

线性与非线性对称不稳定的数值试验*

张颖 张铭

(中国气象局强风暴实验室, 北京, 100081)

摘要

设计了一个准二维非静力数值模式, 用该模式研究了对称不稳定的发展和演变特征。线性与非线性对称不稳定的数值试验结果表明: 线性与非线性对称环流的演变特征及其结构有很大差异。在基本状态是对称不稳定的情况下, 线性对称不稳定在其发展过程中始终维持着向冷区倾斜的对称环流, 而非线性对称不稳定在其发展初期与线性情况相同, 当扰动增长到一定程度时非线性平流项的作用不可忽略, 原来对称的环流则被破坏。

关键词: 数值试验, 对称不稳定, 非线性。

1 引言

对称不稳定理论是流体动力学的经典理论, 在气象学中已有多方面的应用, 早在1954年郭晓岚^[1]就讨论过行星环流的对称不稳定。Ooyama(1966)^[2]研究过台风中的发展型轴对称扰动。1970年代后 Hoskins(1974, 1977)^[3,4]、Emanuel(1979)^[5]和 Ogura^[6]等把对称不稳定理论用到中尺度扰动, 解释锋面雨带及飚线的启动。张可苏^[7]讨论了有界区域中的对称不稳定问题。这些工作主要研究了对称不稳定的产生条件、结构以及非绝热加热和粘性对其的影响, 是以线性理论为主的。1986年许秦^[8]运用能量方法研究了均匀和非均匀基态中的非线性对称不稳定。他指出, 对称扰动的初始增长可用线性理论作相当好的近似, 但线性理论不可能正确地描述对称环流的长时间演变。

本文设计了一个准两维的非线性非静力平衡的斜压数值模式, 把对称不稳定作为一个初值问题进行数值研究, 讨论环境场对对称不稳定发展和演变的影响以及扰动结构的演变特征。

2 数值模式

由于带状对流系统(如雨带和飚线等)的长度尺度比宽度的要大得多, 故可假设扰动量在 y 方向是均匀的, 研究对称不稳定的二维 Boussinesq 方程组为:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{\partial u'}{\partial z} - f v' + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad (1-1)$$

* 本文于1992年3月14日收到原稿, 1993年4月28日收到修改稿, 该文为国家自然科学基金资助的课题。

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + u' \frac{\partial v'}{\partial x} + w' \frac{\partial v'}{\partial z} + u' \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + w' \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + f u' = 0 \quad (1-2)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + u' \frac{\partial w'}{\partial x} + w' \frac{\partial w'}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\theta'}{\theta_0} g = 0 \quad (1-3)$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + u' \frac{\partial \theta'}{\partial x} + w' \frac{\partial \theta'}{\partial z} + u' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + w' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = 0 \quad (1-4)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (1-5)$$

其中 u', v', w' 分别表示 x, y, z 方向的扰动速度, θ_0 为位温的典型值, θ' 为扰动位温, p' 为扰动气压, $\bar{\theta}(x, z)$ 和 $\bar{v}(x, z)$ 分别表示基本状态的位温场和风场, 且它们之间满足热成风关系:

$$\frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} = f \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \quad (2)$$

f 为柯氏参数, 取为常数。为了使动量方程预报出的 u', w' 满足连续方程的约束, 引入了流函数 ψ :

$$u' = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w' = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3)$$

将式(3)代入式(1)消去 p' 后可得数值模式的控制方程组:

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + u' \frac{\partial \zeta'}{\partial x} + w' \frac{\partial \zeta'}{\partial z} + f \frac{\partial v'}{\partial z} - \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta'}{\partial x} = 0 \quad (4-1)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + u' \frac{\partial v'}{\partial x} + w' \frac{\partial v'}{\partial z} + F u' + w' \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = 0 \quad (4-2)$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + u' \frac{\partial \theta'}{\partial x} + w' \frac{\partial \theta'}{\partial z} + \frac{\theta_0}{g} S^2 u' + \frac{\theta_0}{g} N^2 w' = 0 \quad (4-3)$$

$$\zeta = \nabla^2 \psi \quad (4-4)$$

其中: $N^2 = \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}$, $S^2 = \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}$, $F = f + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}$, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

