第 53 卷 第 1 期　　气 象 学 报　　Vol. 53, No. 1
1995 年 2 月　　ACTA METEOROLOGICA SINICA　　Feb., 1995

二维场的高斯权重带通滤波分析*

何溪澄　　万齐林

（广州热带海洋气象研究所，广州，510080）

摘　要

首先对任意的二维气象要素场推导出其带通滤波的响应函数，并进一步引入了带通滤波的相对响应函数。基于相对响应函数的性质，得到了权重参数C_1、C_2的合适选择。通过实例研究，说明由结构函数曲线选取最大响应波长的方法。实例分析结果表明，带通滤波能对暴雨、强对流天气分析提供一定帮助。

关键词：带通滤波，响应函数，权重参数。

1　引　言

日常分析的气象量空间场中蕴含着多种尺度的信息，有效地进行尺度分离对人们加深对大气过程的了解是非常必要的。从 Doswell(1977)[1]和 Maddox(1980)[2]提出高斯权重带通滤波方法以来，滤波方法在中尺度气象研究和业务上得到广泛应用。徐元泰和丁一汇(1988)[3]指出进行带通滤波后的要素场与暴雨天气系统有更好的对应关系，高斯型的滤波器在不少方面比选择滤波器有更好的性能。Maddox(1981)[4]和党人庆(1984)[5]各自通过对美国和中国区域上空的中-α尺度云团的带通滤波分析，清楚地揭示了其中尺度环流结构。蔡则怡等人(1988)[6]则较成功地利用带通滤波制作华北地区飑线预报。

但上述工作是通过取简谐函数$f(x,y)=A\sin kx$来得到高斯权重带通滤波的响应函数，在实例分析时，权重函数中参数C_1、C_2或是根据经验选取，或是用迭代求出。前者有一定主观性，而用迭代方法不仅计算复杂，而且权重参数的获得除依赖于最大响应波长外，还依赖于另一个辅助波长[7]。

本文第 2 节将用一种新的方法，对一般性的二维气象要素场推导出其带通滤波的响应函数，并进一步引进了相对响应函数和无量纲权重参数C_1^*、C_2^*，导出C_1^*、C_2^*之间的约束关系，得到其合适选择。第 3 节通过实例分析，说明由结构函数曲线选取最大响应波长的方法。第 4 节为小结和讨论。

2　相对响应函数和参数的选取

设某气象要素场的测站值分布为f_s，则格点(x,y)的内插值$g(x,y)$可表示成：

* 1992 年 4 月 8 日收到原稿，1992 年 6 月 1 日收到修改稿。

$$g(x,y)=\frac{\Sigma W_s f_s}{\Sigma W_s}$$

或写成积分形式为：

$$g(x,y)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}w(x',y')\ f(x+x',y+y')\ \mathrm{d}x'\mathrm{d}y'}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}w(x',y')\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'} \tag{1}$$

其中权重函数取为高斯函数：

$$w(x',y')=\exp\left(\frac{-(x'^2+y'^2)}{4C}\right) \tag{2}$$

(x',y')是中心位于内插点(x,y)以格距为单位的笛卡尔坐标，C 是权重函数中的参数。设 $x_a=x+x'$，$y_a=y+y'$，则式(1)、(2)可重写成：

$$g(x,y)=\frac{1}{4\pi C}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{-[(x_a-x)^2+(y_a-y)^2]}{4C}\right)f(x_a,y_a)\ \mathrm{d}x_a\mathrm{d}y_a \tag{3}$$

其中式(1)中分母项的定积分已经求出。对式(3)作傅立叶变换，设 G、F 和 W 分别是 $g(x,y)$、$f(x,y)$和 $w(x,y)$的傅氏变换函数，根据傅立叶变换的卷积理论，有

$$G(k,l)=F(k,l)\ W(k,l)/4\pi C \tag{4}$$

根据波数域中响应函数的定义，及

$$W(k,l)=4\pi C e^{-(k^2+l^2)C}$$

可得：

$$R(k,l)=G(k,l)/F(k,l)=W(k,l)/4\pi C=e^{-(k^2+l^2)C} \tag{5}$$

故高斯型带通滤波的响应函数：

$$R_b(k,l)=(G_1(k,l)-G_2(k,l))/F(k,l)=e^{-(k^2+l^2)C_1}-e^{-(k^2+l^2)C_2} \tag{6}$$

若设二维波长 $\lambda=2\pi/\sqrt{k^2+l^2}$，则式(6)又可写成

$$R_b(\lambda)=e^{-4\pi^2C_1/\lambda^2}-e^{-4\pi^2C_2/\lambda^2} \tag{7}$$

响应函数 R_b 为实数，表明它只改变波的振幅，不改变波的位相。

由于带通滤波的目的是相对地保留有意义波段的振幅，故真正有意义的不是响应函数的绝对值大小，而是响应函数相对值大小随波长的分布。

定义带通滤波的相对响应函数为：

$$\begin{aligned}R_b^*&=(e^{-4\pi^2C_1/\lambda^2}-e^{-4\pi^2C_2/\lambda^2})/(e^{-4\pi^2C_1/\lambda_0^2}-e^{-4\pi^2C_2/\lambda_0^2})\\&=(e^{-4\pi^2C_1^*/\lambda^{*2}}-e^{-4\pi^2C_2^*/\lambda^{*2}})/(e^{-4\pi^2C_1^*}-e^{-4\pi^2C_2^*})\end{aligned} \tag{8}$$

