

轨线不稳定与误差增长*

李志锦 纪立人

(中国科学院大气物理研究所, 北京, 100080)

摘 要

从一般的谱展开方程出发, 详细推导了误差增长方程。结果表明误差增长率主要由准确解的切线性方程所决定, 扰动非线性平流作用不产生方差意义下的误差增长, 而只起分配误差的作用。轨线不稳定是产生误差增长的根本原因。文中提出了计算轨线不稳定增长率的方法。这一方法也适合于时间演变状态不稳定问题的讨论, 对 Lorenz 系统的轨线不稳定计算表明了理论分析的正确及其意义。

关键词: 轨线, 不稳定, 误差增长率。

1 引言

大气科学中迄今为止没有给出初值中很小的误差会随着时间积分不断增长的清楚的物理机制。早在 1963 年 Lorenz^[1] 揭示了确定系统中存在非周期流即混沌吸引子, 非周期流的一个根本特征就是对初值的极其敏感性, 进而提出了可预报性概念^[2]。由于初始误差的不断增长, 经过一定时间以后, 初值中相差很小的两个状态会演变成相当于随机选取的两个大气状态的程度。到了这个时间, 预报就不再提供任何信息即不可预报。已有许多工作去确定实际大气模式的理论预报上限^[3-5]以及预报下限^[6]。一般认为理论上限为两周左右。由于误差增长同斜压不稳定增长率相一致。因此人们认为误差增长是由于斜压不稳定的存在^[7]。然而, 究竟不稳定过程以及非线性作用在误差增长中起什么样的作用并不十分清楚。丑纪范^[8]还提出了另外一类机制。由于外参数的改变, 大气状态的演变会越过一定的分叉点, 在这些分叉点, 演变对初值十分敏感。但对这一机制的物理本质也还缺乏了解。

随着可预报性问题研究的不断深入, 得到两个有意义的结论: 一是随着模式的改进可预报的理论上限是降低的^[9]; 二是对于某些特殊天气型具有更长的可预报时间, 如阻塞^[10]、正指数的 PNA 型^[11]。但如何解释这些结论, 还仍是有待讨论的问题。

本文详细分析了误差增长方程, 讨论了误差增长同轨线不稳定增长率的关系, 从而从动力学的角度阐明了误差增长的物理机制。

2 谱预报方程

* 1993年5月29日收到原稿, 1993年8月10日收到修改稿。本研究得到中国科学院 KY-85 项目资助。

根据丑纪范^[8,11], 可以将大尺度大气动力学方程写成十分简洁的形式:

$$B \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (N + L)\varphi = \xi \quad (1)$$

其中大气状态矢量 $\varphi = (V_\lambda, V_\theta, \omega, \Phi, T)^T$, 上标“T”表示转置, 这里

$$N = \begin{bmatrix} \Lambda & 2\Omega \cos\theta \frac{\text{ctg}\theta}{a} V_\lambda & 0 & \frac{1}{a \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} & 0 \\ -2\Omega \cos\theta \frac{\text{ctg}\theta}{a} V_\lambda & \Lambda & 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial p} & \frac{R}{p} \\ \frac{1}{a \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} & \frac{1}{a \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin\theta & \frac{\partial}{\partial p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R}{p} & 0 & R^2/C^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$L = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中 $A_{11} = -\mu_1 \nabla^2 V_\lambda - \frac{\partial}{\partial p} \gamma_2 \left(\frac{gp}{RT}\right)^2 \frac{\partial}{\partial p}$, $A_{22} = -\mu_1 \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial p} \gamma_1 \left(\frac{gp}{RT}\right)^2 \frac{\partial}{\partial p}$, $A_{55} = -\mu_2 \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial p} \gamma_2 \left(\frac{gp}{RT}\right)^2 \frac{\partial}{\partial p}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R^2/C^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

