac{\bar{v}}{z} = - \frac{p'}{y} \quad (2)$$

$$\frac{w'}{t} + \bar{u} \frac{w'}{x} + \bar{v} \frac{w'}{y} = - \frac{p'}{z} + g \frac{\bar{w}}{z} \quad (3)$$

$$\frac{p'}{t} + \bar{u} \frac{p'}{x} + \bar{v} \frac{p'}{y} + w' \frac{\bar{p}}{g} N^2 = 0 \quad (4)$$

$$\frac{u'}{x} + \frac{v'}{y} + \frac{w'}{z} + \bar{w}' = 0 \quad (5)$$

以上是经线性处理后所得的扰动方程组。其中 u', v', w' 分别为 x, y, z 方向的扰动速度, $p' = p' / \rho^*$, 而 p' 为扰动气压, \bar{w} 为平均位温, \bar{w}' 为扰动位温, $N^2 \equiv \frac{g}{\bar{w}} \frac{d\bar{w}}{dz}$, $\bar{w}' = \frac{1}{\bar{w}} \frac{d\bar{w}'}{dz}$, \bar{u}, \bar{v} 分别为 x 及 y 方向的基本气流, \bar{w} 为示踪系数, 而且 $\bar{w} = 0$, $\bar{w}' = 1$ 时为浅对流模式; $\bar{w} = 1$, $\bar{w}' = \bar{w}(z)$ 时为深对流模式。

易推证以上模式具有如下的总能量方程:

$$\begin{aligned} \frac{E}{t} + \bar{u} \frac{E}{x} + \bar{v} \frac{E}{y} + \frac{p'u'}{x} + \frac{p'v'}{y} \\ + \frac{p'w'}{z} + \bar{u}'w' \frac{\bar{u}}{z} + \bar{v}'w' \frac{\bar{v}}{z} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $E = \frac{1}{2} \rho^* \left[u'^2 + v'^2 + w'^2 + \frac{g^2}{N^2} \bar{w}'^2 \right]$ 。容易证明, 基流无垂直切变时, 对零值边界或法向速度零值边界总能量守恒。

在边界条件 $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$, $0 < z < H$ (气层上界) 之下, 可假设有如下的波动解

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(l, m, z) \exp\{i(\omega t + lx + my)\} \quad (7)$$

其中

$$\mathbf{v}' = \{u', v', w', \frac{g}{\rho_0} \rho', \theta'\} \quad (8)$$

$$= \{u, v, w, \rho, \theta\} \quad (9)$$

将式(7)–(9)代入式(1)–(5)中,记 $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + l\bar{u} + m\bar{v}$ 且 $D \equiv \frac{d}{dz}$, 则得

$$i \bar{u} + w D \bar{u} + i l = 0 \quad (10)$$

$$i \bar{v} + w D \bar{v} + i m = 0 \quad (11)$$

$$i w + D = 0 \quad (12)$$

$$i \rho + N^2 w = 0 \quad (13)$$

$$i l u + i m v + D w + \rho^2 w = 0 \quad (14)$$

经过推导,即得到关于 w 的单一方程

$$\begin{aligned} & \rho^2 \{D^2 w + \rho^2 D w + w D^2 \rho\} + \{k^2(N^2 - \rho^2) \\ & - l D^2 \bar{u} - m D^2 \bar{v} + l \rho^2 D \bar{u} + m \rho^2 D \bar{v}\} w = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $k^2 = l^2 + m^2$

$$\text{令 } q_0 = [(1 - \rho) + \rho]^{-1} \quad (16)$$

$$\tilde{w} = w / q_0 \quad (17)$$

立即得到垂直向扰动振幅变化的经典形式的自伴方程

$${}^2 D(q_0 D \tilde{w}) + k^2(N^2 - \rho^2) q_0 \tilde{w} - l \tilde{w} D(q_0 D \bar{u}) - m \tilde{w} D(q_0 D \bar{v}) = 0 \quad (18)$$

对于方程(18),其边界条件,仍同 Miles(1961)和 Howard(1961),采用零值边界条件,即

$$\tilde{w}(z=0) = \tilde{w}(z=H) = 0 \quad (19)$$

其中 H 为气层的厚度。

方程(18)和边界条件(19)即构成关于 \tilde{w} 的特征问题。

3 不稳定条件的探讨

对于特征值式(18)和式(19),原本可以用离散化求出特征值的办法来研究波动不稳定的条件,但这往往比较繁琐。相较之下,采用 Howard(1961)所用的充满技巧性的数学处理就显得异常简便而且所得结论具有普遍性。