为使模式具有较高的水平和垂直分辨率, 模式在垂直方向等距分为 20 层, 水平方向网格距取为 5km。模式采用交错网格, 其变量配置如图 1 所示。

模式采用理想的初始场, 在所有的试验中初始的扰动位温场 θ' 和初始的 v' 场均取作零, 而初始扰动涡度场 ζ 则根据试验需要而定, 并在后面给出。为简单起见模式的上下边界均采用刚体边界条件, 水平侧边界采用周期边界条件。

模式中空间差分采用中央差格式, 时间差分采用前差迭代方案^[9]。为了节省模式的计算机时, 我们将分解算法引入到非静力平衡模式中, 将方程组的求解过程分为两个阶段: 波动过程和平流过程阶段。第一步计算波动过程, 积分时间步长取为 $\tau_1 = 30\text{s}$; 第二步计算平流过程, 积分步长取为 $\tau_2 = n\tau_1$ 。在本文中 n 取为 5。我们将分解算法与不分解算法的计算结果作了比较。结果表明, 在预报量的精度内, 分解算法与不分解算法的计算结果相同, 但前者可节省机时约 25%。

3 线性对称不稳定

在模式方程组(4)中若扰动充分小则可不考虑非线性平流项的影响,此时可将对称不稳定问题作为一个特征值问题来研究,并可得到对称不稳定的判据为:

$$Ri = \frac{(g/\theta_0)\partial\bar{\theta}/\partial z}{(\partial\bar{v}/\partial x)^2} < \frac{f^2}{F^2} \quad (6)$$

在无基本风场的水平切变时,对称不稳定发生的条件是 Richardson 数 $Ri < 1$ 。对称不稳定的结构特点是:永远以倾斜特征扰动形态出现,且倾角小于等熵面;对称不稳定的增长率依赖于其水平尺度。

本文则将对称不稳定作为一个初值问题进行数值研究。对于线性对称不稳定,作了以下实验。

3.1 试验 A: 中性层结下的线性对称不稳定

根据对称不稳定发生的条件,取 $N^2 = 0$, $\partial\bar{\theta}/\partial x = 2.0 \times 10^{-5} \text{K} \cdot \text{m}^{-1}$, $\partial\bar{v}/\partial x = 6.5 \times 10^{-3} \text{s}^{-1}$, 基态无水平切变即 $\partial\bar{v}/\partial x = 0$; 初始流函数场如图 2 所示。模式在水平方向取 21 个网格点,垂直范围为 2km,不考虑非线性平流项的作用,用方程组 4 进行数值积分。图 3 为平均扰动侧风(Cross-wind)动能 $\frac{1}{2}(u'^2 + w'^2)$ 随时间的演变图,该动能在 1.5h 前缓慢减弱,此后开始增长,大约在 2h 后呈指数增长,增长率近似为 $2.7 \times 10^{-4} \text{s}^{-1}$ 。

图 4a, b 分别给出了上述条件下模式积分 3h 和 15h 的流函数 ψ 场。3h 时与初始场相比,流型发生了很大变化,形成了向冷区倾斜的对称环流。该环流的结构是下沉支位于冷区,上升支位于暖区。以后环流进一步发展,其水平波长变短,倾斜率也减小。最后环流的

