全球气候长期振动的 Fokker-Planck 方程及其求解*

封国林　　曹鸿兴

（扬州大学农学院基础课部，扬州，225009）（中国气象科学研究院，北京，100081）

邵耀椿　曹永忠

（扬州大学农学院基础课部，扬州，225009）

摘　要

假定行星反照率为温度的平方关系，导出了零维随机动力气候模式。对相应的 Fokker-Planck 方程用矩阵连分法求解，得到了 10 万年，4 万年，2 万年气候周期的本征值和本征向量。数值计算表明，在随机噪声强度 D=1.95 时，10 万年气候振动具有最大的振幅，即 Milankovitch 理论无法解释的 10 万年周期。

关键词：零维气候模式，Fokker-Planck 方程，矩阵连分法。

1　引　言

用朗之万方程和 Fokker-Planck 方程(FPE)来描述随机涨落现象是目前十分有效的方法，一般地，设 ξ 为一随机变量，则朗之万方程的形式为：

$$\dot{\xi} = h(\xi,t) + g(\xi,t) \cdot \Gamma(t) \tag{1}$$

如果随机力 $\Gamma(t)$ 为白噪声，则有 $<\Gamma(t)>=0$；$<\Gamma(t)\ \Gamma(t')>=2D\delta(t-t')$，式中 D 表示噪声强度，与式(1)对应的 FPE 为：

$$\frac{\partial W(\xi,t)}{\partial t} = \mathrm{L}_{\mathrm{FP}} W(\xi,t) \tag{2}$$

$$\mathrm{L}_{\mathrm{FP}} = -\frac{\partial}{\partial \xi} D^{(1)}(\xi,t) + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} D^{(2)}(\xi,t) \tag{3}$$

其中 L_{FP} 为 FPE 算子，而 $D^{(1)}(\xi,t)$，$D^{(2)}(\xi,t)$ 分别为漂移系数和扩散系数：

$$D^{(1)}(\xi,t) = h(\xi,t) + g'(\xi,t)g(\xi,t)$$

$$D^{(2)}(\xi,t) = g^2(\xi,t)$$

目前，FPE 的应用已渗透到物理、气象、生命科学等各个领域，然而求解非线性 FPE 却不是个简单的问题。迄今为止，仍局限于少数情况下才能求得 FPE 的精确解析解。大多数情况下只能借鉴某些物理方法，针对具体问题对相应的 FPE 进行求解。目前常用的有限差

* 初稿时间：1995 年 1 月 23 日；修改稿时间：1995 年 9 月 4 日。
资助课题：国家自然科学基金和扬州大学农学院院青年基金部分共同资助。

分法可以求得数值解，但存在固有的求解困难，即在小扩散系数时，计算常发散且消耗机时多。

Risken 提出的矩阵连分法[1]可以实现有限差分难以实现的功能，但他仅导出了一个基本原理。封国林进一步完善了这一方法并编制了矩阵连分法程序①，且已在海气耦合机制模式中试用。文中进一步将该法运用到零维随机动力气候模式中，得到了较为满意的结果。

2 模式的建立

一般零维气候模式为：

$$c\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = R\downarrow - R\uparrow \tag{4}$$

其中 $R\downarrow$、$R\uparrow$ 分别表示为入射太阳辐射，净向外长波辐射。气候系统的状态变量 T 被解释为球面上的洋面平均温度，c 为地球表面的热容量，一般形式为，

$$c = \rho_w c_w h\alpha \tag{5}$$

式中 $\alpha=70.8\%$ 为海洋覆盖面积，h 为海洋固定深度，ρ_w 为水密度，c_w 为水比热。净入射太阳辐射为，

$$R\downarrow = \frac{1}{4}\mu I_0(1-a_p) \tag{6}$$

这里引入模式外参数 $\mu>0$ 是为了考虑太阳常数 I_0 的变化。根据文献[2]设行星反照率 a_p 为：

$$a_p = a - bT^2 \tag{7}$$

它体现了反照率 a_p—温度—极冰的正反馈机制，其中 a，b 为大于零的常数。

由 Stefen-Boltzman 定律得

$$R\uparrow = \varepsilon\sigma T^4 \tag{8}$$

将式(5)—(8)代入式(4)得到以下零维能量平衡方程，

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = f(T,x) = \frac{1}{c}\{-\varepsilon\sigma T^4 + \frac{1}{4}\mu I_0(1-a) + \frac{1}{4}\mu I_0 bT^2\} \tag{9}$$