对于不稳定问题,可假设 ρ 的虚部为零,从而 $\rho = (\rho_r + l\bar{u} + m\bar{v}) + i \rho_i \neq 0$, 由此引入如下的变换

$$\tilde{w} = \rho^n F_n(z) \quad (20)$$

将其代入式(18)得

$${}^2 D[q_0 D(\rho^n F_n)] - \rho^{n+1} F_n D(q_0 l D \bar{u} + q_0 m D \bar{v}) + k^2(N^2 - \rho^2) q_0 \rho^n F_n = 0 \quad (21)$$

记 F_n 的共轭函数为 \bar{F}_n , 并在式(21)两边乘上函数 $\rho^{n-2} \bar{F}_n$, 然后对整个气层进行积分,得

$$\begin{aligned} & \int_0^H \rho^n \bar{F}_n D[q_0 D(\rho^n F_n)] dz - \int_0^H \rho^{2n-1} D[q_0(l D \bar{u} + m D \bar{v})] \rho^n F_n^2 dz \\ & + \int_0^H k^2(N^2 - \rho^2) q_0 \rho^{2n-2} F_n^2 dz = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

对上式左端第一项按照分部积分法进行积分并利用边界条件式(19),然后将积分结果按照 ρ 的降幂进行整理,即得

$$\int_0^H 2n(DF_n^2 + k^2 F_n^2) q_0 dz + \int_0^H 2^{n-1}(1-n)D[q_0(l\bar{u} + mD\bar{v})] F_n^2 dz - \int_0^H 2^{n-2}[n(n-1)(lD\bar{u} + mD\bar{v})^2 + k^2 N^2] F_n^2 q_0 dz = 0 \quad (23)$$

由此积分关系式, 可以方便地研究波动不稳定的条件。

1. 充分条件

取 $n = 1$, 并记 $G_1^2 = DF_1^2 + k^2 F_1^2$ 则得

$$\int_0^H G_1^2 q_0 dz - \int_0^H k^2 N^2 F_1^2 q_0 dz = 0 \quad (24)$$

由 $^2 = ^2 + 2(l\bar{u} + m\bar{v}) + (l\bar{u} + m\bar{v})^2$ 则式(24)可写成

$$^2 I_2 + 2 I_1 + I_0 = 0 \quad (25)$$

其中

$$I_2 = \int_0^H G_1^2 q_0 dz$$

$$I_1 = \int_0^H (l\bar{u} + m\bar{v}) G_1^2 q_0 dz$$

$$I_0 = \int_0^H [(l\bar{u} + m\bar{v})^2 G_1^2 - k^2 N^2 F_1^2] q_0 dz$$

求解方程(25)得

$$= - \frac{I_1}{I_2} \pm \left[\frac{I_1^2}{I_2^2} - \frac{I_0}{I_2} \right]^{1/2} \quad (26)$$

因而不稳定的充分条件—— 为复数的条件是

$$I_1^2 < I_0 I_2 \quad (27)$$

利用Schwartz不等式显然有

$$I_1^2 \leq I_2(I_0 + \int_0^H k^2 N^2 F_1^2 q_0 dz) \quad (28)$$

上式表明, 当 $N^2 < 0$ 时, 当层结为静力不稳定时, 式(27)显然成立, 即对于任意的风速廓线, 波动都将不稳定。然而当 $N^2 \geq 0$ 时, 即静力稳定或中性时, 不能由式(28)导出式(27), 这表明要找到对于任意的水平基流分布 ($\nabla(z)$) 都成立的判据是困难的。

2. 不稳定的必要条件

在式(23)中, 令 $n = 1/2$, 并改写 $^{-1} = ^{-1/2}$, 且记 $G_{\frac{1}{2}}^2 = DF_{\frac{1}{2}}^2 + k^2 F_{\frac{1}{2}}^2$, 则可得

$$\int_0^H G_{\frac{1}{2}}^2 q_0 dz + \int_0^H \left[\frac{1}{4}(lD\bar{u} + mD\bar{v})^2 - k^2 N^2 \right] \left| \frac{F_{\frac{1}{2}}}{-} \right|^2 q_0 dz + \frac{1}{2} \int_0^H D[q_0(lD\bar{u} + mD\bar{v})] F_{\frac{1}{2}}^2 dz = 0 \quad (29)$$

由此可得 的虚部

$$\int_0^H \left\{ G_{\frac{1}{2}}^2 + \left[k^2 N^2 - \frac{1}{4}(lD\bar{u} + mD\bar{v})^2 \right] \left| \frac{F_{\frac{1}{2}}}{-} \right|^2 \right\} q_0 dz = 0 \quad (30)$$