这里 $\bar{\Phi}$ 和 \bar{T} 是在等 P 面上的平均, Φ 和 T 则是其偏差值。其它符号都是通用的。

大气下边界取为 $P = 1000\text{hPa}$, 不考虑地形的作用, 当 $p = P$ 时,

$$V_\lambda = V_\theta = \omega = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial p} = 0 \quad (6)$$

大气上边界取为 $p = 0$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p^2 V_\theta = \lim_{p \rightarrow 0} p^2 V_\lambda = \lim_{p \rightarrow 0} \omega = \lim_{p \rightarrow 0} p^2 \frac{\partial T}{\partial p} = 0 \quad (7)$$

ζ 表示热源, 且 $\zeta = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \frac{R^2}{c^2} \frac{\varepsilon}{c_p})^T$.

定义内积

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{\Omega} \varphi_1^T \varphi_2 d\Omega \quad (8)$$

其中 Ω 表示全球大气范围, 不难证明

$$(\varphi_1, N\varphi_2) = -(\varphi_2, N\varphi_1) \quad (9)$$

$$(\varphi, N\varphi) = 0 \quad (10)$$

$$(\varphi, B\varphi) \geq 0, \quad (\varphi, L\varphi) \geq 0 \quad (11)$$

$$(\varphi_1, B\varphi_2) = (B\varphi_1, \varphi_2), \quad (\varphi_1, L\varphi_2) = (L\varphi_1, \varphi_2) \quad (12)$$

故 N 是反伴算子, L 和 B 是正定的自伴算子。

应该指出, 算子 N 中包括 φ , 是非线性算子, B 和 L 是线性算子, 且 B 是常数算子。

设在内积空间中有一标准正交完备基底 e_1, e_2, e_3, \dots , 满足球面边界条件和垂直方向的齐次边界条件。任一状态可以谱展开

$$\varphi = \sum_i \varphi_i e_i \quad (13)$$

并设

$$\int_{\Omega} e_i e_j d\Omega = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (14)$$

则

$$\varphi_i = \int_{\Omega} \varphi e_i d\Omega \quad (15)$$

φ_i 是谱系数矢量, 代入式(1)有

$$B \frac{d}{dt} (\sum_i \varphi_i e_i) + (N + L) \sum_i \varphi_i e_i = \sum_i \xi_i e_i \quad (16)$$

采用 Galerkin 截断近似, 可以得到

$$B \frac{d\varphi_i}{dt} + \Phi_i - \Psi_i = \xi_i \quad (17)$$

其中

$$\Phi_i = \langle \sum_j N\varphi_j e_j, e_i \rangle \quad (18)$$

$$\Psi_i = \langle \sum_j L\varphi_j e_j, e_i \rangle \quad (19)$$

这里

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{\Omega} f_1 f_2 d\Omega \quad (20)$$

经过推导,最后得到谱预报方程

$$B \frac{d\varphi_i}{dt} + \sum_j N_{ij} \varphi_j + \sum_j L_{ij} \varphi_j = \xi_i \quad (21)$$

其中矩阵

$$N_{ij} = (N_{mnij}) \quad (22)$$

$$L_{ij} = (L_{mnij}) \quad (23)$$

且

$$N_{mni} = \langle N_{mn} e_j, e_i \rangle \quad (24)$$

$$L_{mni} = \langle L_{mn} e_j, e_i \rangle \quad (25)$$

由 N 的反伴性质和 L 的自伴性质,易证

$$N_{mni} = -N_{nmi}, N_{mni} = N_{mji} \quad (26)$$

$$L_{mni} = L_{nmi}, L_{mni} = L_{mji} \quad (27)$$

需要指出, N_{mni} 同 φ 有关是非线性算子, L_{ij} 是线性算子,并且式(21)保持了连续性偏微分方程的算子特性。这正是 Galerkin 截断近似的优越之处。

