次天气尺度系统中的非地转运动和广义平衡模式*

胡伯威

(武汉暴雨研究所, 430074)

摘 要

研究了宏观准静力的次天气尺度系统中非地转运动的机理。较以往更具体地揭露了在全运动的时间尺度远大于惯性重力波的前提下,各类强迫因子与非地转运动的旋转分量及辐散分量的关系。并证明上述"慢变化"前提在各种常见情况甚至包括几类熟见的强系统情况下都能满足。除了众所周知,强的准二维系统可允许传统形式的 Rossby 数 $R_0 \equiv \frac{U}{f_0 L} \approx \bigcirc(1)$ 以外,这里还证明水平尺度小但铅直方向深厚,并包容着强对流云群团的系统恰恰能容忍特别强的非绝热而保持慢变化。相应地,其中辐散运动可以只比旋转运动小"半个量级"。突破了迄今各类过滤模式对辐散运动的过严限制。

在能满足慢演变的条件下,非地转高频波振幅总可被自然、及时地控制在可忽略的水平上,这表明慢演变与准平衡的一致性。按照严谨的尺度分析,在上述讨论的过程中顺势导出一个"广义平衡模式"。方程中含有强迫场的一阶时间导数项。虽然容许强非绝热和放宽对辐散风的限制,却能以最大限度(这个限度是固有的)的精确性描述滤除高频波的慢演变。这个模式必须屏弃"主导气流"与"次级气流"的区分,包含了一个辐散风倾向的诊断方程。此模式可能特别有助于加深夏季副热带潮湿地区次天气尺度强降水系统的机理诊断。

关键词: 非地转运动, 非绝热, 广义平衡模式。

1 引 言

尽管现在都知道大气中的重力-惯性波(以下简称"IG")并非完全没有直接的天气意义,而且在特殊场合下出现的强 IG 及各种形式的非地转不稳定爆发对一些中小尺度灾害性天气有重大影响而正成为气象科学研究的热点之一;尽管计算机技术在软、硬件两方面的突飞猛进排除了使用完全的动力学方程作天气预报的各种障碍,早已将业务数值预报推上原始方程模式的时代,但是曾经显示出气象学家解决问题的卓越智慧和技巧的滤(高频)波模式至今并没有仅仅成为历史的遗迹。特别是介于准地转模式与原始方程之间的所谓"中间模式",近 20a 来还有新的发展。在这方面 1980 年代初 McWilliams 和 Gent[1]以及 1990 年代初 Xu Qin[2]先后作了相应时期的综合评述和新探讨。这说明滤波模式在动力学机理方面的认识意义甚至某些实用前景都还未可忽视。

迄今的中间模式基本被归纳为两个类型[1,2],一是半地转类,二是平衡方程类。其中分

* 初稿时间: 1995 年 12 月 15 日; 修改稿时间: 1996 年 3 月 11 日。
资助课题: 北京大学暴雨监测与预测国家重点实验室研究项目。

别针对大气中局部存在的强梯度、强的流场变形和弯曲等重要的中尺度现象,放宽了准地转约束,部分地引入了非地转风的作用。上述综合评述[1,2]中讨论了各种中间模式的特点和分别存在的问题。Xu Qin[2]提出了一种"半平衡模式"(Simibalance Model),它在有关动力学参数的两种极限情况下分别趋向准地转、半地转类模式和平衡方程类模式,从而得益于两类模式性能的互补。具有较好的广适性。但所有的过滤模式,包括上述 Xu Qin 的模式都有一个共同点,即在排除 IG 的同时还将慢变化的运动分派为"主导气流"("Pimary flow 或"Leading-order flow")和"次级气流"(Secondary flow)两个部分。实际上前者是旋转运动的全部或主要部分,后者基本上就是辐散运动及相应的铅直运动。只有在 Xu Qin 的较广义的三维次级环流(矢量 Ψ 场)理论中将旋转运动的一个微小部分也纳入次级气流中。所有这些过滤模式表现出基本上由旋转运动场在每个瞬间单向地决定(或派生出)辐散运动场这样一种"诊断关系"。半地转模式虽然包含了辐散风的平流强迫作用,但是经坐标形式的转换后[3]仍然明确体现出上述派生关系;平衡方程类模式则通过迭代收敛体现出这种关系。因此这些模式中没有而且不需要一个独立的辐散风场预报方程。由所有这些模式的推导过程可清楚地看到,它们都必须以辐散风的概量远小于地转风和旋转风为前提。于是它们的适用性质实际上已受到一个重大的限制。有充分的观测事实表明[4,5],夏季副热带潮湿地区(如东亚季风湿润区),在伴有对流云团或云带的次天气尺度系统中(这里"次天气尺度"一词综合了国内外略有差别的两种习惯定义,其上限接近天气尺度,下限则大致取 Orlansky[6] β 中尺度的上限。系统在宏观上是准静力的)辐散风场的强度往往超过上述限制。这个限制究竟是不是滤波模式必须的前提?1960 年代前期曾庆存[7]在他关于运动场性质的分类中,将 $\lambda^2 << O(1)$ 的情况(文献[7]中 λ 为 Rossby 数)定义为"平衡运动"。并导出这种情况下只是散度的平方比涡度的平方小一个量级(即两者只差"半个量级")。但仅仅是 $\lambda^2 << O(1)$ 意味着在一般情况下已不能保证变化的时间尺度和振幅与 IG 有充分的区别。即与此相应的近似截断方程组(模式)将缺乏严格的滤波性质。最近胡伯威[8]在研究一种相当正压切变线的动力学性质时,证明这种系统能够容纳对强非绝热响应的,只比地转风小"半个量级"的辐散风而仍保持准平衡的慢变化。这一特例暗示出在某些系统的特殊结构状态下,如果导致强辐散运动的原因不是过强的平流而是强非绝热,滤波模式中对辐散运动的传统限制是可以放宽的。

文中通过讨论非地转运动的机理,导出一个能以问题本身固有的最大限度的精确性滤除 IG 而描述纯慢变化的"广义平衡模式"。其前提是必须满足大气场各特征参数(包括少数反映系统结构特点的参数)之间的一组不等式。而包括实际存在的各种强次天气尺度系统在内的大气场都能满足或至少接近满足这些前提。模式允许辐散风只比旋转风小"半个量级",两者之间不再拘于单向的主从关系。辐散风场有独立的预报方程。最后一节略论对这种方程求数值解的一些特殊问题。

2 非地转运动场方程和尺度分析

引言中已指出,文中讨论的运动系统在宏观上是准静力的。若不考虑近赤道系统,则在涉及数值积分问题之前为简洁起见把方程写在 f 平面上,不影响基本结果的正确性。于是可采用下列控制方程组:

$$\frac{d\mathbf{V}^*}{dt^*}\nabla^*\Phi^* + f_0\mathbf{K}\wedge\mathbf{V}^* = 0 \tag{1a}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t^*} + \mathbf{V}^* \quad \nabla^*\right)\frac{\partial\Phi^*}{\partial Z^*} + \frac{C^2}{H^2}w^* - \frac{R}{Hc_p}Q^* = 0 \tag{1b}$$

$$\nabla_3^* \quad \mathbf{V}_3^* - \frac{w^*}{H} = 0 \tag{1c}$$

其中R为空气气体常数,c_p为空气定压比热,f_0为科氏参数,设为常数。$Z^* = -H\ln(p/p_0)$,p_0为海平面参考气压,H为均质大气高度,亦即假想均温大气中$p = ep_0$等压面的高度。Z^*与物理高度相近,而$\frac{\partial\Phi^*}{\partial Z}$与实际温度成正比。因此$Z^*$也是虚拟高度(pseudo-heigt)的一种形式。