对于不稳定波要求 $\neq 0$, 则气层中至少于某处成立

$$k^2 N^2 - \frac{1}{4}(LD\bar{u} + mD\bar{v})^2 < 0 \quad (31)$$

即

$$R_i = \frac{N^2}{(D\bar{u})^2 + (D\bar{v})^2} < \frac{(LD\bar{u} + mD\bar{v})^2}{4k^2[(D\bar{u})^2 + (D\bar{v})^2]}$$

若令 $D\bar{V} \equiv D\bar{u}\mathbf{i} + D\bar{v}\mathbf{j}$, $\mathbf{k} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j}$, α_0 为 \mathbf{k} 与 $D\bar{V}$ 之间的夹角

$$\text{则易得} \quad R_i < \frac{1}{4}\cos^2 \alpha_0 \leq \frac{1}{4} \quad (32)$$

其中记 $R_{ic} = \frac{1}{4}\cos^2 \alpha_0$ 为临界 Richardson 数。

文献[4]讨论了三维层结流体平行剪切流中重力内波的不稳定,得出了内波不稳定的必要条件为 $R_i < \frac{l^2}{4k^2}$, 仅取决于 x 方向的波数与水平总波数 k ; 而本文所得结果(式(31)或式(32))是文献[4]之结果的推广,它表明在三维层结大气随高度变化基流中重力内波不稳定必要条件仅取决于水平总波数矢(\mathbf{k})与水平基流的垂直切变矢($D\bar{V}$)之间的夹角,而与这两个矢量的大小无关。从中可见本文所得的不稳定判据与背景流场的铅直切变结构有关,当 $D\bar{v} = 0$ 时简化为文献[4]的结果。式(32)是著名的 Miles 定理的进一步发展。

图1为式(32)的图示,标出了随高度变化基本流的稳定区与不稳定区。由图中可见,当 $\alpha_0 \neq 0$ 或 $\pm \pi$ 时, R_i 数的临界值均小于 Miles 得到的 $\frac{1}{4}$ 。当 $\alpha_0 = \pm \frac{\pi}{2}$ 时,不稳定范围小到零,即这一判据表明,当重力内波传播方向与基本流垂直时,内波总是稳定的。

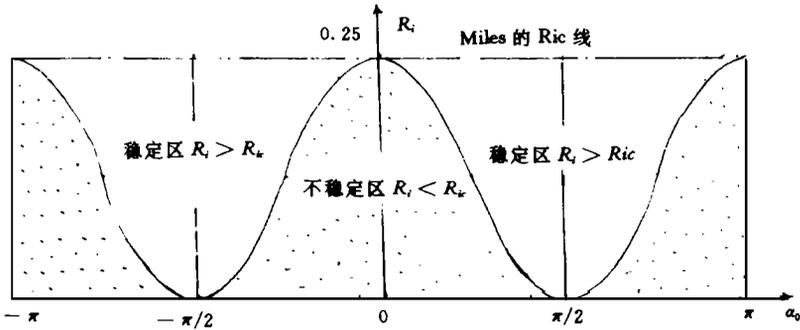


图1 随高度变化基流的稳定区与不稳定区

从式(32)容易发现在三维非静力平衡大气随高度变化基流中依然存在一个新的结论,即重力内波不稳定的必要条件与背景流场的垂直切变结构有关。

值得注意的是,当 $D\bar{v} \equiv 0$ 时, $R_i < \frac{l^2}{4k^2}$, 退化为文献(4)的单向平行剪切流的结果。而 $D\bar{v} \equiv 0$ 包括两种情况:其一为 $\bar{v}(z) \equiv \text{常数} (\neq 0)$ 的情况,这相当于在与平行剪切流正交的方向上存在着均流,而这一正交均流的存在不影响稳定性讨论;其二为 $\bar{v}(z) \equiv 0$ 的情况,三维重力内波的性质可以由二维扰动的性质来判断,与易家训^[13]的结论相同,换言之,这一二维重力内波与三维重力内波之间的关系对于 $\bar{v}(z) \equiv \text{常数}$ (即存有正交均流)的情形也是成立的。

4 三维层结大气随高度变化基流中的 Howard 半圆定理

$$\text{令 } \omega = \alpha + i\beta$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \quad & \omega = \alpha + i\beta = \alpha + i\beta \\ & \omega^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta + (\alpha + i\beta)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta + \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta \end{aligned} \quad (33)$$

将式(33)代入式(24)并将实虚部分开得

$$\int_0^H (\alpha + i\beta) G_1^2 q_0 dz = 0$$

对于不稳定波 $\beta \neq 0$, 故有

$$\int_0^H (\alpha + i\beta) G_1^2 q_0 dz = -\alpha \int_0^H G_1^2 q_0 dz \quad (34)$$