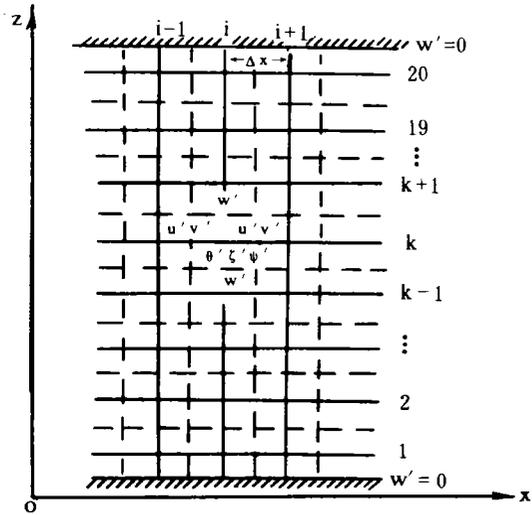


图 1 模式的垂直分层和变量配置

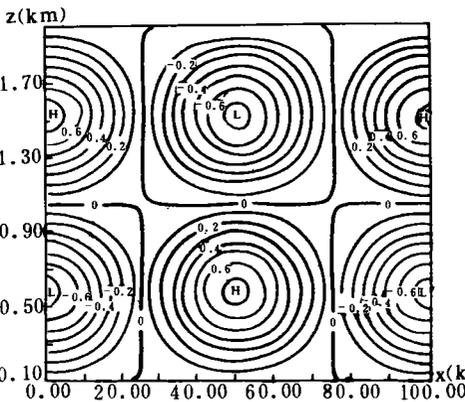


图 2 初始流函数 ψ 场

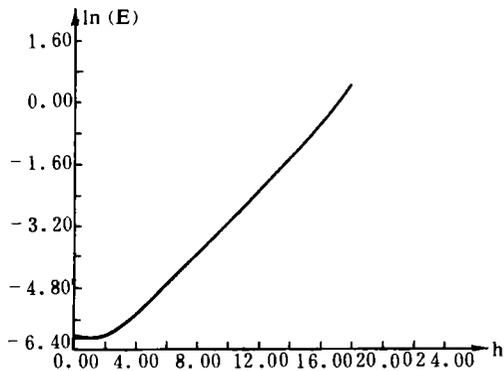


图 3 试验 A 平均侧风动能随时间的演变

水平波长减小到 3h 时的 1/3。由该试验可见,在满足 $Ri < 1$ 的条件下扰动产生不稳定的增长。由于初始的 ψ 场是由多个波长不同的波迭加而成,对中性层结而言,在水平尺度小于 100km 时,扰动的增长快慢与扰动的水平尺度密切相关,水平尺度较小的波增长较快,故 15h 的结果主要体现了增长较快的扰动的特点。

3.2 试验 B: 弱稳定层结下的线性对称不稳定

本试验是在上面试验的基础上,引入弱稳定层结 $N^2 = 1.1 \times 10^{-5} s^{-2}$,仍保持其它条件不变,此时 Ri 数等于 0.26。积分结果表明:3h 后亦形成了倾斜的对称环流(图 5a)。与试验 A 相比,该试验环流的倾斜率较大,而振幅的增长率则较小。随着环流增强,其倾斜率和水平波长几乎保持不变(图 5b, 27h 的 ψ 场)。因此在稳定层结条件下,当扰动水平尺度小于 100km 时扰动不稳定的增长率几乎是均匀的,这和张可苏应用特征值方法研究的结果^[7]相同。

4 非线性对称不稳定的演变

本节中用控制方程组 4(包含非线性平流项)进行数值积分,并做了以下两个数值试验。

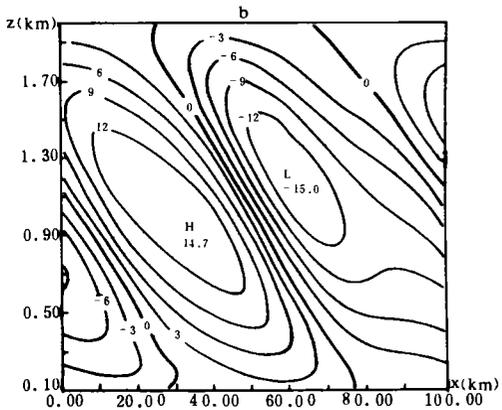
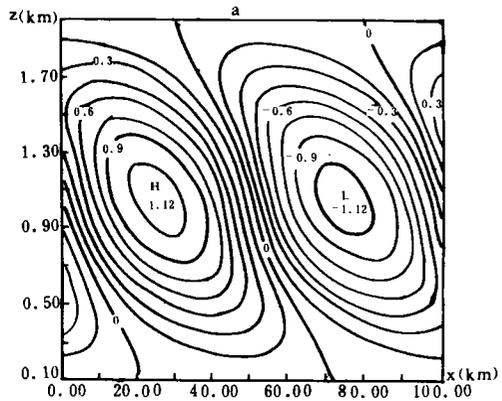
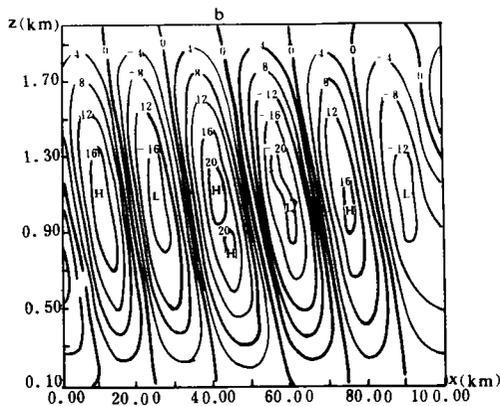
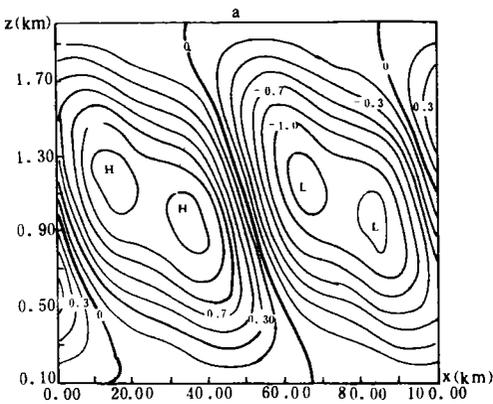


