再论水平和垂直分辨率之间的协调*

廖洞贤　朱艳秋

（国家气象中心，北京，100081）

摘　要

在计算域面积为常数的约束下，给出了几种不同精度的平流方程和 ω 方程的“最优垂直网格距”，以及在极限情况下的“协调垂直网格距”的表达式。还讨论了在水平和垂直分辨率不协调时数值解对能量传播和计算稳定性的影响。

关键词：平流方程，ω 方程，协调的水平和垂直分辨率

1　引言

众所周知，提高水平分辨率对改善数值天气预报和数值模拟的质量有重要作用[1]，但有人（如 Weygand 和 Seaman，1988[2]）在中尺度数值模拟中把水平网格距从 80km 减小为 26.7km，而当垂直网格距未变时系统的位置误差却增大了。这说明在水平分辨和垂直分辨率之间有个协调问题。

早在 1982 年廖洞贤和陆维松曾提出过上述问题[3]，并在水平截断误差和垂直截断误差量级相等条件下给出了两种分辨率的关系。同年，Mesinger 在研究 σ-坐标中气压梯度力的计算时还曾给出过满足静力协调的水平和垂直差分的不等式[4]。以后，Pecnick 等（1989）认为，在改变水平分辨率的同时应改变垂直分变率，还针对锋生模拟，提出两种网格距之间的协调关系式[5]

$$\Delta z_{opt} = Sd \tag{1}$$

其中 Δz_{opt} 是最优垂直网格距，d 是水平网格距，S 是锋面坡度。同年，Lindzen 等还提出过两种协调关系式：一是针对准地转运动的；一是针对临近临界高度含有重力波的运动的[6]。1990 年陆维松详细研究了上述两种分辨率的协调性，还给出了由之而引起的计算稳定性判据[7]。但是，他的结果仍然是在水平截断误差和垂直截断误差量级相等的条件下得到的。1991 年 Person 等用数值试验证明：在提高水平分辨率而不提高垂直分辨率时会产生虚假的重力波[8]。

上述研究基本上可以分为两类：一是从减少截断误差出发；一是从物理出发。前者以廖洞贤和陆维松为代表，后者以 Lindzen 等为代表。这两类研究的结果并不相同，即便在同一类中所得结果也不尽同。如何把这两类研究结果统一起来并给出严格的证明，是很需要的。这就是本文的目的。

* 1992 年 12 月 5 日收到原稿，1993 年 2 月 3 日收到修改稿。曾得到 85-906-04-02 课题资助。

在本文中，我们将首先针对平流方程和 ω 方程，在计算域面积不变的约束下给出水平分辨率和垂直分辨率之间的最佳关系式，再在极限情况求得和(1)式相似的关系式，即后者是前者的一个特例。这样，也去掉了廖洞贤和陆维松过去在文献[3]和[7]中所假设的条件。最后，还讨论了两种分辨率的不协调对能量传播和计算稳定性的影响。

2 平流方程

2.1 平流方程

如所知，在大气中空气质点所具有的一些重要物理性质，如位温、位势涡度等，在一定条件下是守恒的。研究平流方程的水平和垂直分辨率的协调具有一定的重要性。出于研究的需要和方便，我们可以考虑如下形式的方程。

$$L(f)=\frac{\partial f}{\partial t}+u\frac{\partial f}{\partial x}+w\frac{\partial f}{\partial z}=0 \tag{2}$$

其中 f 代表某一气象要素或物理量；u、w 各是沿 x 和 z 方向的风速分量，都设为常数。

2.2 水平分辨率和垂直分辨率之间的最佳关系式

如果用中央差商代替空间微商而时间微商不变，则方程(2)成为

$$L_A(f)=\frac{\partial f}{\partial t}+u\bar{f}_x^x+w\bar{f}_z^z=0 \tag{3}$$

其中

$$\bar{f}^x=[f(x+d/2)+f(x-d/2)]/2$$

$$f_x=[f(x+d/2)-f(x-d/2)]/d$$

$\bar{f}^z$ 和 f_z 的表达式也类似。

利用 Taylor 级数，我们可以在计算域面积不变的约束下，使域内截断误差的平方和最小，以找出最优的 Δz 和 d 的关系式。这就相当于把问题化为使

$$F=\sum_{i,k}\left[u\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}d^2+w\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}\Delta z^2\right]_{i,k}^2+\mu(Nd\Delta z-A) \tag{4}$$