3 轨线不稳定及其局部判据

如果谱方程截断的模式数为 I, J 为状态矢量的维数。那么所有谱分量就构成了一个 $I \times J$ 维相空间,模式大气在一定时刻 t 的状态在相空间中被指定为一个点。经过某一初值 $B\varphi_0$ 的系统状态的演变在相空中被描述为一条曲线,这一曲线就称之为轨线。

所谓轨线稳定性,定义为充分邻近轨线 C 的一个轨线,在时间演变过程中仍保持在某个邻近范围内。其实这个概念同 Lyapunof 意义下的稳定性相联系。Lyapunof 稳定性是从邻近点出发,于是稳定性意味着在时间进程中保持在某个邻域范围内。而轨道稳定性,并不限于单个点,而是考虑整个轨线 C 。轨道稳定性可以用数学语言陈述如下: C 是轨道稳定的条件为对于给定的 $\epsilon > 0$, 总存在 $\eta > 0$, 使得若 R 是 τ 时刻在 $\eta(\epsilon)$ 范围内别的轨道的一个代表点,则在 $t > \tau$ 时 R 保持在 ϵ 范围内。如果不存在这样的 η , 则 C 是不稳定的。我们还可以进一步定义轨道渐近稳定性, C 是轨道稳定的,此外当 $t \rightarrow \infty$ 时 R 和 C 的距离趋于零。

现在的问题是如何确定一个轨线的稳定性。处理这个问题有两种方法:一是局部法,二是整体判据。整体判据就是 Lyapunof 函数,对于复杂的大气模式难以寻找整体判据,一般采用局部判据法。

考虑轨线 $\bar{\varphi}(t)$ 的稳定性,有一邻近轨线

$$\varphi_i(t) = \bar{\varphi}(t) + \epsilon_i(t) \quad (28)$$

其中 $\epsilon_i(t)$ 是扰动量。如果 $t \rightarrow \infty$ 时 $\epsilon_i(t) \rightarrow 0$, 则为渐近稳定,将式(28)代入(27),作线性

化近似,则

$$B \frac{d\epsilon_i}{dt} + \sum_j \bar{N}_{ij} \epsilon_j + \sum_j N'_{ij} \bar{\varphi}_j + \sum_j L_{ij} \epsilon_j = \sum_j F_{ij} \epsilon_j \quad (29)$$

其中 F_{ij} 是雅可比系数阵,且 $F_{ij} = (\partial \xi_i / \partial \bar{\varphi}_j)$ 。

式(29)是系数随时间演变的线性常微分方程,求解这一方程并不容易。过去多需用直接时间积分来讨论不稳定问题,这里我们将引进新的计算稳定性判据的方法。

式(29)右乘 ϵ_i^T ,然后同式(29)的转置左乘 ϵ_i 的结果相加,并考虑 B 对称性以及 \bar{N}_{ij} 的反对称性,得到

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \sum_i (\epsilon_i^T B \epsilon_i) + \sum_i \sum_j (\epsilon_i^T N'_{ij} \bar{\varphi}_j + \bar{\varphi}_j^T N'_{ij} \epsilon_i) + 2 \sum_i \sum_j (\epsilon_i^T L_{ij} \epsilon_j) \\ & = \sum_i \sum_j (\epsilon_i^T F_{ij} \epsilon_j - \epsilon_i^T F_{ij}^T \epsilon_i) \end{aligned} \quad (30)$$

按照局部轨线稳定的定义,显然当 $\frac{d}{dt} \sum_i (\epsilon_i^T B \epsilon_i) < 0$ 时,轨线稳定, $\frac{d}{dt} (\epsilon_i^T B \epsilon_i) = 0$, 中性稳定,而当 $\frac{d}{dt} \sum_i (\epsilon_i^T B \epsilon_i) > 0$ 时,轨线不稳定。