对于实部则有

$$\int_0^H \left[\alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha(\alpha + i\beta) - (\alpha + i\beta)^2 \right] G_1^2 q_0 dz - \int_0^H k^2 N^2 F_1^2 q_0 dz = 0 \quad (35)$$

此处利用 Howard 引入的精巧处理

$$[\alpha + i\beta - (\alpha + i\beta)_{\min}] [\alpha + i\beta - (\alpha + i\beta)_{\max}] \leq 0 \quad (36)$$

由式(36)得 $(\alpha + i\beta)^2$ 并代入式(35)得三维大气中的 Howard 不等式

$$\left[\left(\alpha + \frac{a+b}{2} \right)^2 + \beta^2 - \left(\frac{b-a}{2} \right)^2 \right] \int_0^H G_1^2 q_0 dz + \int_0^H k^2 N^2 F_1^2 q_0 dz \leq 0 \quad (37)$$

其中 $a = (\alpha + i\beta)_{\min}$, $b = (\alpha + i\beta)_{\max}$

由于静力稳定层结中 $N^2 > 0$, 故 Howard(1961)略去式(37)中关于 N^2 的项, 而得到半圆定理

$$\left(\alpha + \frac{a+b}{2} \right)^2 + \beta^2 \leq \frac{1}{4}(b-a)^2 \quad (38)$$

由 a, b 的含义易推得如下形式

$$\left(c_R - \frac{a^* + b^*}{2} \right)^2 + c_I^2 \leq \frac{1}{4}(b^* - a^*)^2 \quad (39)$$

其中 $a^* = \min_{z \in (0, H)} \{ \mathbf{V} \cos \theta \}$, $b^* = \max_{z \in (0, H)} \{ \mathbf{V} \cos \theta \}$,
 $c_R = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{c}$, $c_I = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{c}_I$, θ 为 \mathbf{V} 与 \mathbf{k} 之间的交角。

文献[3—5]都曾得到相类似的定理。该定理表明在复平面 (c_R, c_I) 上, 任一不稳定波的波速都被限制在一个由基本流合成速度大小以及合成波数矢与基本流合成速度矢之间的交角所决定的半圆之内。当 $\bar{v}(z) = 0$ 时式(39)即简化为文献[4]所获得的 Howard 半圆定理之表现形式, 由此可见本文所获得的关于随高度变化基流的 Howard 半圆定理是文献[4]之结论的推广。详细说明及图示见后文。

5 三维层结大气随高度变化基流上的半椭圆定理

以上 Howard 定理的推广与完善加深了对不稳定波动的理解, 但是该半圆定理是在式(37)中略去了层结项而得到的, 故未能反映出层结对不稳定波动增长的抑制作用。文献[6]首先定量地估计了层结的抑制作用, 文献[7]又作了修正, 建立了半椭圆定理。由于上

述定理限于 Boussinesq 两维流, 今将其推广到三维层结大气中。

由式(20)易知 $F_{1/2} = \frac{1}{2}F_1$, 因而可得

$$DF_{1/2} = \frac{1}{2} \left(LD\bar{u} + mD\bar{v} \right) + \frac{1}{2}DF_1$$

利用代数不等式 $A - B^2 \geq A - B^2$ 得

$$DF_{1/2}^2 \geq DF_1^2 + \frac{1}{4} \frac{F_1^2(LD\bar{u} + mD\bar{v})^2}{LD\bar{u} + mD\bar{v}} - LD\bar{u} + mD\bar{v} F_1 DF_1 \quad (40)$$

因为式(30)中 $G_{1/2}^2 \equiv DF_{1/2}^2 + k^2 F_{1/2}^2$, 于是将式(40)代入式(30)中并整理成如下形式

$$\int_0^H \left\{ \frac{1}{4} \frac{(LD\bar{u} + mD\bar{v})}{LD\bar{u} + mD\bar{v}} F_1^2 + (DF_1^2 + k^2 F_1^2) - [1 - J] \frac{(LD\bar{u} + mD\bar{v})^2}{4} F_1^2 \right\} q_0 dz \leq 0 \quad (41)$$

其中

$$J = \frac{R_i}{R_{ic}} = \frac{4k^2 N^2}{(LD\bar{u} + mD\bar{v})^2}$$

故有

$$(1 - J_0)B^2 \geq B^2 + E^2 + k^2 D^2 - \int_0^H LD\bar{u} + mD\bar{v} F_1 DF_1 q_0 dz \quad (42)$$