达到最小。其中 $N=N_xN_z$，$N_x=L_x/d$，$N_z=L_z/\Delta z$；A 是计算域面积；$i=x/d$，$k=z/\Delta z$；L_x 和 L_z 各是计算域在 x 和 z 方向的边长；μ 是 Lagrange 乘数；$\sum\limits_{i,k}$ 表示全计算域求和。

要求 F 极小，须 F 对 d，Δz 和 μ 的微商为零。于是，我们可以得到 Euler 方程，并从而得到

$$\left(\frac{\Delta z}{d}\right)^4=\left(\frac{u}{w}\right)^2\frac{\sum\limits_{i,k}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)^2}{\sum\limits_{i,k}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}\right)^2} \tag{5}$$

我们先看一个单波的情况。设

$$f=\hat{f}\sin(mx+nz) \tag{6}$$

代入式(5)，并用特征量 U、W 之比代替 u/w，则有

$$\Delta z_{opt(2)} = \sqrt{\frac{U}{W}}\left(\frac{m}{n}\right)^{3/2} d = \sqrt{\frac{U}{W}}\left(\frac{l_z}{l_x}\right)^{3/2} d \tag{7}$$

这里 l_z 和 l_x 各是 x 和 z 方向的波长。上式就是廖洞贤、陆维松在文献[3]和陆维松在文献[7]中曾得到过的 Δz_{opt} 和 d 的关系式，但推导的方法不同。在上式的推导中，已去掉了水平和垂直截断误差量级相等的假定了。为了和下面所推导的关系式相区别，我们不妨称式(7)为二阶差商的“最佳关系式”；相应的 Δz 记为 $z_{opt(2)}$ 。

用和上面同样的方法，我们还可以得到在水平和垂直方向均采用 4 阶差商的最佳的水平分辨率和垂直分辨率的最佳关系式：

$$\Delta z_{opt(4)} = \left(\frac{U}{W}\right)^{1/4}\left(\frac{l_z}{l_x}\right)^{5/4} d \tag{8}$$

其中 $\Delta z_{opt(4)}$ 表示 4 阶差商的最佳垂直网格距。

2.3　水平分辨率和垂直分辨率的协调关系式

2.3.1　任意阶差商的情形

根据 Schneider(1964)[9]，在精度为任意阶的情况，差商 $D_x f_{ik}$ 和 $D_z f_{ik}$ 各可以表示为

$$D_x f_{ik} = \sum_{m=-q}^{q} b_m f_{i+m,k} = \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{b}_{2q}\frac{\partial^{2q+1} f}{\partial x^{2q+1}} d^{2q} + O(d^{2q+2}) \tag{9}$$

和

$$D_z f_{ik} = \sum_{m=-q}^{q} b_m f_{i,k+m} = \frac{\partial f}{\partial z} + \hat{b}_2 q\frac{\partial^{2q+1} f}{\partial z^{2q+1}} \Delta z^{2q} + \mathrm{O}(\Delta z^{2q+2}) \tag{10}$$

其中 b_m 和 $\hat{b}_{2q}$ 都是适当的系数；q 是有限正整数。

用 $D_x f_{ik}$ 和 $D_z f_{ik}$ 分别代替 $\partial f/\partial x$ 和 $\partial f/\partial z$ 我们有

$$L_A(f) = L(f) + \hat{b}_{2q}\left[u\frac{\partial^{2q+1} f}{\partial x^{2q+1}} d^{2q} + w\frac{\partial^{2q+1} f}{\partial z^{2q+1}}\Delta z^{2q} + \mathrm{O}(d^{2q+2}, \Delta z^{2q+2})\right.$$

其中 $L_A(f)$ 表示 $L(f)$ 的差分形式。

仿照 2 阶差商的情形，我们可以构造如下的泛函数，即

$$F = \sum_{ik}\left\{u\frac{\partial^{2q+1} f}{\partial x^{2q+1}} d^{2q} + w\frac{\partial^{2q+1} f}{\partial z^{2q+1}}\Delta z^{2q}\right\}_{ik}^{2} + \mu(Nd\Delta z - A)$$

用和上面同样的方法，从 Euler 方程我们有

$$\sum_{ik} u^2\left(\frac{\partial^{2q+1} f}{\partial x^{2q+1}}\right)^2 d^{4q} = \sum_{ik} w^2\left(\frac{\partial^{2q+1} f}{\partial z^{2q+1}}\right)^2 \Delta z^{4q} \tag{11}$$