设 $X = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_{I \times J})^T$, 由线性代数知识知

$$- \sum_i \sum_j \epsilon_i^T N'_{ij} \bar{\varphi}_j = X^T A X \quad (31)$$

$$- 2 \sum_i \sum_j \epsilon_i^T L_{ij} \epsilon_j = X^T D X \quad (32)$$

$$\sum_i \sum_j \epsilon_i^T F_{ij} \epsilon_j = X^T F X \quad (33)$$

则式(30)可以写成

$$\frac{d}{dt} \|X\|^2 = X^T (A + A^T + D + F + F^T) X \quad (34)$$

其中 $\|X\|^2 = \sum_i (\epsilon_i^T B \epsilon_i)$, 由 L_{ij} 对称性可知 D 也对称。记 $H = A + A^T + D + F + F^T$, 则 H 是 $I \times J$ 阶对称阵。

由线性代数知识可知, H 具有 $I \times J$ 个实特征值和相应的 $I \times J$ 个特征向量,这一组特征向量构成了相空间中的一组完备的正交基底,设特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{I \times J}$, 相应的特征向量为 $E_1, E_2, \dots, E_{I \times J}$ 。对任何 X 可以有展开式

$$X = \sum_{i=1}^{I \times J} X_i E_i \quad (35)$$

代入式(34),则可以推得

$$\frac{d}{dt} \|X\|^2 = \sum_{i=1}^{I \times J} \lambda_i X_i^2 \quad (36)$$

这里我们称 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, I \times J)$ 为准确解 $\bar{\varphi}(t)$ 的轨线不稳定特征指数。从式(36)可以得到局部轨线不稳定判据:

(1) 当特征指数均小于零,轨道稳定。

(2) 当至少有一个特征指数大于零, 则轨道不稳定。如果不稳定特征指数均大于零, 则称之为绝对不稳定, 否则为条件不稳定。

另外将由特征指数大于零的特征值所对应的特征矢量构成的子空间称为不稳定特征子空间。

由式(36)还可得到

$$\frac{d \| X \| ^2}{dt} \leq \lambda_{\max} \| X \| \quad (37)$$

其中 λ_{\max} 是 $\lambda_i (= 1, 2, \dots, I \times J)$ 中的最大特征值, 故

$$\| X \| \leq \| X_0 \| \exp\left(\int_{t_0}^t \frac{1}{2} \lambda_{\max} d\tau\right) \quad t_0 \leq t \quad (38)$$

上述推导过程既给出了轨线不稳定判据, 同时也提供了具体计算不稳定指数的方法。

下面我们将表明轨线不稳定决定了误差增长率。

4 误差增长方程

仍从谱方程(21)出发。设准确解的轨线为 $\bar{\varphi}$, 而具有误差的轨线为 $\varphi(t) = \bar{\varphi}(t) + \varepsilon_i(t)$, 其中 $\varepsilon_i(t)$ 表示误差, 其演变方程可以写成

$$B \frac{d\varepsilon_i}{dt} + \sum_j \bar{N}_{ij} \varepsilon_i + \sum_j N'_{ij} \bar{\varphi}_j + \sum_j N'_{ij} \varepsilon_i + \sum_j L_{ij} \varepsilon_i = \xi'_i + \sum_j F_{ij} \varepsilon_j \quad (39)$$

比较式(39)和(29), 误差方程中多了 $\sum_j N'_{ij} \varepsilon_j$ 项即误差非线性项, 另外还有外源非线性项 ξ'_i 。

类似于上节中的推导, 平方误差演变方程可以写成

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (\varepsilon_i^T B \varepsilon_i) + \sum_i \sum_j (\varepsilon_i^T N'_{ij} \bar{\varphi}_j + \bar{\varphi}_j^T N'_{ij} \varepsilon_i) + 2 \sum_i \sum_j (\varepsilon_i^T L_{ij} \varepsilon_j) \\ & = \sum_i \sum_j (\varepsilon_i^T F_{ij} \varepsilon_j + \varepsilon_j^T F_{ij}^T \varepsilon_i) + 2 \xi_i^T \varepsilon_i \end{aligned} \quad (40)$$