图 4 试验 A 的 ψ 场

(a. 3 h, 单位: $m^2 s^{-1}$; b. 15 h, 单位: $100 m^2 s^{-1}$)

图 5 试验 B 的 ψ 场

(a. 3 h, 单位: $m^2 s^{-1}$; b. 27 h, 单位: $100 m^2 s^{-1}$)

4.1 试验 C: 中性层结下的非线性对称不稳定

试验采用与试验 A 相同的基本状态和初始场。数值积分的结果表明: 扰动在其增长前期的结构与试验 A, 即线性情况下模拟的结果十分相似。在积分 12h 以前形成了结构对称的三个 ψ 为正、负值的环流圈, 但此后随着扰动的增长, 三个 ψ 为正值的环流圈逐渐减

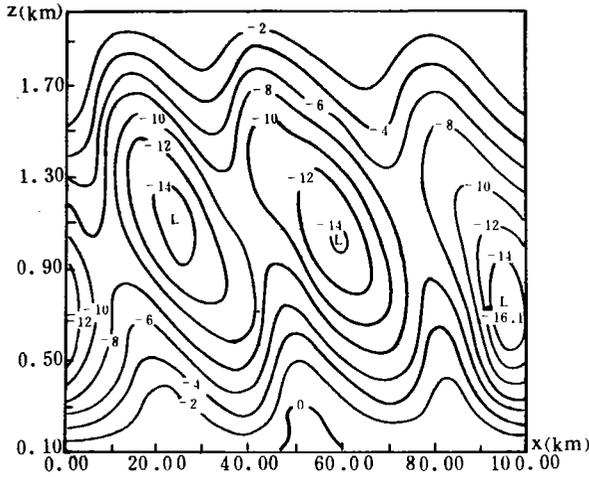


图 6 试验 C 15 h 的 ψ 场

(单位: $100\text{m}^2\text{s}^{-1}$)

弱, 范围减小; 而三个 ψ 为负值的环流圈却迅速增强, 范围增大, 到 15h 如图 6 所示三个 ψ 为负值的环流圈几乎占据了整个试验区域, 而三个 ψ 为正值的环流圈则消失了, 仅在高低层有一高脊。由此可见, 当初始扰动场是由多个波动迭加而成时, 当扰动增长到一定程度后, 波与波之间会发生非线性相互作用, 而这种相互作用的强弱显然与扰动的强度有关。非线性作用的结果导致了对称环流的变形。

4.2 试验 D: 弱稳定层结下的非线性对称不稳定

本试验的基本状态和初始场同试验 B。在 18h 前扰动具有线性对称不稳定的结构特点, ψ 原地增长。18h 后, 随着不稳定扰动的不断发展, ψ 为负值的环流圈的范围在不断扩大, 其中心强度也在增强; 而 ψ 为正值的环流圈的范围则在不断缩小, 其中心强度的增长速率也比 ψ 为负值的环流圈要小很多。这样原先的对称环流形式演变成以 ψ 为负值的环流圈为主的不对称的环流形式, 如图 7 所示。

由上述数值试验可以发现: 线性对称不稳定在其呈指数增长后, 其环流的对称结构维持不变, 而对非线性对称不稳定而言, 在其发展初期, 因扰动尚小其环流结构与线性情况下相同, 但当扰动增长到一定程度时, 由于非线性作用增强, 环流的结构就要发生变形, ψ 为负值的环流圈将迅速增强, 造成了环流的不对称, 并形成了窄而强的倾斜上升与下沉气流(见图 7)。很多观测表明, 在暴雨和强对流系统过境前后伴随有强烈的下沉与上升运动, 并可发生洪水、冰雹等灾害性天气, 看来这是与非线性对称不稳定密切有关的, 值得深入研究。