于是

$$\Delta z_{opt(q)} = \left(\frac{U}{W}\right)^{1/2q}\left(\frac{l_z}{l_x}\right)^{(2q+1)/2q} d \tag{12}$$

易见。当 q＝1 时，即 2 阶差商情形，上式化为式(7)；当 $q=2$ 时，即 4 阶差商情形，上式化为式(8)。

2.3.2 极限情形

在式(12)中如果 $q\to\infty$，则

$$\lim_{q\to\infty}\Delta z_{opt} = \frac{l_z}{l_x} d \tag{13}$$

易见，只要令 $l_z/l_x = s$，则上式相当于式(1)。这说明式(1) 是式(12) 在极限情况的一个特例。不过，式(1) 是在设锋区水平和垂直特征尺度与 d，Δz 成比例下得到的，没有经过数学推导。

下面为了讨论的方便，我们记

$$\Delta z_{con} = \lim_{q\to\infty} \Delta z_{opt}$$

Δz_{con} 不妨称之为‘协调垂直网格距’。这样，式(13) 可称为 Δz 和 d 的“协调关系式”。

(13)式还可以写为

$$\frac{l_z}{\Delta z_{con}} = \frac{l_x}{d} \tag{14}$$

这表明在一个波长范围内沿 x 和 z 方向的网格点数是相等的。

取 U、W、l_x、l_z、d 各为 10m/s、10^{-2}m/s、5×10^3km、5km 和 10^2km，我们可以得到附表。表中数值表明：Δz_{opt} 和 Δz_{con} 的值相同。不过，这和 U，W 等的取值有关；不同的取值，结果会有所不同，但一般应是比较接近的。

附表　Δz_{opt} 和 Δz_{con} 的值

Δz_{opt}	2	0.1(100)
(km)	4	0.1(100)
Δz_{con}(km)		0.1(100)

注：表中 2、4 各表示差商精度阶数，括号中的数表示 10km 高的模式大气的层数。

从另一方面，如果我们比较式(7)，(8)和(13)，我们可以看出：随着差商阶数的提高，U/W 对 Δz_{opt} 的影响越来越小，而 Δz_{opt} 主要取决于 l_z 和 l_x 的比。由于 U/W 总大于 1，其幂次的减小速度大于 l_z/l_x 幂次的减小速度，Δz_{con} 应当是 Δz_{opt} 在 $q > 2$ 时的下界。

3　ω 方程

3.1　ω 方程

为了了解 Δz 和 d 的协调关系式的适用范围，我们可以研究另一些类型的方程，如 ω 方程。

ω 方程是过滤模式中的一个重要方程，可以写作

$$L(\omega) = \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\mathcal{F}^2}{\sigma}\frac{\partial^2\omega}{\partial p^2} - G(x,p) = 0 \tag{15}$$

其中 $\omega = dp/dt$，是气压坐标中的垂直速度；$\mathcal{F}$ 是地转参数；$\sigma = -(\alpha\partial\theta/\partial p)/\theta$，是静力稳定度参数；$G$ 是已知函数。为了简便，设 $\mathcal{F}$ 和 σ 都是常数，且 $\sigma > 0$。

3.2　2 阶差商的情形

如空间微商用 2 阶差商代替，则其差分方程相当于

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\mathcal{F}^2}{\sigma}\frac{\partial^2\omega}{\partial p^2} - G(x,p) + \frac{1}{12}\left(\frac{\partial^4\omega}{\partial x^4}d^2 + \frac{\mathcal{F}^2}{\sigma}\frac{\partial^4\omega}{\partial p^4}\Delta p^2\right) + O(d^4,\Delta p^4) = 0 \tag{16}$$

于是，和前面类似，可以构造如下的泛函数：

$$F = \sum_{ik}\left\{\frac{\partial^4\omega}{\partial x^4}d^2 + \frac{\tilde{f}^2}{\sigma}\frac{\partial^4\omega}{\partial p^4}\Delta p^2\right\}^2 + \mu(Nd\Delta p - \tilde{A}) \tag{17}$$

用和前面类似的方法并用 ω 代替式(6) 中的 f，根据式(17)我们可得到

$$\Delta P_{opt(2)} = \frac{\sqrt{\sigma}}{\tilde{f}}\left(\frac{l_p}{l_x}\right)^2 d \tag{18}$$