$C^2 = \sigma P^2$,C是扰动铅直尺度为H情况下的重力内波波速,它在整个对流层近似为常数($C^2 \approx 7.5 \quad 10^3 m^2s^{-2}$[9]),$\sigma$是一般$p$坐标热力学方程中定义的静力稳定度。

$$\mathbf{V}^* \equiv (u^*, v^*); \mathbf{V}_3^* \equiv \mathbf{V}^* + \mathbf{K}w^*; \nabla^* \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^*}, \frac{\partial}{\partial y^*}\right); \nabla_3^* \equiv \nabla^* + \mathbf{K}\frac{\partial}{\partial Z^*}$$

Q^*为单位质元非绝热加热率。所有变量加星号以示与后面无因次变量的区别。由式(1a)和(1b)可分别得到散度、涡度和热成风涡度方程:

$$\frac{\partial D^*}{\partial t^*} = A_d^* + f_0\zeta^* \tag{2a}$$

$$\frac{\partial\zeta^*}{\partial t^*} = A_r^* - f_0D^* \tag{2b}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^*\partial Z^*}\nabla^{*2}\Phi^* = \nabla^* A_\Phi^* - \frac{C^2}{H^2}\nabla^{*2}w^* + \frac{R}{Hc_p}\nabla^{*2}Q^* \tag{2c}$$

其中
$$D^* \equiv \nabla^* \quad \mathbf{V}^* \equiv \nabla^* \quad \mathbf{V}_a^* \equiv \nabla^* \quad \mathbf{V}_d^*$$
$$\zeta^* \equiv \mathbf{K} \quad \nabla^* \wedge \mathbf{V}^*$$
$$\zeta_a^* \equiv \mathbf{K} \quad \nabla^* \wedge (\mathbf{V}^* - \mathbf{V}_g^*) \equiv \mathbf{K} \quad \nabla^* \wedge \mathbf{V}_a^* \equiv \mathbf{K} \quad \nabla^* \wedge \mathbf{V}_{ra}^*$$

其中V_a^*为非地转风,$\mathbf{V}_d^*$和$\mathbf{V}_{ra}^*$分别为它的辐散分量和旋转分量;$\nabla^{*2} \equiv \nabla^* \quad \nabla^*$,$A_d^* \equiv -\nabla^* \quad (\mathbf{V}_3^* \quad \nabla_3^* \mathbf{V})$,$A_r^* \equiv -K \quad \nabla^* \wedge (\mathbf{V}_3^* \quad \nabla_3^* \mathbf{V}^*)$分别为三维平流导致的水平散度和铅直涡度变率;$A_\Phi^* \equiv -\mathbf{V}^* \quad \nabla^* \frac{\partial\Phi^*}{\partial Z^*} \equiv \mathbf{K} \quad f_0(\mathbf{V}^* \wedge \frac{\partial\mathbf{V}_g^*}{\partial Z^*}$,即厚度平流;$\mathbf{V}_3^* \quad \nabla_3^* \mathbf{V}^* \equiv (\mathbf{V}_3^* \quad \mathbf{V}_3^*)\mathbf{V}^*$。由式(2)和(1c)可得到下列非地转运动场方程组和涡度倾向方程:

$$\prod{}^* D^* = \Gamma^*\left(f_0\frac{\partial A_r^*}{\partial Z^*} - \nabla^{*2}A_\Phi^* - \frac{R}{Hc_p}\nabla^{*2}Q^* + \frac{\partial^2 A_d^*}{\partial t^*\partial Z^*} - \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}}\frac{\partial D^*}{\partial Z^*}\right) \tag{3a}$$

$$\prod{}^* \zeta_a^* = -\frac{1}{f_0}\prod{}^* A_d^* + \Gamma^*\left(\frac{\partial A_r^*}{\partial t^*\partial Z^*} - \frac{1}{f_0}\frac{\partial}{\partial t^*}\nabla^{*2}A_\Phi^* - \frac{R}{f_0Hc_p}\nabla^{*2}\frac{\partial Q^*}{\partial t^*}\right) - \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}}\frac{\partial\zeta_a^*}{\partial Z^*} \tag{3b}$$

$$\prod{}^* \frac{\partial\zeta^*}{\partial t^*} = \frac{C^2}{H^2}\nabla^{*2}A_r^* + f_0^2\Gamma^*\left(\frac{1}{f_0}\nabla^{*2}A_\Phi^* + \frac{R}{f_0Hc_p}\nabla^{*2}Q^* + \frac{\partial^2\zeta_a^*}{\partial t^*\partial Z^*}\right) \tag{4}$$

其中$\prod{}^* \equiv \frac{C^2}{H^2}\nabla^{*2} - \frac{f_0^2}{H}\frac{\partial}{\partial Z^*} + f_0^2\frac{\partial^2}{\partial Z^{*2}}$; $\Gamma^* \equiv \frac{\partial}{\partial Z^*} - \frac{1}{H}$,因为这里Cartesian坐标的

水平轴方向与系统无关, 可认为 x^*, y^* 尺度一致, 即$(x^*, y^*) = L(x, y)$ 相当于定义 $\nabla^* \equiv L^{-1}\nabla$。这样在"准二维"扰动(如急流–锋) 附近就无需给出双重水平尺度。L 可在引言中指出的上、下限之间变动。其余令 $Z^* \equiv hZ$, $t^* \equiv Tt$, $\boldsymbol{V}^* \equiv U\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{V}_g^* \equiv U\boldsymbol{V}_g$, $\boldsymbol{V}_d^* \equiv U_d\boldsymbol{V}_d$, $\boldsymbol{V}_{ra}^* \equiv U_{ra}\boldsymbol{V}_{ra}$, $Q^* \equiv Q_0Q$。L, h, T, U, U_{ra}, U_d 和 Q_0 分别为各相应变量的尺度概量。不带星号者均表示各无因次量。实际上因为 $h < H$ (详见后), 由式(1c): $w^* \equiv \dfrac{U_dh}{L}w$, 又因 $U_d \leq U$(因 $\boldsymbol{V}_d^* \in \boldsymbol{V}^*$), 风场的铅直平流项不会大于水平平流项。于是可令

$$A_r^* \equiv \mu_r \frac{U^2}{L^2}A_r, \quad A_d^* \equiv \mu_d \frac{U^2}{L^2}, \quad \nabla^{*2}A_\Phi^* \equiv \mu_r \frac{f_0U^2}{hL^2}\nabla^2 A_\Phi$$