为了近似考虑地球轨道三要素的周期影响，引入周期外力 $A\cos\omega t$，A 为振幅，若考虑主周期 ω 取为 0.0628/100ka，4 万年、2 万年也取相应的值；由于太阳并非一个恒定的热源，太阳黑子爆发，太阳表面的其它活动等因素都会随机地对太阳辐射带来影响；另一方面，地球内部存在着许多复杂的过程和扰动，例如火山爆发出的气溶胶将影响地气系统对太阳辐射能吸收和本身热量的散失，而海气相互作用都可以改变地球内部热量输运；以及温室气体也会产生影响，为了考虑这些随机因子，引入噪声 $\xi(t)$ 来近似地表示上述这些随机因子，则方程式(9)变成

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{c}\{-\varepsilon\sigma T^4 + \frac{1}{4}\mu I_0(1-a) + \frac{1}{4}\mu I_0 bT^2\} + A\cos\omega t + \xi(t) \tag{10}$$

为简化讨论，假定这个噪声是高斯白噪声，

---

① 封国林，解 Fokker-Planck 方程的矩阵连分法及其应用，北京师范大学物理系硕士论文，1994。

$$<\xi(t)>=0,\ <\xi(t)\ \xi(t')>=2D\delta(t-t') \tag{11}$$

其中，D 为噪声强度。方程(10)是要研究的零维非线性随机气候模式。即是一个朗之万方程。

3　稳态分析

解方程(10)是很困难的，将方程(10)写成对应的 FPE，

$$\frac{\partial W}{\partial t}=[-\frac{\partial}{\partial T}F+D\frac{\partial^2}{\partial T^2}+A\cos\omega t]W=L_{FP}W \tag{12}$$

$$L_{Fp}=-\frac{\partial}{\partial T}F+D\frac{\partial^2}{\partial T^2}+A\cos\omega t \tag{13}$$

其中，$F(T)=\frac{1}{c}\{-\varepsilon\sigma T^4+\frac{1}{4}\mu I_0(1-a)+\frac{1}{4}\mu I_0 bT^2\}$，$W$ 是 T,t,x 的概率密度分布，L_{FP}为 FPE 算子。温度 T 的期望值，即平均值可表达成[3]

$$<T(t)>=\int TW(T,t,x)\mathrm{d}T\mathrm{d}x \tag{14}$$

当 T→∞时，由自然边界条件可以确定式(12)的稳态分布；

$W_{st}=N\exp\{\frac{1}{D}\int^T f(T')dT'\}$，$N$ 为归一化条件，定义 FPE 势函数 $V(T)$为，

$$V=-\int F(T)\mathrm{d}T \tag{15}$$

积分(15)式，得

$$V(T)=\frac{1}{5}A_1T^5+A_2T+\frac{1}{3}A_3T^3 \tag{16}$$

其中，$A_1=-\frac{1}{c}\varepsilon\sigma$，$A_2=\frac{1}{4c}\mu I_0(1-\alpha)$，$A_3=\frac{1}{4c}\mu I_0 b$，则稳态分布，

$$W_{st}=N\exp\{-\frac{V(T)}{D}\} \tag{17}$$

从势函数 $V(T)$分析知，$V(T)$有 4 个极值点，分别为 $T_1=278.9K$，$T_2=273.8K$，$T_3=278.4K$，$T_4=286.0K$，经分别分析知 T_1,T_3 是不稳定的，T_2,T_4 是稳定的将分别解释成冰期和间冰期时地球的行星温度。仔细地考虑随机力和周期外力的存在，则式(12)就具备了发生随机共振的必要条件，当噪声强度恒大于周期频率，又恒小于势垒高度，即符合小信号绝热近似条件[4]，随机共振将出现非常明显的增强效应。从式(12)的本征解，系踪的期望值可以看到与噪声强度 D 的依赖关系。

4　矩阵连分法的本征解

由于式(12)的复杂性，目前只能从不同的角度作稳态分析，或用差分法进行计算，但不能求其本征值，并且耗机时多，甚至有时会出现发散不收敛情况，而用矩阵连分法求解不仅能从方程本身出发求出本征解，而且能克服差分法数值计算的困难。

根据文献[1]，将式(12)的 FPE 算子 L_{FE}可分成可逆 L_{rev}和不可逆 L_{ir}两部分，可以证明，L_{ir}经过适量变换后为厄米算符，这样可以象量子力学中一样引入 L_{ir}的本征函数和本征值，

$$\bar{L}_{xx}\Psi_n(x) = -n\Psi_n(x) \tag{18}$$

$$\Psi_n(x) = H_n(x/\sqrt{2}k)\exp(-x^2/4k^2)/(n!2^n\sqrt{2\pi}k)^{1/2} \tag{19}$$

几率分布函数 $W(T,x,t)$ 用波函数表示为：

$$W(T,x,t) = \Psi_0(x)\sum_{n=0}^{\infty}C_n(T,t)\Psi_n(x) \tag{20}$$

此时，式(12)经过适量变换和复杂运算，变成三角递推关系式，

$$\frac{\partial C_n}{\partial t} = -\sqrt{n}\hat{D}C_{n-1} - nC_n - \sqrt{n+1}DC_{n+1} \tag{21}$$