其中推导中利用了下式

$$\sum_i \sum_j (\varepsilon_i^T N'_{ij} \varepsilon_j + \varepsilon_j^T N'_{ij} \varepsilon_i) = 0 \quad (41)$$

式(41)表明误差的非线性作用项在误差方差的总体变化中没有任何贡献, 只起误差分配的作用。

比较式(40)和(30), 如果不计外源的非线性作用即 $\xi = 0$, 那么式(40)和(30)完全一样, 因此可以得到结论: 导致误差增长的根本原因是由于存在轨线不稳定, 而且这是一种线性不稳定。线性轨线不稳定增长率决定了误差的增长率。由此可以给出误差增长清晰的物理图象: 误差的变化由准确解的轨线不稳定和当时的误差矢量特征决定, 当误差矢量在不稳定特征子空间存在投影时, 误差增长。反之误差减小。当误差矢量同最大特征指数对应的特征矢量重合时, 增长率最大。由式(38)也可知道轨线较稳定时, 误差增长率就较小。

上述结论表明, 误差的增减随着准确解的轨线稳定性的改变而不断变化。这就解释了持续性天气型具有更长的可预报时间的原由。因持续性天气型具有更高的稳定性。对随

着模式分辨率的提高理论预报上限降低的事实也给出了很好的说明。因为大气不稳定增长率对模式的分辨率具有很强的依赖性。具有更高的分辨率,会使得计算得到的不稳定增长率更大。

5 Lorenz 系统的分析

Lorenz 系统已得到广泛研究。例如文献^[13]的评述。下面我们将计算在相空间中具有不同吸引子的情况下轨线不稳定性,进一步阐明误差增长同轨线不稳定的关系。

5.1 误差方程和轨线不稳定判据

如周知,Lorenz 系统为

$$\frac{dx}{dt} = \sigma y - \sigma x \quad (42)$$

$$\frac{dy}{dt} = -rx - y - xz \quad (43)$$

$$\frac{dz}{dt} = -bz + xy \quad (44)$$

令 $X = (x, y, z)^T$, 则

$$\frac{dX}{dt} = Lx + Nx \quad (45)$$

其中

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \quad (46)$$

N 是反对称非线性算子, L 是线性算子,容易得误差方程

$$\frac{dX^T X}{dt} = X^T(L + L^T + B + B^T)X \quad (47)$$

这里

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -z & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (48)$$

式(48)表明 Lorenz 系统的误差增长率由线性方程所决定。

按照前述的轨线稳定性讨论,当 $H = L + L^T + B + B^T$ 的特征值均小于零时轨线稳定,否则轨线不稳定。

5.2 存在平衡态吸引子时轨线稳定性

通过对存在平衡态吸引子的相空间中轨线的稳定性分析,我们将表明平衡态的稳定性质不同于轨线稳定性质。即使在平衡态吸引子的吸引域内,也会存在轨线不稳定,从而可以发生误差增长。

当相空间中存在多个平衡态吸引子时,轨线的稳定性质是十分复杂的。显然那些同宿

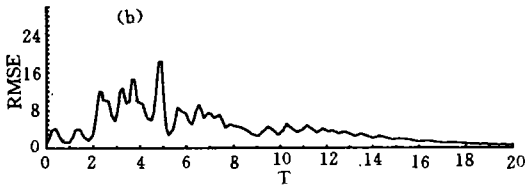
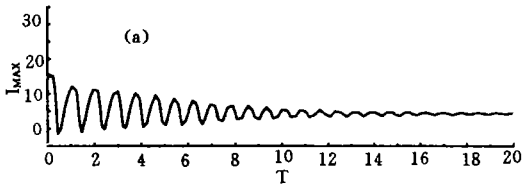


图1 $r=18.0$ 时,初值为(1.0,2.0,3.0)时
轨线最大不稳定指数(a)和误差演变(b)