μ_r, μ_d 和 μ_Φ 是与风场–温度场结构特点有关的条件参数。引言中已提到, 当风场和温度场结构具有某种准二维性质(即在一定方向上分布相对均匀) 时, 平流的量级可能减小, 系数 μ_r, μ_d, μ_Φ 便可小于 $O(1)$。已经知道[10] 在传统平衡模式 ω 方程中分别与动量平流和温度平流有关的两个强迫项具有相同的量级。式(3) 中平流强迫项与前者的区别是考虑了辐散风的平流作用, 而且还不排斥非地转涡度量级接近地转风涡度的情况。尽管有这些区别, 但由于 $U_{ra} \leq U$, 且在准二维情况下 $\boldsymbol{V}_d$ 与 $\boldsymbol{V}_g$ 近于正交而 $\boldsymbol{V}_{ra}$ 与 $\boldsymbol{V}_g$ 方向近乎一致, 不难证明上述两项的量级仍然一致, 因此实际上 $\mu_\Phi = \mu_r$。

一般情况下 A_d^* 的量级取决于其中的

$$J_{xy}^*(u^*, v^*) = -\frac{V}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial \alpha}{\partial n}\frac{\partial V}{\partial s} \tag{5}$$

J_{xy} 为 Jacobian 算符。V 为水平全风速标量, r 为流线曲率半径, n 和 s 分别为流线法向和切向程距, α 为经过某点邻域的两条流线在该处切线的夹角。无论在平直的准二维系统(平直锋面、切变线) 或对称圆形准二维系统(准对称涡旋) 中, $\dfrac{\partial \alpha}{\partial n}$ 和 $\dfrac{\partial V}{\partial s}$ 都很小, 式(5) 右端第二项可以忽略。在平直锋面和切变线中 $O(r) >> L$(注意本文上述关于 L 的定义), 。而 A_d^* 中的散度平流则小于涡度平流。因此可能有 $O(A_d^*) < O(A_r^*)$ 即 $\mu_d < \mu_r$。而在曲率很大的场合(极端情况是中尺度涡旋) $O(r) \approx L$, $O(\dfrac{V}{r}\dfrac{\partial V}{\partial n}) \approx \dfrac{U^2}{L^2}$ 即 $\mu_d \approx O(1) > \mu_r$ 此外设 Q^* (由于其中主要是水相变和对流交换部分) 的分布与运动系统本身有密切关系。可令 $\dfrac{R}{Hc_p}\nabla^{*2}Q^* \equiv E\dfrac{f_0U^2}{hL^2}\nabla^2 Q$, 因而, $E \equiv \dfrac{RhQ_0}{f_0Hc_pU^2}$, $E/\mu_\Phi = E/\mu_r$ 为非绝热率与热量平流的概量比。为了首先讨论时间尺度问题, 先将式(4) 写成下列无因次形式:

$$\frac{UL}{T}\prod\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \mu_rU^2\nabla^2A_r + M^{-2}U^2\Gamma\left(\mu_r\nabla^2A_\Phi + E\nabla^2Q + \frac{U_{ra}L}{U^2T_{ra}}\frac{\partial^2\zeta_g}{\partial t\partial Z}\right) \tag{6}$$

其中 $\prod \equiv \nabla^2 - \dfrac{h}{H}M^{-2}\dfrac{\partial}{\partial Z} + M^{-2}\dfrac{\partial^2}{\partial Z^2}$, $\Gamma \equiv \dfrac{\partial}{\partial Z} - \dfrac{h}{H}$, $M^2 \equiv L_0^2/L^2$。$L_0 \equiv \dfrac{Ch}{f_0H}$ 为斜压地转适应的 Rossby 变形半径(这个考虑了扰动铅直尺度的更准确的定义对中尺度系统是重要的[8]) 。严格说扰动的空间尺度概量应为其"波长"的 $\dfrac{1}{2\pi}$倍。据此文献[8] 估计在铅直尺度与水平尺度同时收缩的锋面附近 $h << H$ 因而 $M^{-2} \approx O(1)$, 在深厚的相当正压切变线中 $h^2 << H^2$, $M^{-2} << O(1)$ 。meso-α尺度涡旋的情况与后者一致。可见, 在上述两类情况中, 都有 $O(\prod) = O(\Gamma) = O(1)$ 非地转风的变化有两种时间尺度, 因此式

(6) 中不一定有 $T = T_{ra}$, 但由于$\frac{\partial\zeta^*}{\partial t^*} \geq \frac{\partial\zeta_a^*}{\partial t^*}$且 $M^{-2} \leq \bigcirc(1)$, 则必定$M^{-2}U_{ra}/T_{ra} \leq U/T$ 。式(6) 左端量级应与右端除末项以外的大项平衡。于是有:

$$T^{-1} = \begin{cases} \mu_r \dfrac{U}{L} & (\text{若 } E \leq M^2\mu_r) \\ M^{-2}E\dfrac{U}{L} & (\text{若 } E > M^2\mu_r) \end{cases} \tag{7}$$

可见, 虽然式(6) 描述的运动尚未滤除 IG, 但全运动的时间尺度已可按式(7) 由有关强迫因子决定。

IG 的频率为

$$f_0(1 + M^2)^{1/2} \approx f_0M \tag{8}$$

(同样地, 这里考虑了扰动的铅直尺度, 修正了以前的表达式[11])。所以, 只要

$$\epsilon \equiv \frac{1}{f_0MT} < < \bigcirc(1) \tag{9}$$

就可视为感兴趣的慢变化情况。后面将看到只要 $\epsilon < < \bigcirc(1)$, 运动的 IG 部分一般远小于全体。由式(7) 可知慢演变的前提是:

$$M^{-1}\mu_rR_0 < < \bigcirc(1) \tag{10a}$$

$$M^{-3}ER_0 < < \bigcirc(1) \tag{10b}$$

其中$R_0 \equiv \frac{U}{f_0L} \approx \frac{U}{f_0}\bigcirc(\nabla^*)$, 即传统形式的 Rossby 数。

(10a, b) 均属必要条件, 这是对强迫场的限制。在这个唯一的限制下, 文中的各种特征参数可在一定范围内改变, 不必具体地指定, 因而下文的各方程都有很强的广适性。

此外式(7) 可写成:

$$\epsilon = \begin{cases} M^{-1}\mu_rR_0 & (E \leq M^2\mu_r) \\ M^{-3}ER_0 & (E > M^2\mu_r) \end{cases} \tag{11}$$

由(10a) 可见, 虽然在较强的中尺度系统中 $R_0 \approx \bigcirc(1)$, 但可以因 $M^{-1} < \bigcirc(1)$ 和 $\mu_r < \bigcirc(1)$ 而保持慢演变。文中所谓次天气尺度系统包含强的准静力中尺度系统。它往往表现出准二维结构特点而使 $\mu_r < \bigcirc(1)$ 。(虽然线性的地转适应理论不足以解释这个事实。但系统在它的相对稳定状态停留的时间长, 也就意味着这种稳定状态出现的机率最大。)

式(10b) 给出了非绝热在慢演变系统中可被容忍的程度。实际上不难看出 ER_0 是将非绝热强度概量以 Rossby 数“当量”的形式表示。正如绝热或弱非绝热运动中的平流 Rossby 数 μ_rR_0 一样, 它对运动性质的影响是很清楚的。式(10b) 表明 M (Rossby 变形半径与扰动水平尺度之比) 愈大, 由于热力强迫的作用愈容易(因而更多地) 被非地转运动的调整作用消弥, 慢演变能在更强的非绝热条件下维持。总之, 慢演变的前提条件(10a, b) 在各种常见情况下(包括弱风场、相对均匀场和急流–锋以至伴随强非绝热的相当正压切变线和涡等) 都能满足。