其中

$$B^2 = \int_0^H \frac{(LD\bar{u} + mD\bar{v})^2}{4} F_1^2 q_0 dz, \quad E^2 = \int_0^H DF_1^2 q_0 dz$$

$$D^2 = \int_0^H F_1^2 q_0 dz, \quad J_0 = \min_{z \in (0, H)} \left(\frac{R_i}{R_{vr}} \right)$$

根据 Schwartz 不等式知

$$\int_0^H LD\bar{u} + mD\bar{v} F_1 DF_1 q_0 dz \leq \left[\int_0^H \frac{(LD\bar{u} + mD\bar{v})^2}{4} F_1^2 q_0 dz \int_0^H DF_1^2 q_0 dz \right]^{\frac{1}{2}} = 2BE$$

故式(41)可改写成

$$E^2 - 2BE + J_0 B + k^2 D^2 \leq 0 \quad (43)$$

由此式可解出

$$B - (B^2 - J_0 B - k^2 D^2)^{1/2} \leq E \leq B + (B^2 - J_0 B - k^2 D^2)^{1/2} \quad (44)$$

由此即得

$$E^2 \leq 2B^2 \left[1 - \frac{1}{2} J_0 - \frac{1}{2} k^2 \frac{D^2}{B^2} + (1 - J_0 - k^2 \frac{D^2}{B^2})^{1/2} \right] \quad (45)$$

利用 \geq 以及

$$\frac{D^2}{B^2} = \frac{\int_0^H q_0 F_1^2 dz}{\int_0^H q_0 \frac{(LD\bar{u} + mD\bar{v})^2}{4} F_1^2 dz} \geq 4 \frac{1}{(LD\bar{u} + mD\bar{v})_{\max}^2}$$

得

$$\int_0^H q_0 |DF_1|^2 dz \leq E^2 \leq 2B^2 R_0 \quad (46)$$

其中

$$R_0 \equiv 1 - \frac{1}{2} J_0 - 2k^2 \int_0^H (lD\bar{u} + mD\bar{v})^{-2} dz + \left[1 - J_0 - 4k^2 \int_0^H (lD\bar{u} + mD\bar{v})_{\max}^{-2} dz \right]^{\frac{1}{2}} \quad (47)$$

对于有限深度的层结切变流体, 在零值边界条件(式(19))之下, 对于连续可微的函数 $F_1 \in L_2(0, H)$, 成立着 Poincare 积分不等式

$$\int_0^H |DF_1|^2 dz \geq \frac{2}{H^2} \int_0^H |F_1|^2 dz \quad (48)$$

因而有

$$\int_0^H q_0 |DF_1|^2 dz \geq k_0^2 \int_0^H |F_1|^2 dz \quad (49)$$

其中

$$k_0^2 = \frac{2q_{0\min}}{H^2 q_{0\max}}$$

故由式(46)和(49)可得

$$\begin{aligned} \int_0^H q_0 |G_1|^2 dz &= \int_0^H q_0 (|DF_1|^2 + k^2 |F_1|^2) dz \\ &\leq \frac{k_0^2 + k^2}{k_0^2} \frac{2B^2 R_0}{1} \end{aligned} \quad (50)$$

注意

$$B^2 \leq \frac{1}{4} \int_0^H q_0 (lD\bar{u} + mD\bar{v})^2 |F_1|^2 dz$$

故式(50)可改写成

$$\int_0^H q_0 |G_1|^2 dz \leq \frac{k_0^2 + k^2}{k_0^2} \frac{R_0}{2} \int_0^H q_0 (lD\bar{u} + mD\bar{v})^2 |F_1|^2 dz \quad (51)$$

层结项可写成

$$\int_0^H k^2 q_0 N^2 |F_1|^2 dz \geq \frac{1}{4} J_0 \int_0^H q_0 (lD\bar{u} + mD\bar{v})^2 |F_1|^2 dz \quad (52)$$

将式(51)与式(52)代入 Howard 不等式(37)中, 立即得到三维大气随高度变化基流上关于有限深度气层的半椭圆定理

$$\left(R + \frac{a+b}{2} \right)^2 + \left[1 + \frac{k_0^2}{2(k_0^2 + k^2)} \frac{J_0}{R_0} \right] \int_0^H q_0 (lD\bar{u} + mD\bar{v})^2 |F_1|^2 dz \leq \frac{1}{4} (b-a)^2 \quad (53)$$