其中，$\hat{D}$，D 为 T，x 的算子形式。

假设系数 $C_n(T,t)$ 可表示为

$$C_n(T,t) = \sum_{n=0}^{\infty}C_n(t)\Psi_n(T) \tag{22}$$

$\Psi_n(T)$ 为完备的本征向量族，将式(22)代入式(21)得

$$\frac{\partial C_n}{\partial t} = \sum_{l=-L}^{L}A_n^l C_{n+l} \tag{23}$$

这里取 $L=5$ 级最相邻近似。C_n 写成向量形式，

$$C_n = (C_{Ln}, C_{Ln+1}, \cdots C_{Ln+L-1})^T \tag{24}$$

A_n^l 为由式(22)代入式(21)时推导得的系数，由于表达式冗长，这里不再给出。进一步将式(23)化成，

$$\frac{\partial C_n}{\partial t} = Q_n^- C_{n-1} + Q_n C_n + Q_n^+ C_{n+1} \tag{25}$$

此即向量形式的三角递推关系式，藉此可进行矩阵连分运算。式中 $Q_n^{\pm}$，Q_n 为 L×L 矩阵，

$$Q_n^{\pm} = (q_n^{\pm})^{pr} = A_{Ln+p-1}^{r-p\pm L} \qquad p,r = 1,2,\cdots L$$

$$Q_n = (q_n)^{pr} = A_{Ln+p-1}^{r-p}$$

进一步假设

$$C_n(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\hat{C}_n \tag{26}$$

将式(26)代入式(25)得

$$Q_n^-\hat{C}_{n-1} + (Q_n + \lambda I)\hat{C}_n + Q_n^+\hat{C}_{n+1} = 0 \tag{27}$$

式中 I 为单位矩阵，根据矩阵连分法运算，求得联系本征值 λ 和本征向量 $\hat{C}_n$ 的本征方程，

$$[Q_m + \lambda I] + \tilde{K}_m(-\lambda)\hat{C}_m = 0 \tag{28}$$

$$\hat{C}_n = \tilde{U}_{nm}(-\lambda)\hat{C}_m \tag{29}$$

其中，$\tilde{K}_m(-\lambda)$，$\tilde{U}_{nm}(-\lambda)$ 为复杂的连分式，与 Q_n^+，Q_n，Q_n^- 有关。于是几率 $W(T,x,t)$ 的分布用波函数表示为

$$W(T,x,t) = \Psi_0(x)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_n t}\hat{C}_m\Psi_m(x) \tag{30}$$

温度 T 的期望值，即平均值可表达成，

$$\bar{T} = \int TW(T,x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}T = \sum_{n=0}^{\infty}B_n\mathrm{e}^{-\lambda_n t} \tag{31}$$

式中 B_n 为归一化常数，即为本征值 λ 相应的波振幅。

运用矩阵连分法程序进行计算，结果表明 λ_n 为一复数，实部为一很小的负值，即随时

间衰减的指数解；虚部将随时间振荡。计算得到在不同 D 下的本征值 λ 和振幅 B_n，$n=1$，2，…，5，列在表 1。

表 1　不同 D 下的本征值的周期和振幅（λ_i 单位万年，A_i 单位度 C）

D	λ_1	A_1	λ_2	A_2	λ_3	A_3	λ_4	A_4	λ_5	A_5
1.0	10.30	1.43	3.93	0.07	2.03	0.03	1.02	10^{-4}	0.053	10^{-6}
1.50	10.30	2.97	3.95	0.12	2.04	0.13	1.03	10^{-4}	0.054	10^{-6}
1.65	10.31	4.87	3.96	0.18	2.04	0.15	1.04	*	0.052	*
1.80	10.33	8.87	3.97	0.60	2.06	0.27	1.05	*	0.050	*
1.90	10.31	10.21	3.98	1.03	2.07	0.50	1.06	*	0.050	*
1.95	10.30	11.83	3.98	1.03	2.07	0.51	1.06	*	0.050	*
2.00	10.20	9.87	3.97	0.90	2.01	0.30	1.07	*	0.051	*
2.10	10.29	6.93	3.92	0.70	1.97	0.20	1.02	*	0.050	*
2.50	10.20	2.37	3.91	0.30	1.96	0.10	0.98	*	0.049	*
3.00	10.19	1.09	3.91	0.21	1.90	0.08	0.91	*	0.047	*

说明，在数值计算过程中，着重考虑了地球轨道三要素对行星反照率的影响，并且 λ_4 后的振幅小于 10^{-3} 都用 * 来表示，这说明了仅 3 个分量起主导作用；λ 的实部很小，一般为 10^{-8} 量级，因此在表 1 中略去，仅列虚部。

$$<T>_{D=1.95}=11.83e^{-i\lambda_1 t}+1.03e^{-i\lambda_2 t}+0.5e^{-i\lambda_3 t} \tag{32}$$