现在可以把式(3) 写成下列无因次形式:

$$\frac{U_d}{U}\prod D = M^{-2}\Gamma\left(\mu_rR_0\frac{\partial A_r}{\partial Z} - \mu_rR_0\nabla^2A_\Phi - ER_0\nabla^2Q\right.$$

$$\left. + \epsilon M\mu_dR_0\frac{\partial^2A_d}{\partial t\partial Z} - \epsilon_d^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial D}{\partial Z}\right) \tag{12a}$$

$$\frac{U_{ra}}{U}\prod\zeta_g = -\mu_d R_0 \prod A_d + M^{-2}\Gamma\left(\epsilon M\mu_r R_0\frac{\partial^2 A_r}{\partial t\partial Z} - \epsilon M\mu_r R_0 \cdot\cdot^{2}\frac{\partial A_\Phi}{\partial t}\right.$$
$$\left. - \epsilon M E R_0 \cdot\cdot^{2}\frac{\partial Q}{\partial t} - \epsilon_t^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial \zeta_a}{\partial Z}\right) \qquad (12b)$$

前面的时间尺度是由一阶时间导数定义的。由于运动的非地转部分中包含 IG, 后者的时间尺度为 $(Mf_0)^{-1}$, 因此(11a, b) 的两个 2 阶时间导数项中不排除 $\epsilon_t > \epsilon M$ 和 $\epsilon_d > \epsilon M$ 的可能性。但下一节将证明这两项至少不会大于各该式右边的最大项。由式(11) 可知式(12a) 中的一阶时间导数项在任何情况下都不可能大于前面三项中的大项。因此 U_d/U 的量级取决于后者, 即:

$$U_d = \begin{cases} M^{-2}\mu_r R_0 U = M^{-1}\epsilon U & (E \le \mu_r) \\ M^{-2}ER_0U\begin{cases} \approx \epsilon U & (\mu_r < E < M^2\mu_r) \\ = M\epsilon U & (E \ge M^2\mu_r)\end{cases} \end{cases} \qquad (13)$$

式(13) 表明, 只要强迫场限制在能保证 $\epsilon << O(1)$ 的范围(即有关参数的组合满足 10a, b), 则必定有 $U_d \le M\epsilon U$, 在绝热或不太强的非绝热情况下 $U_d << U$。

在有强对流降水的相当正压切变线和涡旋中 $(M\epsilon)^2 << O(1)$, $U_d^2 << U^2$ 即辐散风与地转风或旋转风相比为半阶小量。在强非绝热条件下出现的这种情况不符合传统平衡模式和半地转模式的前提, 但并不妨碍运动处于准平衡状态, 因为下一节将证明, 慢变化 $(\epsilon << O(1))$ 与准平衡是一致的。

由式(12b) 和(13) 容易看出, 只要:

$$\mu_d R_0 \ge \epsilon M\frac{U_d}{U} \qquad (14)$$

则

$$U_{ra} = \mu_d R_0 U \qquad (15)$$

即非地转旋转风的量级取决于平流散度变率。实际上可以证明条件式(14) 总是能满足的。因证明过程比较繁琐, 这里从略。一般情况下 U_{ra} 不大, 但在强涡旋情况下由于曲率半径 $r \approx L$, 故 $\mu_d \approx O(1)$, 且 $R_0 \approx O(1)$, 有可能 $U_{ra} \approx U$ 即非地转旋转风的量级与地转风相近。显然, 这种情况在以往各种平衡模式和 Xu Qin 的半平衡模式中都是被允许的。

3 重力-惯性内波量级的估计

上述讨论中实际仍包含着两种时间尺度的变化。只是慢变化部分在全量中占优势, 使得全量的时间尺度是“慢”的。需要知道的是在整体慢变化的环境下存在的 IG, 它的一般量级如何。确定这一点对平衡运动的进一步了解以及关于其准确的动力学方程的建立是必要的。为此首先要了解什么是在系统内保持一定的 IG 的原因。式(12a) 和(12b) 右边不含时间导数的各项总和分别是系统内强迫场在瞬时给予的(并非实现的) 非地转涡度和散度变化的表达式。如果上述两式左边关于散度和非地转涡度的线性算子内各项之和在全场分别与上述强迫项之和相等, 则说明非地转运动本身的自发变化与强迫变化相抵, 处于平衡状态。大气运动的地转适应理论指出, 这种平衡是通过 IG 的产生和频散过程实现的, 但设想如果上述强迫场处于定常状态, 不随时间变化, 那么只要一次完成适应, 达到平衡以后, 非地转风场也不再随时间变化。即 IG 寂灭后不再重新发生, 只剩下无振荡的定

常非地转环流。这说明运动系统中 IG 的维持状态并不取决于当时强迫场。一般情况下大气场随时间变化, 因而强迫场也随时间变化。设若原先是平衡的, 为了继续维持平衡, 就要求非地转风场与强迫场有协同的时间倾向。即要求有下列关系:

$$\frac{U_d}{U}\prod\frac{\partial D}{\partial t} = M^{-2}\Gamma\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_r R_0\frac{\partial A_r}{\partial Z} - \mu_r R_0\nabla^2 A_\Phi - E R_0\nabla^2 Q\right. \tag{16a}$$

$$\frac{U_{ra}}{U}\frac{\partial \zeta_a}{\partial t} = \mu_d R_0\frac{\partial A_d}{\partial t} \tag{16b}$$

实际上由式(16) 决定的 $\frac{\partial D}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial \zeta_a}{\partial t}$ 也就是因强迫场随时间变化而带来的非平衡散度和涡度产生率。因为响应不管怎样迅速总是在强迫场变化出现之后, 在此之前, 这个倾向就是非平衡产生率。强迫场的变化是在原先准平衡的情况下发生的, 因此是慢变化。相应的非平衡运动产生率也属于慢变化。非平衡运动一经产生, 便以 IG 振荡的方式存在。因此上述非平衡运动产生率也就是 IG 的产生率。于是将式(16) 与式(12) 联系起来便知, IG 的旋转分量与辐散分量的产生率的概量分别为 $\frac{U_{ra}}{T}$ 和 $\frac{U_d}{T}$ 。在慢变化过程中这样产生的 IG 也随即通过频散而衰减。由于大气场不断变化, IG 不断产生, 其衰减过程也就没有终结。频散衰减的时间尺度(即达到比初量小一个量级的"适应时间") 与扰动尺度成正比, 与群速度成反比[12], 可表述为 $\tau_A = f_0^{-1}M^{-1}(1 + M^{-2})^{1/2}$。只要 $M^{-2} << \bigcirc(1)$ 或 $M^{-2} = \bigcirc(1)$ ($M^{-2} >> \bigcirc(1)$ 属于行星尺度情况, 这里可以不考虑) 则

$$\tau_A \approx f_0^{-1}M^{-1} \tag{17}$$

实际上, 这说明当群速度与波速同量级 ($M^{-2} \approx \bigcirc(1)$) 或几乎相等($M^{-2} << \bigcirc(1)$) 时, 频散时间尺度与振动时间尺度(即圆频率的倒数 $f_0^{-1}M^{-1}$) 一致。而频散衰减率又正比于非平衡风本身的强度, 是一种负反馈现象。由于产生率的变化是慢变化, 频散则是一种快速反应, 通过上述方式, 产生率调控着衰减率, 也同时控制着 IG 的量级。根据这个机理可以估计出存在于准平衡过程中 IG 的强度概量。