或者利用 $R = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{c}_R$, $\int_0^H q_0 (lD\bar{u} + mD\bar{v})^2 |F_1|^2 dz = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{c}_I$, 故得另一表达式

$$\left(c_R - \frac{a^* + b^*}{2} \right)^2 + \left[1 + \frac{k_0^2}{2(k_0^2 + k^2)} \frac{J_0}{R_0} \right] c_I^2 \leq \left(\frac{b^* - a^*}{2} \right)^2 \quad (54)$$

其中 a^* , b^* 的含义同式(39)。进而若令 ∇_M 和 ∇_m 分别为 $(\frac{l}{k} \bar{u} + \frac{m}{k} \bar{v})$ 在有限深度气层中

取最大值和最小值的高度上的基本流合成速度(即 $\overline{u^2 + v^2}$), 并记 $\sin k = \frac{m}{k}$, $\cos k = \frac{l}{k}$, $\sin M = \frac{\bar{v}_M}{\bar{V}_M}$, $\cos M = \frac{\bar{u}_M}{\bar{V}_M}$, $\sin m = \frac{\bar{v}_m}{\bar{V}_m}$, $\cos m = \frac{\bar{u}_m}{\bar{V}_m}$, 则有

$$\frac{a^* + b^*}{2} = \frac{\bar{V}_M \cos(A - H_m) + \bar{V}_m \cos(A - H_M)}{2} \quad (55)$$

$$\frac{b^* - a^*}{2} = \frac{\bar{V}_M \cos(A - H_M) - \bar{V}_m \cos(A - H_m)}{2} \quad (56)$$

由式(54)可见, 在相速复平面上, 任一不稳定重力内波的复相速被限制在一个半椭圆内。对比式(39)可知, 半椭圆含于 Howard 半圆之中, 预示着不稳定范围缩小了, 判据更为准确与苛刻了。这是由于半椭圆定理的获取是在 Howard 半圆定理之上考虑了层结对不稳定波的抑制作用后得出的。由于式(39), (54)–(56)的复杂性, 为了进一步理解半椭圆定理和半圆定理, 现讨论特例如下:

1. $A - H = 0$ 时, 即重力内波的波数向量与 $(\bar{u} \cos k + \bar{v} \sin k)$ 取最大值的高度上的基本流合速度同向。令 $L = (1 + \frac{k_0^2}{2(k_0^2 + k^2)} \frac{J_0}{R_0})^{\frac{1}{2}} \geq 1$

(1) 当 $\cos(A - H_m) = -1$ 时, 不稳定区的长轴为 $\frac{\bar{V}_M + \bar{V}_m}{2}$, 短轴为 $(\frac{\bar{V}_M + \bar{V}_m}{2}) / (1 + \frac{k_0^2}{2(k_0^2 + k^2)} \frac{J_0}{R_0})^{\frac{1}{2}}$, 椭圆中心坐标位于 $(\frac{\bar{V}_M - \bar{V}_m}{2}, 0)$ 处;

(2) 当 $\cos(A - H_m)$ 由 -1 渐增时, 半椭圆的长轴和短轴均缩小, 椭圆中心渐向 \bar{V}_M 处移;

(3) 当 $\cos(A - H_m) = 0$ 时, 长轴为 $\frac{\bar{V}_M}{2}$, 短轴为 $\frac{\bar{V}_M}{2L}$, 椭圆中心移至 $(\frac{\bar{V}_M}{2}, 0)$ 处;

(4) 当 $\cos(A - H_m)$ 由 0 继续增加时, 半椭圆的长短轴也继续缩小, 圆心也继续向 \bar{V}_M 处移;

(5) 当 $\cos(A - H_m) = 1$ 时, 长轴为 $\frac{\bar{V}_M - \bar{V}_m}{2}$, 短轴为 $\frac{\bar{V}_M - \bar{V}_m}{2L}$, 半椭圆中心位于 $(\frac{\bar{V}_m + \bar{V}_M}{2}, 0)$ 处。

图2中, (1)–(3) 相当于(a')区, (3)–(5) 相当于(b')区。图中箭头表示变化趋势。

2. 当 $A - H = 0$ 时, 即重力内波的波数向量与 $(\bar{u} \cos k + \bar{v} \sin k)$ 取最小值的深度上的基本流合速度同向。 $\cos(A - H_m)$ 可以从 -1 变至 $+1$ 。

(1) 当 $\cos(A - H_m) = -1$ 时, 不稳定半椭圆区的长轴为 $\frac{\bar{V}_M + \bar{V}_m}{2}$, 椭圆中心位于 $(-\frac{\bar{V}_M - \bar{V}_m}{2}, 0)$, 短轴为 $\frac{\bar{V}_M + \bar{V}_m}{2L}$;