其中 l_p 是垂直方向以气压的单位度量的波长。

3.3　任意阶的情形

为了研究 ω 方程在任意阶情形的 d 和 Δp 的协调关系，我们先构造 $\partial^2\omega/\partial x^2$ 的任意阶差商。令

$$\delta^2_{j\,x}\omega = \omega_{i+j,k} + 2\omega_{i-j,k} - 2\omega_{i\,k} \qquad (j = 1,2,\cdots s) \tag{19}$$

于是

$$\delta^2_{jx}\omega = j^2\omega^{(2)}_x d^2 + \frac{2}{4!}j^4\omega^{(4)}_x d^4 + \cdots + \frac{2}{(2j)!}j^{2j}\omega^{(2j)}_x d^{2j} + \cdots \tag{20}$$

其中 $\omega^{(2j)}_x$ 表示 ω 对 x 的 $2j$ 阶微商。

用参数 $a_1, a_2, \cdots a_s$ 分别乘 $\delta^2_x\omega, \delta^2_{2x}\omega, \cdots \delta^2_{s\,x}\omega$，相加，并令所有带 $\omega^{(2)}_x d^2$ 的项的系数之和为 1，其他带较高阶的项（直至带 $\omega^{(2s)}_x d^{2s}$ 的项）的系数之和为零，则 $\partial^2\omega/\partial x^2$ 的任意阶的差商总可以表示为

$$\begin{aligned} D^2_x\omega &= \frac{1}{d^2}\sum_{j=1}^{s} a_j\delta^2_{j\,x}\omega \\ &= \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + q_{2s+2}\omega^{(2s+2)}_x d^{2s} + O(d^{2s+2}) \end{aligned} \tag{21}$$

其中

$$q_{2s+2} = \frac{2}{(2S+2)!}\sum_{j=1}^{s} j^{(2s+2)} \cdot a_j \tag{22}$$

现在，我们就来证明。

容易看出，这时我们只要证明 a_j 不全为零就可以了。

按照我们对参数 a_j 的选取，则有

$$Aa = (1,0,0,\cdots 0)^{\mathrm{T}} \tag{23}$$

其中 $a = (a_1, a_2, \cdots a_s)^{\mathrm{T}}$，T 表示转置。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2^2 & 3^2 & \cdots & s^2 \\ \frac{2}{4!} & \frac{2}{4!}2^4 & \frac{2}{4!}3^4 & & \frac{2}{4!}s^4 \\ \frac{2}{6!} & \frac{2}{6!}2^6 & \frac{2}{6!}3^6 & & \frac{2}{6!}s^6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{2}{(2s)!} & \frac{2}{(2s)!}2^{2s} & \frac{2}{(2s)!}3^{2s} & \cdots & \frac{2}{(2s)!}s^{2s} \end{pmatrix}$$

$|A|$ 可以化作

$$|A| = \frac{2^{s-1}\cdot(2\cdot 3\cdots s)^2}{(4!6!\cdots 2s!)}|B|$$

其中

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2^2 & \cdots & s^2 \\ 1 & (2^2)^2 & \cdots & (s^2)^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & (2^2)^{s-1} & & (s^2)^{s-1} \end{vmatrix}$$

易见，$|B|$ 是典型的 Vandermonde 行列式，其值恒不为零；又因 $\sum_{j=1}^{s} a_j j^2 = 1$，故方程(24)有惟一解且全不为零。这就证明了我们的断言。

根据类似理由，$\partial^2\omega/\partial p^2$ 也可以表示为如式(21)类似的形式。

于是，和 ω-方程(15)相当的差分形式是

$$L_A(\omega) = D_x^2\omega + \frac{\mathcal{F}^2}{\sigma}D_p^2\omega - G(x,p) = 0 \tag{24}$$

其中

$$\begin{aligned} D_p^2\omega &= \frac{1}{\Delta p^2}\sum_{j=1}^{s} a_j\delta_{j\,p}^2\omega \\ &= \frac{\partial^2\omega}{\partial p^2} + q_{2s+2}\omega_p^{(2s+2)}\Delta p^{2s} + O(\Delta p^{2s+2}) \end{aligned} \tag{25}$$