略去方程组式(1) 中所有非线性项就可以得到纯粹描述 IG 的齐次线性方程组。由此不难证明(略) :

$$U_{IG} = U'_{ra} = M U'_d = M^2 U'_r = U'_g \tag{18}$$

U_{IG} 表示 IG 的概量; U'_{ra} 和 U'_d 分别表示 IG 的旋转分量和辐散分量的概量; U'_r 和 U'_g 表示非平衡旋转风(即 IG 的旋转分量) 中的风场振荡部分和位势梯度场(一般也可称为"地转风"场) 的高频振动部分。当 $M > 1$ 时, $U_{IG} = U'_{ra} = U'_g > U'd > U'_r$ 。看似 IG 的旋转分量大于辐散分量而具有 IG 的全量级。但实际上前者主要是位势场的振荡, 旋转风的振荡反而小于辐散风的振荡。所以这个关系直到纯粹重力波的极限($M^{-2} \to 0$, 只有辐散运动和质量场的振荡, 没有旋转振荡) 仍是正确的。

已指出 IG 概量由慢变化的非平衡风产生率控制。但由于前者的两个分量有一定比例关系式(18) , 而后者的两个分量则根据式(13) 和(15) 由强迫场的情况决定, 不难理解, 若 $U_{ra} > M U_d$, 即产生率的概量 $U_{ra}/T > M U_d/T$, 则 IG 由非平衡旋转风的产生率控制。$U_{ra} > M U_d$ 要求, $\mu_d \approx O(1)$, $\mu_r << O(1)$, $h << H$, $E << O(1)$, 唯一能满足前 3 个条件的情况是浅薄的强中尺度圆涡, 但它恰恰不可能在 $E << O(1)$ 的情况下出现。所以

只有 $U_{ra} < MU_d$，则 IG 由非平衡辐散风的产生率控制。

$U_d' M f_0 = U_d / T, U_d' = \epsilon U_d, U_{ra} = M\epsilon U_d$。

$$U_{IG} = M\epsilon U_d = \begin{cases} M^{-2}\mu_r^2 R_0^2 U & (E \le \mu_r) \\ M^{-2} E\mu_r R_0^2 U & (\mu_r < E \le M^2\mu_r) \\ M^{-2}E^2 R_0^2 U & (E > M^2\mu_r) \end{cases} \tag{19}$$

可见，正由于准平衡慢演变中 IG 的量级直接取决于强迫场的时间变率，而后者又与强迫场的强度本身有密切关系，因此归根结底，IG 的量级与表征各种强迫场强度的内参数有密切关系。还可以清楚地看到，由于 $MU_d \le U(M^{-1}$ 的最小限度为半阶小量，联系式(13) 可以得到这个关系)，因此 $U_{IG} = \epsilon U_d << U$。这说明慢变化($\epsilon << O(1)$) 必定处于准平衡运动状态($U_{IG}/U << O(1); W_{IG}/W << O(1)$) 在某些准二维结构情况下，即使表现为“不充份的”慢变化($\epsilon^2 << O(1)$) 水平运动也可以是准平衡的。但在这些情况下 IG 的铅直运动分量不充份小于全铅直运动。由于铅直运动的重要性，准平衡运动的严格定义应包括铅直运动的可过滤性。这样，慢变化与准平衡互为充分和必要条件，即两者一致。

注意，在有的教科书(如文献[12])，得到过 IG 可以大于准地转铅直运动的结果。但那是指局部出现强非地转扰动的‘时间边界层’中的情况。

当然，文中讨论的是 IG 的总体概量，对强迫场所设的也是总体概量。并不排除在局部地点和时间(特别是发生各类非地转不稳定的场合)短暂出现超强的 IG 的可能性。

4 广义平衡运动和广义平衡模式

从式(1)到式(12)，始终没有离开原始方程的性质。其所描述的运动包含 IG。一直把 $\epsilon << O(1)$ 条件下的运动称为准平衡运动，但还不是纯粹的平衡运动。已证明只要整体变化与 IG 在时间尺度上可分(即相差悬殊)则在强度量级上也是可分的。这暗示着可能把整个方程组析离为分别描述同时进行着的纯慢变化和 IG 的两组方程。以往的过滤模式都是要把 IG 排除。但由于中尺度运动的复杂性，希望这种析离不但准确，而且能保持最大限度的真实性，从而更具有广适性。其中特别要强调的是能允许相当强的辐散运动。

先分析式(12)右边各项中所包含的一些函数的性质：

$$\begin{cases} A_r = F_r(\tilde{u}+u', \tilde{v}+v', \tilde{w}+w') \\ A_d = F_d(\tilde{u}+u', \tilde{v}+v', \tilde{w}+w') \\ A_\Phi = F_\Phi(\tilde{u}+u', \tilde{v}+v', \tilde{u}_g+u_g', \tilde{v}_g+v_g') \\ \dfrac{\partial A_r}{\partial t} = G_r\left(\tilde{u}+u', \tilde{v}+v', \tilde{w}+w', \dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial t}+\dfrac{\partial u'}{\partial t}, \dfrac{\partial\tilde{v}}{\partial t}+\dfrac{\partial v'}{\partial t}, \dfrac{\partial\tilde{w}}{\partial t}+\dfrac{\partial w'}{\partial t}\right) \\ \dfrac{\partial A_d}{\partial t} = G_d\left(\tilde{u}+u', \tilde{v}+v', \tilde{w}+w', \dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial t}+\dfrac{\partial u'}{\partial t}, \dfrac{\partial\tilde{v}}{\partial t}+\dfrac{\partial v'}{\partial t}, \dfrac{\partial\tilde{w}}{\partial t}+\dfrac{\partial w'}{\partial t}\right) \\ \dfrac{\partial A_\Phi}{\partial t} = G_\Phi\Big(\tilde{u}+u', \tilde{v}+v', \tilde{u}_g+u_g', \tilde{v}_g+v_g', \dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial t}+\dfrac{\partial u'}{\partial t}, \dfrac{\partial\tilde{v}}{\partial t}+\dfrac{\partial v'}{\partial t}, \dfrac{\partial\tilde{u}_g}{\partial t} \\ \qquad\qquad + \dfrac{\partial u_g'}{\partial t}, \dfrac{\partial\tilde{v}_g}{\partial t}+\dfrac{\partial v_g'}{\partial t}\Big) \end{cases} \tag{20}$$

这些函数均为括号内各变量及其对各维空间的 1– 2 阶导数的各种 2 次乘积组成的多项式。其中运动各分量带“～”号和带“′”号者分别表示它们的纯慢变化和 IG 部分。

由于已知 IG 远小于全运动, 因此扣除 IG 后的纯慢变化部分具有全运动的量级。由上述函数的二次多项式性质可以分解为不含 IG 的部分和含 IG 的部分。后者的量级取决于交叉项(即带“～”号和带“′”号两因子的乘积) 的总和。于是式(20) 可写成:

$$\left.\begin{aligned} A_r &= \tilde{A}_r + \frac{\epsilon U_d}{\mu_r U}\Delta F_r, \quad \frac{\partial A_r}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{A}_r}{\partial t} + \frac{U_d}{\mu_r U}\Delta G_r \\ A_d &= \tilde{A}_d + \frac{\epsilon U_d}{\mu_d U}\Delta F_d, \quad \frac{\partial A_d}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{A}_d}{\partial t} + \frac{U_d}{\mu_d U}\Delta G_d \\ A_\Phi &= \tilde{A}_\Phi + \frac{M^{1-\delta}\epsilon U_d}{\mu_r U}\Delta F_\Phi, \quad \frac{\partial A_\Phi}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{A}_\Phi}{\partial t} + \frac{M^{1-\delta}U_d}{\mu_r U}\Delta G_\Phi \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