图 1 是噪声强度 $D=1.95$ 下的气候曲线，这与文献[5]中对海洋生物化石中氧同位素 ^{18}O 和 ^{16}O 的成份比 $\delta^{18}O$ 的测得气候曲线趋向一致。

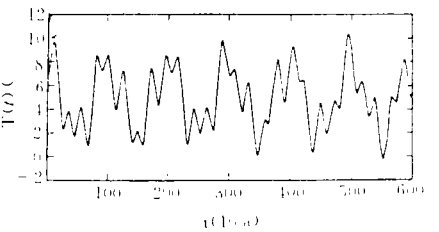


图 1　$D=1.95$ 下平均值<T>随时间变化曲线

从表 1 中还可以看到噪声强度 D 不影响本征值或很小，说明了气候周期变化是由内在因素确定的，D 只影响全球气温的期望值的振幅 A_i。在 $D=1.95$ 时，达到最大，主周期振幅变化幅度数值结果为 11.83，与观测值结果一致。图 2 中画出了 D 与 A_i 的关系曲线，从曲线中发现存在一个极值，大致在 $D=1.95$ 附近，这与曹鸿兴[3]等计算结果一致。

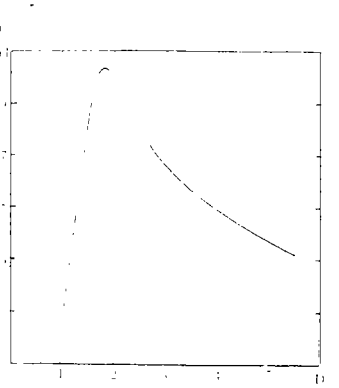


图 2　<T>的振幅 A_i 随噪声 D 的变化关系曲线

由式(32)知，10 万年、4 万年和 2 万年 3 周期外力对气候都有贡献，但是它们贡献的大小是不同的。从气温变化幅度来看，依次是 10 万年，4 万年和 2 万年，从表 1 中可以清楚地看到这一点，其中以 10 万年的贡献最大。事实上，就地球轨道变化对地球上接收到的太阳辐照而言，以 10 万年为周期的地球轨道偏心率的变化对太阳辐照能的影响的最小的，只有太阳常数的 10^{-3} 的数量级。因此无法从动力学角度来解释 10 万年周期的米氏效应。Benzi 等提出了随机共振理论，小的决定性外力可通过随机共振得到成 10 倍的放大，但 Benzi 等是人为设计了两个稳态后用数值计算得到的结果（见文献[3]）。本文中运用矩阵连分

法得到了零维模式FPE的解析解，且定量地计算了10万年、4万年、2万年同期的振幅。这是前人未曾涉猎的，所得结果对弄清10万年周期的成因将有所裨益。

参考文献

[1] Risken H. The Fokker-Planck Equation. Spring-verlag Berlin. 1984. 238－240.

[2] Klaus Fraedrich. Catastrophes and resilience of a zero-dimensional climates system with ice-albedo and greenhous feedback. Quart J Roy Meteor Soc. 1979. 105(9). 147－167.

[3] 曹鸿兴. 气候动力模式与模拟. 北京：气象出版社. 1994. 118—144.

[4] 胡岗. 非平衡系统的势函数理论. 物理学进展. 1994. 14(1)：1－36.

[5] Milankovitch M. Mathematische Klimalehre and Astronomalsche Theorie der Klimasken Wankungen. In: Handbuch der Klimatologie. I(A). W. Koeppen and R. Geiger (ed). Gebruder Borntraeger. Berlin. 1930. 1－176.

FOKKER-PLANCK EQUATION OF LONG-TERM GLOBAL CLIMATIC FLUCTUATION AND ITS SOLUTION

Feng Guolin

(Department of Basic Science, Yangzhou University, Yangzhou, 225009)

Cao Hongxing

(Chinese Academy of Meteorological Sciences, Beijing, 100081)

Sao Yaochun Cao Yongzhong

(Department of Basic Science, Yangzhou University, Yangzhou, 225001)

Abstract

Assuming the planetary albedo is equal to a temperature square, a zero-dimensional stochastic-dynamic climate model has been suggested. The appropriate Fokker-Planck equation is solved by use of the matrix continude-fraction method, eigen values and eigen vectors of 100 000a, 40 000a and 20 000a climatic periods are obtained. It is shown from the numerical computation that the climatic fluctuation of 100 000a has maximum amplitude when taking intensity of random noise $D = 1.95$, the fluctuation is not explained with the Milankovitch theory.

Key words: Zero-dimensional climate model, Fokker-Planck equation, Matrix continued-fraction method.