在现在情况下，可以构造泛函数

$$\begin{aligned} F = &\sum_{ik}\left\{q_{2s+2}[\omega_x^{(2s+2)}d^{2s} + \frac{\mathcal{F}^2}{\sigma}\omega_p^{(2S+2)}\Delta p^{2s}]\right\}^2 \\ &+ \mu(Nd\Delta p - A) \end{aligned} \tag{26}$$

用和前面同样的方法，我们可以得到

$$\Delta P_{opt} = (\frac{\sigma}{\mathcal{F}^2})^{1/2s}(\frac{l_p}{l_x})^{(s+1)/s}d \tag{27}$$

当 s→∞时，有

$$\Delta P_{con} = \frac{l_p}{l_x}d \tag{28}$$

这个结果和前面讨论平流方程时得到的结果(13)是一样的。这说明这个结果的适用范围有一定的普遍性。

如 l_p、l_x、d 各取作 500hPa、10^4km、10^2km，按(28)式，$\Delta P_{con} \sim$ 5hPa，相当于大气取200层。

4 多波的情形

考虑在实际大气中 f 一般由多波叠加而成,即

$$f = \sum_{m,n} \sin(mx + nz) \tag{29}$$

如何从它出发来讨论 Δz_{opt} 和 Δz_{con} 仍是需要的。

把式(29)代入式(11),我们有

$$\Delta z_{opt} = \left(\frac{U}{W}\right)^{1/2q}\left(\frac{L_z}{L_x}\right)^{1+1/2q} \cdot \left\{\frac{\sum\limits_{i,k}\left[\sum\limits_{m,n}(-1)^q m_1^{2q+1}\cos\left(\frac{2\pi}{L_x}m_1 x + \frac{2\pi}{L_z}n_1 z\right)\right]^2}{\sum\limits_{i,k}\left[\sum\limits_{m,n}(-1)^q n_1^{2q+1}\cos\left(\frac{2\pi}{L_x}m_1 x + \frac{2\pi}{L_z}n_1 z\right)\right]^2}\right\}^{1/4q} d$$

其中 m_1, n_1 各是基本波数 $2\pi/L_x$ 和 $2\pi/L_z$ 的倍数,$m_1 = mL_x/2\pi, n_1 = nL_z/2\pi$ 。

如果 m_1, n_1 的求和范围相同,则有

$$\Delta z_{con} = \frac{L_z}{L_x} d \tag{30}$$

比较式(30)和式(13)可以看出:两式是类似的,但式(30)要求 L_x 和 L_z 是 f 在 x 和 z 方向的基本波长。

5 水平分辨率和垂直分辨率不协调对能量传播和计算稳定性的影响

5.1 能量传播

众所周知,满足平流方程(2)的波解是非频散的,其群速度和相速相同;而对相当的时、空差分方程,其波解是频散的,其群速度不等于相速。但是,对于微分-差分方程(3)来说,则还未见到类似结论,还有再研究的必要。令

$$f = \hat{f}\sin(mx + nz - \hat{\sigma}t) \tag{31}$$

并代入方程(3)的近似方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + w\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{u}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}d^2 + \frac{w}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}\Delta z^2 = 0 \tag{32}$$

我们可以得到

$$\hat{\sigma} = \left(1 - \frac{m^2}{6}d^2\right)mu + \left(1 - \frac{n^2}{6}\Delta z^2\right)nw \tag{33}$$

于是有

$$C_{gx} = \left(1 - \frac{m^2}{2}d^2\right)u \tag{34}$$

和

$$C_{gz} = \left(1 - \frac{n^2}{2}\Delta z^2\right)w \tag{35}$$

可以看出:上面的结果和在时、空差分时得到的结果相似,即波成为频散的,且群速度的两个分量都减小了。根据计算,对于水平和垂直波长各小于或等于 $4d$ 和 $4\Delta z$ 的波,其 C_{gx} 和 C_{gz} 的符号和准确解的相反。

现在,我们来讨论能量的传播方向。

为了讨论的方便,我们不妨称波长小于或等于 $4d$(或 $4\Delta z$) 的波为“不可分辨的波”;

而大于 $4d$（或 $4\Delta z$）的波为‘可分辨的波’。这样，我们就可以用前面得到的关系式来研究能量的传播方向了。考虑 Δz_{opt} 的表达式中含有参数 U/W，而其数值又和 Δz_{con} 接近，用 Δz_{con} 代替 Δz_{opt} 将比较方便。这样，从式(13)，式(35)成为

$$C_{gz} = (1 - \frac{m^2}{2}d^2)w$$

于是，C_{gx} 和 C_{gz} 将以同样的比例减小；在可分辨范围内数值解的能量传播方向将和准确解的一致。反之，如果不采用 Δz_{con}，则一般不会得到这个结果，即两者能量传播方向不一致。