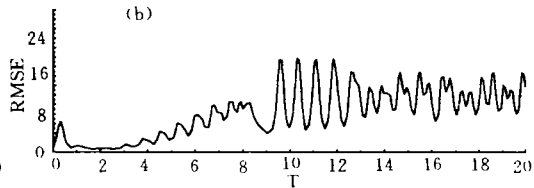
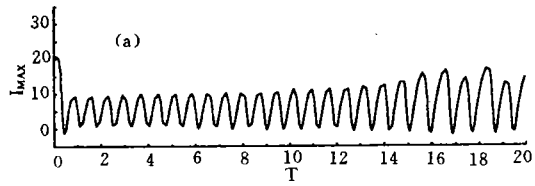


图2 $r=24.0$ 时,初值为(1.0,2.0,3.0)时
轨线最大不稳定指数(a)和误差演变(b)

或异宿轨线是不稳定的。这同丑纪范^[8]提出的误差增长机制相联系。作为轨线不稳,图1a给出的是 $r=18.0$ (其中 $\sigma=10.0, b=8/3$,下同)时初值为(1.0,2.0,3.0)的轨线最大不稳定指数的演变。此时相空间中存在两平衡态吸引子。可以看到轨线具有相当强的不稳定。图1b给出的是初值为(2.0,3.0,4.0)的轨线同上述轨线的均方误差。可以看到在 $t=2.0$ 到5.0时间单位的时间内,出现了很大的误差,最大误差达到其演变方差。这说明了轨线演变对初值具有时间局域敏感性,存在一定时间内的不可预报。我们还计算了 $r=24.0$ 时的轨线不稳定,此时仍存在两个平衡态吸引子。从图2a可以看到轨线变得更不稳定。图2b是同上例中取同样初值的误差演变,可以看到误差不断增长,当 $t=13.0$ 时间单位后,误差突然增加,在此以后的很长时期内维持大振幅的误差振荡,这表明存在相当长时期的不可预报。

5.3 混沌状态

当 $r=28.0$,Lorenz 系统处于混沌状态,并被称之为“标准 Lorenz 吸引子”。积分中轨线初值为(1.0,2.0,3.0),而误差轨线初值为(1.5,2.5,3.5)。正如预料的,轨线变得更加不稳定(图3a)。误差在8.0时间单位以后迅速加大(图3b)。值得注意的是,误差最大值对应着轨线具有持续强不稳定以及轨线演变剧烈的时候。

上述分析表明,轨线不稳定很好地刻划了混沌吸引子的细致结构,并充分表明不稳定强度同误差的增减密切相关。

6 结论与讨论

本文从原始方程出发,推导了误差增长谱方程,对误差增长方程的分析表明,误差增长率是由准确解的切线性方程决定。扰动非线性项不产生方差意义下的误差增长,而只起

误差分配作用。我们引进了轨线不稳定概念,将误差增长原因归结为轨线不稳定。我们推导证明了轨线不稳定增长率可以变成计算一个对称方阵的特征值和特征矢量,我们称之为轨线不稳定指数和轨线不稳定特征矢量。分析表明轨线不稳定指数越大即轨线越不稳定,误差矢量在由那些最大特征指数对应的特征矢量构成的子空间的指数越大,那么误差增长越快。

作为具体例子,计算了 Lorenz 系统的轨线不稳定。结果证实了我们的理论分析。同时表明即使在平衡态吸引子的吸引域内也会存在轨线不稳定,从而造成一定时间内的误差增长和不可预报。在混沌系统中,轨线不稳定指数是不断变化的,在相空间的某些部分可以具有很大的不稳定指数,而另外一些部分的稳定指数较小甚至轨线稳定。因此误差增长在相空间中不是均一的。

上述结论对于如何建立长期预报具有有益启示。预报误差的迅速增长是由于轨线不稳定。因此要突破瞬时场的可预报上限,必须对这种不稳定引起的误差增长作出有效的处理。一个很自然的想法,就是把长期数值预报模式建立在相对稳定的大气运动模态所组成的子空间上,而将具有快速不稳定增长率模态通过一定的近似方式表示出来。