(2) 当 $\cos(A - H_m)$ 由 -1 渐增时, 半椭圆的长轴与短轴均缩小, 半椭圆中心位置渐向 \bar{V}_m 处移;

(3) 当 $\cos(A - H_m) = 0$ 时, 半椭圆的长轴为 $\frac{\bar{V}_m}{2}$, 短轴为 $\frac{\bar{V}_m}{2L}$, 中心位置移至 $\frac{\bar{V}_m}{2}$ 处;

(4) 当 $\cos(A - H_m)$ 由 0 渐增时, 半椭圆的长轴和短轴继续缩小, 中心位置也继续向

($\bar{V}_m, 0$) 处移;

(5) 当 $\cos(A - H_l) = \bar{V}_m / \bar{V}_M$ 时, 半椭圆不稳定区收缩至零, 中心移至 ($\bar{V}_m, 0$);

(6) 当 $\cos(A - H_l)$ 由 \bar{V}_m / \bar{V}_M 再增时, 半椭圆的长轴和短轴增大, 中心位置越过 ($\bar{V}_m, 0$) 向 ($\bar{V}_M, 0$) 处移;

(7) 当 $\cos(A - H_l) = 1$ 时, 长轴为 $\frac{\bar{V}_M - \bar{V}_m}{2}$, 短轴则为 $\frac{\bar{V}_M - \bar{V}_m}{2L}$, 半椭圆的中心位于 ($\frac{\bar{V}_M + \bar{V}_m}{2}, 0$) 处, 与第一种情况的(5)一致。

上述7种情形如图2所示, (c')区、(d')区和(e')区分别相应于过程(1)一(3), (3)一(5)和(5)一(7)。

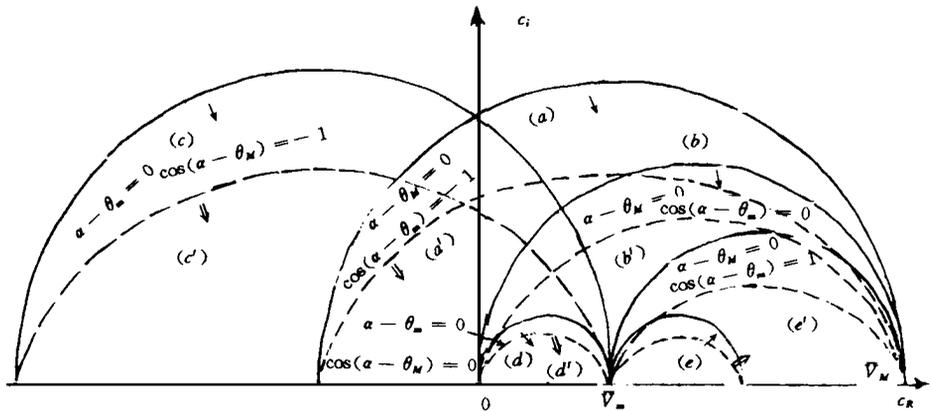


图2 随高度变化基本流中的半椭圆定理(虚线)和 Howard 半圆定理的推广(实线)

同理, 本文中的 Howard 半圆定理也可类似地进行讨论(见图2), 此处不再赘述。

由上述讨论可见, 在三维层结大气随高度变化基流中, 半椭圆的长轴与中心位置分别重合于 Howard 半圆的直径和圆心, 而且取决于重力内波的传播方向和背景流场的垂直结构; 半椭圆的短轴则依赖于与 Richardson 数有关的参数 J_0, R_0 , 和波数 $\hat{u}k$ 以及气层的

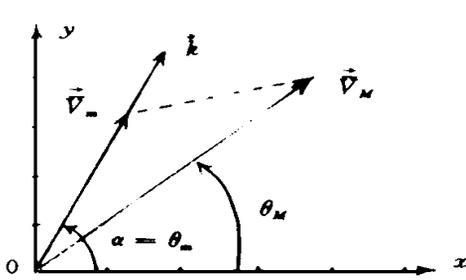


图3 \vec{V}_M 和 \vec{V}_m 的几何关系
($A = H_m, \cos(A - H_l) = \bar{v}_m / \bar{V}_M$)

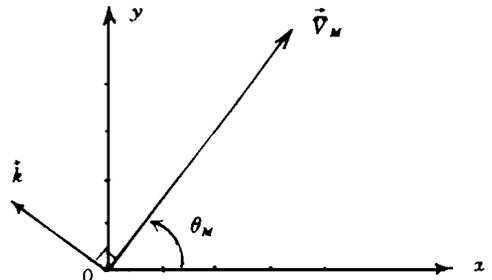


图4 \vec{V}_M 与 \vec{k} 的几何关系
($\bar{V}_m = 0, \cos(A - H_l) = 0$)