5.2 计算稳定性

如水平和垂直分辨率同时考虑，陆维松曾得出 p-坐标系中的计算稳定性判据，即

$$\Delta t(\frac{|u|}{d} + \frac{|\omega|}{\Delta p}) \leqslant 1 \tag{36}$$

易见，如 d 取定，而时间步长按 Δp_{con} 来取，则取较大的 Δp，计算是稳定的。而取较小 Δp 的计算是不稳定的。

6 讨论和推广

上面针对平流方程 ω 方程进行了分析。现在的问题是：所得结果的适用范围怎样，是否可以推广？

对于第一个问题，关系式(7)和(18)在2阶差商情况下是适用的。但是，由于大气垂直下边界的限制，采用比2阶精度为高的差商在边界附近会遇到困难。不过，在水平有限域中采用4阶差商也有类似问题，但有些作者通过在边界给定一些计算条件或引用单向差后曾获得较好结果[10]。看来，在垂直方向作类似处理是允许的。这样，上面讨论的结果仍然有参考价值。

至于推广，则可以从两个方面进行：一是从物理方面，如把大尺度结果推广到中小尺度；一是从数学方面，如把从平流方程和 ω 方程得到的关系式推广到其他类型的偏微分方程。

我们知道，运动的特征长度和波长成正比。显然，将上面的方法应用到描写中小尺度的方程可以推得依赖于相应垂直和水平特征尺度的垂直和水平分辨率之间的“最佳”或“协调”关系式。

而且，上面的方法还可以应用到波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}) + f$$

这时，如用2阶差商代替空间微商后，用上面的方法仍然可以得到和式(18)相似的关系式。

参考文献

[1] Simmons A J. Some aspects of the design and performance of the global ECMWF spectral model. Workshop Proceedings. Techniques for horizontal descretization in NWP models. ECMWF 1987.

[2] Weygandt S S and Seaman N L. The relationship between forecast accuracy and grid resolution in simulations of

mesoscale features accompanying cyclogenesis. Reprints, Eight Conference on Numerical Weather Prediction, Baltimore, Amer Meteor Soc. 1988. 700—707.
[3] 廖洞贤，陆维松. 适于数值天气预报的分解平流格式. 气象科学, 1982, (1, 2):1—2.
[4] Mesinger F. On the convergence and error problems of the calculation of the pressure gradient force in sigma coordinate models. Geophys Astrophys Fluid Dynamics, 1982, 19:105—117.
[5] Pecnick M J and Keyser D. The effect of spatial resolution on the simulation of upper-tropospheric frontogenesis using a sigma-coordinate primitive-equation model. Meteor Atmos Phys 1989, 40:137—149.
[6] Lindzen R S and Fox-Rabinovitz M. Consistent vertical and horizontal resolution . Mon Wea Rev. 1989, 117:2575—2583.
[7] 陆维松. 垂直分辨率与水平分辨率协调问题的研究. 南京气象学院学报, 1990, 13(3):274—284.
[8] Persson P O G and Warner T T. Model generation of spurious gravity waves due to inconsistency of the vertical and horizontal resolution. Mon Wea Rev. 1991, 119:917—935.
[9] Schneider A Numer Math, 6 Band, 4 Heft, 1964, 261—354.
[10] Gerrity J P , Jr. McPherson R D and Polger P D. On the efficient reduction of truncation error in numerical weather prediction models . Mon Wea Rev. 1972, 100:637—643.

FURTHER STUDIES OF CONSISTENT HORIZONTAL AND VERTICAL RESOLUTION

Liao Dongxian   Zhu Yanqiu

(*National Meteorological Center, Beijing*, 100081)

Abstract

Subject to constant computational area, two expressions of the optimal vertical grid length with different accuracies and an expression of the consistent vertical grid length for the advection equation and ω-equation were presented in the case of a single wave. And the corresponding expressions of consistent vertical grid length in the multiwave case was derived. Finally, a discussion has been made on the impact of the inconsistency of horizontal and vertical resolution on energy propagation and computational stability of the numerical solution.

Key words: Advection equation; ω-equation; Consistent horizontal and vertical resolution.