各式右边两项分别为上述两个部分, 后一项的概量均包含在提出的参数分式中。因此 $\Delta F(r, d, \Phi)$ 和 $\Delta G(r, d, \Phi)$ 与 $\tilde{A}(r, d, \Phi)$ 和 $\frac{\partial \tilde{A}(r, d, \Phi)}{\partial t}$ 一样, 其概量均为○(1) 。式(21) 的得出是不难理解的, 只需提示以下要点: 在 A_r 和 A_d 中只包含风速因子, 而 IG 的风场振荡部分的量级为 $M^{-1}U_{IG}$, 在一般情况下 IG 的方向是随机的, 因此参数分式的分子中都不含 μ_r 或 μ_d 。在准二维强系统情况下强迫场也是准二维的, 但恰好此时 IG 的辐散部分与梯度方向大体一致, 具有首阶贡献, 而 $U_d' = M^{-1}U_{IG}$, 因此与一般情况的表达式是一致的。在 A_φ 中还包含位势梯度因子 IG 的位势场振荡部分的量级为 U_{IG}, 但在准二维强系统情况下 $\boldsymbol{V}_{ra}'$ 和 $\tilde{\boldsymbol{V}}_r$ 与 $\tilde{\boldsymbol{V}}_g$ 方向基本一致。矢量乘积中起首阶作用的仍是 IG 的辐散分量。因此 $M^{-\delta}$ 中的

$$\delta = \begin{cases} 1 & (\text{一般情况}) \\ 0 & (\text{准二维系统}) \end{cases}$$

此外 $Q = \tilde{Q} + Q'$, $\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} + \frac{\partial Q'}{\partial t}$ 。右边两项也分别为纯慢变化部分和与 IG 有关的部分。除去非地转不稳定增长的特殊情况(包括急剧增长后的衰减过程) 以外, 非绝热对较弱的高频振荡是不敏感的。因此一般说后一部分可以忽略。于是根据式(21) 和(18) , 式(12) 可写成:

$$\begin{aligned} \frac{U_d}{U}\prod\tilde{D} + \frac{\epsilon U_d}{U}\prod D' = {} & M^{-2}\Gamma\Big(\mu_r R_0\frac{\partial \tilde{A}_r}{\partial Z} - \mu_r R_0 \nabla^2\tilde{A}_\Phi - ER_0\nabla^2\tilde{Q} \\ & + \epsilon M\mu_d R_0\frac{\partial \tilde{A}_d}{\partial t\partial Z} - \epsilon^2 M^2\frac{U_d}{U}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial \tilde{D}}{\partial Z}\Big) + \frac{M^{-1}\epsilon U_d}{U}\Big(M^{-1}R_0\frac{\partial \Delta F_r}{\partial Z} \\ & - M^{-\delta}R_0\nabla^2\Delta F_\Phi + R_0\frac{\partial \Delta G_d}{\partial Z} - M\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial D'}{\partial Z}\Big) \end{aligned} \tag{22a}$$

$$\begin{aligned} \frac{U_{ra}}{U}\prod\tilde{\zeta}_g + \frac{M\epsilon U_d}{U}\prod\zeta_g' = {} & -\mu_d R_0\prod\tilde{A}_d + M^{-2}\Gamma\Big(\epsilon M\mu_r R_0\frac{\partial^2 \tilde{A}_r}{\partial t\partial Z} \\ & - \epsilon M\mu_r R_0\nabla^2\frac{\partial \tilde{A}_\Phi}{\partial t} - \epsilon MER_0\nabla^2\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} - \epsilon^2 M^2\frac{U_{ra}}{U}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial \tilde{\zeta}_g}{\partial Z}\Big) - \frac{M\epsilon U_d}{U}\prod\Delta F_d \\ & + \frac{M^{-1}\epsilon U_d}{U}\Gamma\Big(R_0\frac{\partial \Delta G_r}{\partial Z} - M^{1-\delta}R_0\nabla^2\Delta G_\Phi - M^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial \zeta_g'}{\partial Z}\Big) \end{aligned} \tag{22b}$$

虽然从式(12) 改写为式(22) , 各项在数学形式上都分成了两个部分, 但方程在物理上

仍是一个整体,不能任意割裂为两个方程组。对照式(19)可以看出,方程组(22a)中所有含IG的项与对应的慢变化项之比均 $\leq\epsilon$,它们在整个方程中更无疑是小量。但在 $U_{ra} << M\epsilon U_d$ 不成立的情况下,式(22b)中含IG的项不一定足够小,不能都略去。由于含IG的项都是纯IG及其导数或(和)它们与慢变化量乘积组成的多项式,因此都是在零点附近随时间高频振动的量。可以证明(略)它们在慢变化时间尺度间隔内的统计平均(即包括在慢变化各种位相时段的平均)与原来各该项的概量之比大致也就是两种时间尺度之比。也就是说这些项对于慢过程影响的平均效果比它们原来的量级又缩小 ϵ 倍。在这个意义上可以略去式(22b)中所含有IG的项,得到一个充分近似的纯慢变化非地转运动方程组:

$$\frac{U_d}{U}\prod\tilde{D} = M^{-2}\Gamma\left(\mu_r R_0\frac{\partial\tilde{A}_r}{\partial Z} - \mu_r R_0 \iddots^2\tilde{A}_\Phi - ER_0\iddots^2\tilde{Q} + \epsilon M\mu_d R_0\frac{\partial^2\tilde{A}_d}{\partial t\partial Z}\right) \tag{23a}$$

$$\frac{U_{ra}}{U}\prod\zeta_a = -\mu_d R_0\prod\tilde{A}_d + M^{-2}\Gamma\left(\epsilon M\mu_r R_0\frac{\partial^2\tilde{A}_r}{\partial t\partial Z}\right.$$
$$\left. - \epsilon M\mu_r R_0\iddots^2\frac{\partial\tilde{A}_\Phi}{\partial t} - \epsilon MER_0\iddots^2\frac{\partial\tilde{Q}}{\partial t}\right) \tag{23b}$$

按略去的最大项并考虑到可能的极端情况,式(23)的近似程度为 $O(\epsilon^2) - O(\epsilon)$。这是最大限度的近似。因为问题本身的确定性也只能达到这个限度。本质上并不存在能彻底独立于高频振荡的慢变化。平衡场及其演变就是依赖IG的产生及其频散过程而沿着并非彻底确定的相空间轨道进行的。从纯慢变化的观点(即上述截断方程组的观点)看,IG的整体作用是统计性质的。其具体行为则包含着随机性。这个随机性就表现在由式(22)略去的那些项的平均值不完全为零而又无法确定这一事实上。式(23a,b)还同时略去了 $\tilde{D}$ 和 ζ_a 的二阶时间导数项。因为它们的量级等于或小于相应的IG分量的二阶时间导数项的时间平均值。