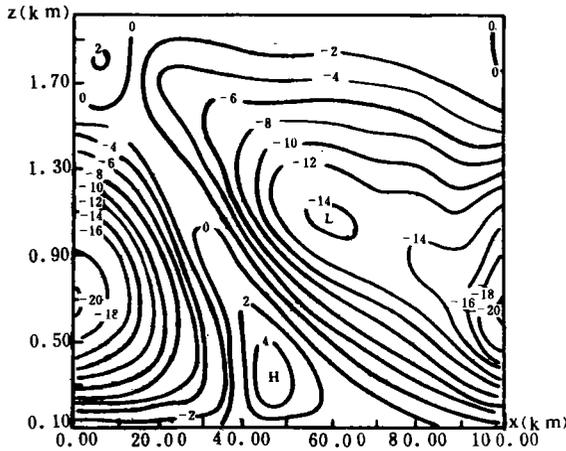


图7 试验D 27 h的 ψ 场
(单位: $100\text{m}^2\text{s}^{-1}$)

5 结 语

由于受各方面条件的限制,本文将实际大气中的三维问题简化成准二维问题来讨论。飑线及梅雨锋中的雨带等中尺度系统都大多呈带状结构,可以看成是准二维的。另外本文讨论的是绝热情况下的对称不稳定,且取 $\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = 0$,有关非绝热加热对对称不稳定影响的数值研究,将另文讨论。

参考文献

- [1] Kuo H L (郭晓岚). Symmetric disturbances in a thin layer of fluid subject to a horizontal temperature gradient and rotation. *J Meteor*, 1954, 11: 399—411.
- [2] Ooyama K. On the stability of baroclinic circular vortex; a sufficient criterion for instability. *J Atmos Sci*, 1966, 23: 43—53.
- [3] Hoskins B J. The role of potential vorticity in symmetric stability and instability. *Quart J Roy Met Soc*, 1974, 100: 480—482.
- [4] Bennetts, D A, and Hoskins B J. Conditional symmetric instability—a possible explanation for frontal rainbands. *Quart J Roy Met Soc*, 1977, 105: 945—962.
- [5] Emanuel K A. Inertial instability and mesoscale convective systems. Part I: Linear theory of inertial instability in rotating viscous fluids, *J Atmos Sci*, 1979, 36: 2425—2449.
- [6] Ogura Y. Possible triggering mechanisms for severe storms in SESAMEVE IV (9—10, May, 1979). *Bull Amer Met Soc*, 1982, 63: 503—515.
- [7] 张可苏. 斜压气流的中尺度稳定性, I: 对称不稳定. *气象学报*, 1988, 3: 258—266.
- [8] Xu, Q (许秦). Generalized energetics for linear and nonlinear symmetric instability. *J Atmos Sci*, 1986, 43: 972—984.
- [9] 张铭等. 潜模式中一种时间积分方案的理论分析和数值试验. *空军气象学院学报*, 1986, 2.

THE NUMERICAL RESEARCH OF SYMMETRIC INSTABILITY

Zhang Ying Zhang Ming

(Severe Storms Laboratory, S.M.A. Beijing, 100081)

Abstract

A non-linear and non-hydrostatic numerical model is designed to study the development and evolution of symmetric instability. The test results show that structure and evolution of non-linear symmetric instability are very different from linear. When the basic state is symmetric unstable, in the linear symmetric instability, slantly symmetric circulations are maintained throughout the growth of perturbations. However, in non-linear symmetric instability, it is very similar with the former in early time of perturbations growing. With growth of the perturbations, non-linear interaction of advection term happens and the symmetric circulations are destroyed.

Key words: Numerical experiment, Symmetric instability, Nonlinear.

《中国学术期刊文摘》出版消息

《中国学术期刊文摘》由中国科协主管,中国科协学会部主办,是全国唯一的综合性科技文摘刊物。内容包括数理科学和化学;天文学、地球科学;生物科学;医药卫生;农业科学;工业技术;交通运输;航空、航天;环境科学及交叉学科、边缘学科和新兴学科的最新研究成果与进展。特别重点摘录与国家自然科学基金、863计划、星火计划等接轨的研究课题,能快速有效地为我国科学研究的领导决策提供科技信息,以促进我国科学事业和国民经济更快更好地发展。该刊为季刊,1994年第四季度创刊,现征集订户,请向中国科协学会部期刊处索订单。

地址:三里河中国科学技术协会学会部期刊处《中国学术期刊文摘》编辑部
邮编:100863