最后需要指出,本文中并没有考虑模式误差的作用,这还有待研究。

参考文献

- [1] Lorenz E N. Deterministic nonperiodic flow. J Atmos Sci 1963, 20:130-141.
- [2] Lorenz E N. A study of the predictability of a 28-variable atmospheric model. Tellus, 1965, 17:321-333.
- [3] Charney J G et al. The feasibility of a global observation and analysis experiment. Bull Amer Meteorol Soc. 1966, 47:200-220.
- [4] Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations. I. The basic experiment. Mon Wea Rev 1963, 91:99-164.
- [5] Leith C E. Numerical simulation of the earth's atmosphere. Method in computational physics. 4, New York, Academic press, 1965, 1-28.
- [6] Lorenz E N. Atmospheric predictability experiments with a large numerical model. Tellus, 1982, 34:505-513.
- [7] Lorenz E N. Some aspects of atmospheric predictability, problems and prospects in long and medium range weather forecasting. ECMWF, 1981, 3-12.
- [8] 丑纪范. 长期数值天气预报. 北京:气象出版社. 1986.
- [9] Gilchrist A. Long rang forecasting. Quart J R Meteor. Soc. 1986, 112:567-592.

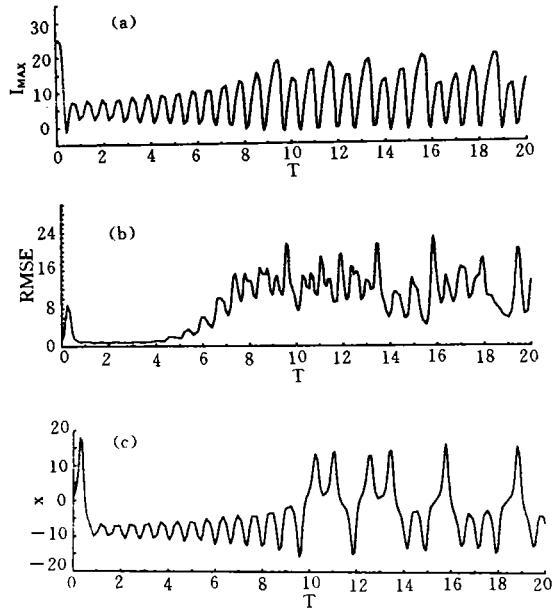


图3 $r=28.0$ 时混沌吸引子轨线变化。

(a. 最大不稳定指数, b. 误差方差,
c. x 分量时间演变)

- [10] Miyakoda K et al. One-month forecast experiment--without anomaly boundary forcings. *Mon Wea Rev.* 1986. 114: 2363—2401.
- [11] Palmer T N. Medium and extended range predictability and stability of the pacific/north America mode. *Quart J Roy meteor Soc.* 1988. 114: 691—713.
- [12] 丑纪范. 初始场作用的衰减与算子特性. *气象学报.* 1983, 41 (4): 385—392.
- [13] 丑纪范. *大气动力学新进展.* 兰州: 兰州大学出版社. 1990.

INSTABILITY OF TRAJECTORY AND ERROR GROWTH

Li Zhijin Ji Liren

(Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica, Beijing, 100080)

Abstract

The objects of this study are to propose the dynamical mechanism of the growth of the initial error in numerical weather prediction. The equations of error growth are obtained from the spectral primitive equation model. The results have shown that the error growth rate is determined by the tangent linear equations along the orbit of exact solutions. The nonlinear advective process of error itself has no effect on the error growth rate in the mean square error sense and only redistributes error over the spectral space. The trajectory instability is the essential cause to error growth. A method to compute the instability growth rate is developed, which could be used to study the instability of the time dependent state. Then trajectory instability of the Lorenz system is analyzed and the theoretical results are verified.

Key words: Trajectory, Instability, Error growth rate.