按照第3节讨论的机理,式(23a,b)准确地描述了慢变化的非地转风场既响应着强迫场又响应着强迫场的时间倾向,使IG的产生达到可能的最小限度那样一种平衡状态。已经看到,除 f 平面近似外,对原始方程唯一的一个截断(减化),即式(22)→式(23a,b),是自然的,而不是人为的。式(23a,b)可以称为广义的平衡方程。其中包含着“平衡的”辐散风,它与地转风之比可以为半阶小量;也包含着在特殊情况下可与地转风同量级的非地转旋转风。前者是以往任何过滤模式所不容纳的;后者是地转类模式所不容纳的。但前面已说明,它们分别存在于强非绝热系统和中尺度强涡旋这些重要情况下。虽然广义平衡方程组对原始方程的人为截削和束缚最少,最具普适性,在抑制高频振荡方面却恰恰因此而能克服某些过滤措施的过犹不及缺陷[13],具有完善的平衡性质。

将式(2a–b)和式(11b–c)写成无因次形式并通过类似上述的尺度分析滤除IG得到:

$$\epsilon M\frac{U_d}{U}\frac{\partial\tilde{D}}{\partial t} = \mu_d R_0\tilde{A}_d + \frac{U_{ra}}{U}\zeta_a \tag{24a}$$

$$\epsilon M\frac{\partial\zeta_a}{\partial t} = \mu_r R_0\tilde{A}_r + \frac{U_d}{U}\tilde{D} \tag{24b}$$

$$\epsilon M\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial Z} - \mu_r R_0\tilde{A}_\Phi - ER_0\tilde{Q} + M^2\frac{U_d}{U}\tilde{w} = 0 \tag{24c}$$

$$\tilde{D} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial Z} - \frac{h}{H}\tilde{w} = 0 \tag{24d}$$

已指出过滤运动本质上有微小程度的不确定性。在这个精确性限度上可指定式(24)中的 $\tilde{D}$, ζ_g 以及相应的 $\tilde{w}$, $\frac{\partial \tilde{D}}{\partial Z}$, $\tilde{V}$, $\tilde{V}_g$ 等均按式(23a, b)定义。于是有:

$$\frac{U_d}{U}\prod \frac{\partial \tilde{D}}{\partial t} = M^{-2}\Gamma\left(\mu_r R_0 \frac{\partial^2 \tilde{A}_r}{\partial t \partial Z} - \mu_r R_0 \nabla^2 \frac{\partial \tilde{A}_\Phi}{\partial t} - E R_0 \nabla^2 \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t}\right) \tag{25a}$$

$$\epsilon M \prod \frac{\partial \tilde{\zeta}_g}{\partial t} = \mu_r R_0 \nabla^2 \tilde{A}_r + M^{-2}\Gamma\left(\mu_r R_0 \nabla^2 \tilde{A}_\Phi + E R_0 \nabla^2 \tilde{Q} + \epsilon M \mu_d R_0 \frac{\partial^2 \tilde{A}_d}{\partial t \partial Z}\right) \tag{25b}$$

$$\epsilon M \left(\prod \quad \Gamma\right) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial Z} = M^{-2}\Gamma^2\left(\mu_r R_0 \frac{\partial \tilde{A}_\Phi}{\partial Z} + E R_0 \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial Z} + \Gamma\left(\mu_r R_0 \frac{\partial \tilde{A}_r}{\partial Z}\right.\right.$$

$$\left. + \epsilon M \mu_d R_0 \frac{\partial^2 \tilde{A}_d}{\partial t \partial Z}\right) \tag{25c}$$

算符 $\Gamma^2 \equiv \Gamma \quad \Gamma$

式(25)加上适当的水汽方程构成广义平衡模式, 完整地描述广义的平衡运动及其演变。其中独立参数有 $U, U_d, M, R_0, \mu_d, \mu_r, E$ 。普遍的前提是不等式(10)。在各种具体情况下可约减独立参数的数目并导出各种特殊的简化模式。

将式(4)与(25)比较, 右端最后一项的 $\frac{\partial^2 \zeta_g}{\partial t \partial Z}$ 已由 $\frac{1}{f_0}\frac{\partial^2 \tilde{A}_d}{\partial t \partial Z}$ 替换。虽然 3 个预报方程右端都含有此类强迫场的时间导数项, 但各强迫场(如前所述包括 Q 场)都是风场、温度场和水汽场的函数。在模式中它们一致作 '慢'变化, 因此这个模式方程组是闭合的, 并已不含有 IG 的模(modes)。

式(25b- c)表明, 无论对温度场(质量场)的变化还是旋转风场(全风场的主要分量)的变化而言, 按热成风关系等价的动量强迫因子(即含 A_r 的项)的贡献与热力强迫因子(含 A_Φ 和 Q 的项)的贡献的量级比为 M^2。$M^2 \propto \left(\frac{h}{L}\right)^2$。即这个量级比与扰动铅直尺度和水平尺度之比有关。这是随时调整适应的平衡变化的一个重要性质。在讨论 '相当正压切变线'的特殊情况(那里 $M^2 >> O(1)$)时[8]曾指出, 其中动量强迫因子对发展的贡献远大于强度相当的热力强迫因子的贡献。

5　讨　论

本文比较透彻地论述了在相当广泛的条件下(特别是其中可包括伴有强对流云群团的次天气尺度系统)大气自身抑制 IG 而维持相对平稳演变的机理; 拓广了大气平衡运动的概念; 给出了各种强迫场控制非地转运动的更广泛而具体的规律。由此导出的广义平衡模式则描述了平衡变化的物理性质。特别是揭示了系统结构与其动力学性质的关系。在不同的具体情况下可以导出一系列有实际意义的推论; 可用以推断现有的一些动力学诊断方法(包括发展诊断, 次级环流诊断和所谓 '非平衡场'诊断等)的适用条件, 存在问题和可能更佳的的替代方案。利用本文的有关结果还可以从动力学角度讨论各类误差和非平衡成分以及次网格物理参数化的精度等对次天气尺度原始方程数值模式预报的影响。作者将另文分别讨论这些问题。至于广义平衡模式本身的数值积分问题, 前面已指出模式方

程组是闭合的。但其展开的形式颇为复杂。例如每个方程都有不少含时间导数的项,意味着在每一步时间(数值)积分之前要(联立地)求解复杂的边值问题。在应用计算方面还有若干困难有待解决。这里只简略讨论一种可能比较方便的求解途径。

(1)文中为理论分析的方便使用了虚拟高度坐标系。数值积分时采用相应的 p 坐标方程组,则消除算子 Γ,降低阶数,展开项数有所减少,并用随纬度变化的科氏参数 f 代替 f_0。

(2)可以证明,初始旋转风场和高度场的平衡调整对这个模式没有意义,也不必要。相反地倒是需要对初始辐散风场作平衡调整。即利用式(23a)迭代更替辐散风分量。

(3)在每一个时间层上均利用式(23a)对 $\tilde{D}$(因而 $\tilde{w}$)进行一次平衡调整,代入式(24b–c)求取 ζ 和 $\frac{\partial \Phi}{\partial Z}$ 的增量。可以证明无须调整平流项中的风场,这样便足够近似地等价于对式(25b–c)积分。