厚度参数 k_0 。对于具体的背景流场,可按文中的判据进行分析,这里指出两点值得注意的地方。其一是当 $\cos(\mathbf{H}_b - \mathbf{H}_t) = \mathbf{V}_m / \mathbf{V}_M (A = \mathbf{H})$ 时,不稳定区缩为一点,这时不管内波传播方向, c_i 总为0,故内波总是稳定的,图3为此时基本流合成速度 \mathbf{V}_M 和 \mathbf{V}_m 之间的几何关系。其二当 $\mathbf{V}_m = 0$ 时,则图2中的(d)区消失,半椭圆缩小为一点的位置移至原点,此时,当 $\cos(A - \mathbf{H}) = 0$ 时,重力内波总是稳定的,这时波数矢与 $(\bar{u}\cos A + \bar{v}\sin A)$ 取最大值的深度上基本流合成速度矢垂直(见图4)。

6 结 语

本文应用守恒型的非弹性模式研究了三维非静力平衡层结大气中随高度变化基流上重力内波的不稳定性质,推广了 Miles 定理和 Howard 半圆定理,得到了富有新意的半椭圆定理。研究指出,在随高度变化基流中,重力内波的不稳定范围与基本流的垂直切变结构以及波动传播方向有关;在层结稳定大气中,任一不稳定波的复相速都被限制在相速复平面的一个半椭圆之内,其长轴重合于 Howard 半圆的直径,依赖于基本流合速度大小以及波数矢与基本流合速度矢之间的夹角,而短轴则取决于与 Richardson 数有关的参数 J_0, R_0 , 波数 $\hat{\mathbf{k}}$ 及流场的厚度参数 k_0 。

参考文献

- [1] Miles J W. On the stability of heterogeneous shear flow. J Fluid Mech, 1961, 10: 496—508.
- [2] Howard L N. Note on a paper of John W. Miles. J Fluid Mech, 1961, 10: 509—612.
- [3] Dutton J A. The Ceales Wind, an introduction to the theory of atmospheric motion. Mc Graw-Hill, New York, 1976.
- [4] 秦增灏. 层结流体平行切变流的不稳定和重力内波. 力学学报, 1986: 392—402.
- [5] 缪国平, 刘应中. 层结流体正交平行剪切流的不稳定性. 水动力学研究与进展(A), 1990, 73—78.
- [6] Kochar G T and Jain R K. Note on Howard's semicircle theorem. J Fluid Mech, 1979, 91:489— 491.
- [7] Makov Y N and Y A. stepanyants. Note on the paper of Kochar and Jain on Howard's semicircle theorem. J Fluid Mech, 1984. 140: 1—10.
- [8] Durr an D R. Improving the anelastic approximation. J Atmos Sci. 1989, 46: 1453—1461.
- [9] 张可苏. 大气动力学模式的比较研究. 中国科学(B), 1980, 3: 277— 278.
- [10] 胡志晋, 邹光源. 大气非静力平衡和弹性适应. 中国科学(B), 1991: 550— 560.
- [11] Lipps F and Hemler R. A scale analysis of deep moist convection. J Atmos Sci. 1982, 39:2192— 2210.
- [12] Lipps F. On the anelastic approximation for deep convection. J Atmos Sci. 1990, 47: 1794— 1798.
- [13] 易家训. 流体力学(中译本). 高等教育出版社, 1982.

*—ELLIPSE THEOREM
OF THE BASIC FLOW CHANGED WITH HEIGHT
IN THE NONHYDROSTATIC ATMOSPHERE*

Lin Naishi Sun Litan

(Institute of Meteorology, P. L. A. Air Force, Nanjing, 211101)

A b s t r a c t

By use of the ingenious integral manipulation introduced by Howard(1961), the instability of the basic flow changed with height in three dimensional nonhydrostatic atmosphere has been investigated in the present paper. The essential condition of instability generation and the distribution law of the phase speed on the complex phase speed coordinate plane are explicitly given. Improved Miles theorem and Howard's semicircle theorem, as well as semi-ellipse theorem have been established. The semi-ellipse theorem means that the complex wave velocity for any unstable mode is restricted in a semi-ellipse whose major axis and centre coincide with the diameter and that of Howard's semicircle respectively, and whose minor axis depends not only on the parameters J^0, R^0 associated with the Richardson number and wave number k but also on the atmospheric depth parameter k^0 .

Key words: Basic flow changed with height, Gravitational internal wave instability, Semi-ellipse theorem.