(4)本模式主要特点之一是包含散度预报方程。但尺度分析(略)表明式(24a)对误差的承受能力极其脆弱,即使采用上述类似的方法,由式(23a)求幅散风场的变化也几乎没有意义,应直接对式(25a)求解。为了可以取齐次边界条件,把它转换成等价的铅直运动倾向方程。以下是 p 坐标 ω 倾向方程带因次的展开形式:

$$
\begin{aligned}
&\left[\sigma\nabla^{*2} + f(f+\zeta^*)\frac{\partial^2}{\partial p^2} - f\frac{\partial^2\zeta^*}{\partial p^2}\right]\frac{\partial \omega}{\partial t} = \\
&f\frac{\partial}{\partial p}\left(\boldsymbol{V}_3^*\cdot\nabla_3^*\frac{\partial \zeta^*}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{V}_r^*}{\partial t}\cdot\nabla^*\zeta^* + \frac{\partial^2 \boldsymbol{V}_r^*}{\partial p\,\partial t}\wedge\nabla^*\omega - \frac{\partial \omega}{\partial p}\frac{\partial \zeta^*}{\partial t}\right) \\
&+\nabla^{*2}\left(\boldsymbol{V}^*\cdot\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial t^*\,\partial p} + \frac{\partial \boldsymbol{V}_r^*}{\partial t^*}\cdot\nabla^*\frac{\partial \Phi^*}{\partial p} + \frac{R}{P c_p}\frac{\partial Q^*}{\partial t^*}\right) \\
&+f\frac{\partial^2 \boldsymbol{V}_d^*}{\partial p\,\partial t}\cdot\nabla^*\zeta^* + 2f\boldsymbol{K}\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{V}_r^*}{\partial x^*\,\partial p}\wedge\frac{\partial \boldsymbol{V}_d^*}{\partial x^*\,\partial t^*} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{V}_g^*}{\partial y^*\,\partial p}\wedge\frac{\partial^2 \boldsymbol{V}_d^*}{\partial y^*\,\partial t^*}\right) \qquad (26)
\end{aligned}
$$

式中已略去所有经尺度分析证明在各种情况下都足够小的项。所有直接含 ω 倾向的项已包含在左边椭圆线性算子中(实际上这是一个带强迫项的 Helmholtz 方程)。方程右边所含 $\frac{\partial \boldsymbol{V}_r^*}{\partial t^*}$ 和 $\frac{\partial \Phi^*}{\partial t^*}$ 因子均可足够精确地用前述方法由式(24b–c)得出。带有辐散风倾向的最后两项在一般情况下是可忽略的小项。只有在移速较快的强急流-锋情况下不能忽略。但恰好在这种场合矢量 $\frac{\partial \boldsymbol{V}_d^*}{\partial t^*}$ 的方向近似与急流–锋正交,并可证明在方程与 $\frac{\partial \omega}{\partial t^*}$ 存在定向的反馈关系。因此,只要不属于对称不稳定情况(本模式的前提排除各种非地转不稳定)可以用迭代法求解。

式(26)中还有一个含非绝热倾向 $\frac{\partial Q^*}{\partial t^*}$ 的项。建立非绝热倾向的物理-数学模型是一个全新的问题。现有各种非绝热方案(参数化)都不单纯以某种解析函数的形式出现,因此,非绝热倾向方案很难简捷地由任何一种非绝热参数化方案导出。这也是需要解决的难点之一。

参考文献

[1] McWilliams J C and Gent P R. Intermediate models of planetary circulations in the atmosphere and ocean. J At-

mos Sci, 1980, 37: 1657- 1678.

[2] Xu Qin. Semibalance model-connection between geostrophic- type and balanced- type intermediate models. J Atmos Sci, 1994, 51: 953- 970.

[3] Hoskins B J. The geostrophic momentum approximation and semi-geostrophic equations. J Atmos Sci, 1975, 29: 11- 37.

[4] 王晓林, 阎秉耀. 次天气尺度系统数值预报问题—— 急流和非地转热成风分析. 北方天气文集(2). 北京: 北京大学出版社, 1982. 103- 113.

[5] 胡伯威, 彭广. 暖切变型江淮梅雨锋的结构及其形成和维持的机理. 大气科学, 1996, 20: 463- 472.

[6] Orlanski L. A rational subdivision of scales for atmospheric processes. Bull Amer Meteor Soc, 1975, 56: 527-530.

[7] 曾庆存. 大气运动的特征参数和动力学方程. 气象学报, 1963, 33: 472- 483.

[8] 胡伯威. 夏季副热带相当正压切变线的动力性质. 大气科学, 1996, 20: 326- 336.

[9] 胡伯威. 副热带天气尺度系统短期演变的泛准地转机理. 大气科学, 1982, 6: 422- 431.

[10] Trenberth K E. On the interpretation of diagnostic quasi-geostrophic omega equation. Mon Wea Rev, 1978, 106: 131- 137.

[11] 陈秋士. 天气和次天气尺度系统的动力学. 北京: 科学出版社, 1987. 23—26

[12] 刘式适, 刘式达. 大气动力学. 北京: 北京大学出版社, 1991. 479—503

[13] Phillips N A. On the problem of initial data for the primitive eqiations. Tellus, 1960, 12: 121- 126.

THE AGEOSTROPHIC MOTION IN SUBSYNOPTIC SCALE SYSTEMS AND THE GENERALIZED BALANCE MODEL

Hu Bowei

(*Wuhan Heavy Rain Institute, Wuhan*, 430074; *LSSR, Peking Umiversity, Beijing*, 100871)

Abstract

The mechanism of the ageostrophic motion in the macroscopically quasistatic sub-synopticscale systems is studied. Under the prerequisite that the time scale of the whole motion is far larger than that of its inertia-gravitational component, the relations of both the rotation and divergence components of the ageostrophic motion to various kinds of forcing factors are revealed more concretely and detailly than that done before. And it is proved that the above said prerequisite of slow motion is ensured in all the common cases even in most of the familiar cases of strong systems. In addition to the known fact that the Rossby number in traditional form $R_0 \equiv (U/fL) \approx O(1)$ can be accepted in the strong quasi-two dimensional systems, here it is also proved that the horizontally small but vertically deep and thick systems containing strong convective cloud ensemble can just tolerate the especially strong diabatic heating and maintain their slow evolution. And correspondingly, the divergence motion can be only half an order smaller than the rotation motion in such systems. The overrestriction of the divergence motion in all the filtered models seen so far is breaked then.

In the condition of maintaining slow evolution, the amplitude of the ageostrophic high frequency flactuation can be always controled naturally and immediately to a negligible level. This means the consistency of the slow evolution with the quasi balance. According to cautious scalling, a "generalized balance model" is deduced out rationally and directly following the above mentioned study. Some first-order time derivative terms are contained in the equations. Although the strong diabatic heating is permisible and the restriction of divergence wind is relaxed, this model just can describe the pure slow evolution, in which the high frequency fluctuation is excluded, with the accuracy to extremmely high limit. And in this model, the divission of the motion into "primary flow" and "secondary flow" must be discarded, and a diagnostic equation of the divergence tendency is contained. Possibly this model is particularly helpful to deepen the understanding and diagnosis of the mechanism of the subsynoptic scale strong precipitation systems in the summer subtropic humid regions.

Key words: Ageostrophic metion, Diabatic heating, Generalized balance model.