其中 λ_0是最大响应波长，$\lambda^*=\lambda/\lambda_0$是无量纲波长，$C^*=C/\lambda_0^2$是无量纲参数。

由式(8)，若 $\lambda=\lambda_0$为最大响应波长，则需满足

$$\left.\frac{\partial R_b^*(\lambda^*)}{\partial\lambda^*}\right|_{\lambda^*=1}=0$$

或

$$4\pi^2C_1^*-\ln C_1^*=4\pi^2C_2^*-\ln C_2^* \tag{9}$$

不妨先定性讨论一下满足式(9)的 C_1^*、C_2^*的取值范围。设 $y(x)=(4\pi^2-\ln)x$，不难看

出，当 $x=C_0=(4\pi^2)^{-1}$ 时，$y(x)$ 取极小值。当 x 取值离开 C_0 时，y 值迅速增加。另一方面，式(7)要求 $C_1^*<C_2^*$，故 C_1^*、C_2^* 的取值范围为 $0<C_1^*<0.02533$，$C_2^*>0.02533$。

图1给出了满足式(9)的 C_1^*、C_2^* 间的关系曲线。可以看出，有无穷多组(C_1^*，C_2^*)满足式(9)。还可看出，C_1^* 与 C_2^* 近似成反比。

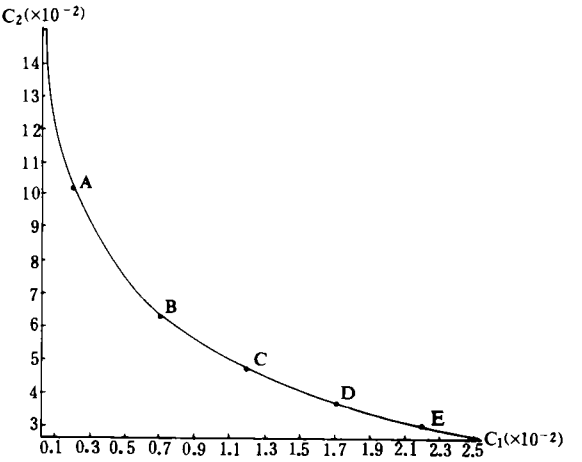


图1 满足最大响应波长的参数 C_1^*、C_2^* 之间的函数关系

图2是依据图1中曲线上有代表性的5个点绘出的相对响应函数 R_b^* 随无量纲波长 λ^* 的分布。曲线A、B、C、D和E分别对应系数(C_1^*，C_2^*)为(0.002，0.101)、(0.007，0.062)、(0.012，0.046)、(0.017，0.036)和(0.022，0.0285)。为便于短波分量 R_b^* 的分辨，图2中的横坐标 λ^* 采用了双间隔，即 $\lambda^*<1$ 的短波部分间隔为0.1，而 $\lambda^*>1$ 的长波部分的间隔为1.0。从图2可见，5组曲线在 $\lambda=\lambda_0$ 处的相对响应值均为1.0，曲线形状都较相似。若定义相对响应值大于0.5的无量纲波段为响应的半宽度，可见半宽度由曲线A到曲线E逐渐减小，并渐趋于一个极限值。

事实上，由图1可见，当 $C_1^*\to C_0$ 时，$C_1^*\to C_0$，故此时式(8)可表示成：

$$\lim_{C_1^*\to C_0} R_b^*(\lambda)=\frac{e^{-4\pi^2C_1^*/\lambda^{*2}}-e^{-4\pi^2(C_1^*+\varepsilon)/\lambda^{*2}}}{e^{-4\pi^2C_1^*}-e^{-4\pi^2(C_1^*+\varepsilon)}}=\frac{e^{-4\pi^2C_1^*/\lambda^{*2}}(1-e^{-4\pi^2\varepsilon/\lambda^{*2}})}{e^{-4\pi^2C_1^*}(1-e^{-4\pi^2\varepsilon})}$$

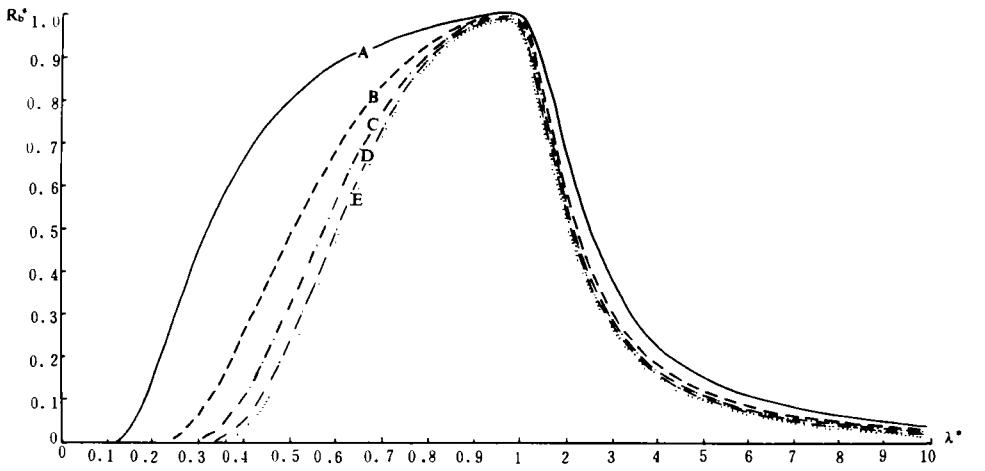


图2 相对响应函数 R_b^* 随无量纲波长 λ^* 的分布

(图中的字母分别对应于权重参数取图1中相应点的值)

由于 ϵ 是一小量，故幂级数展开，有

$$\lim_{C_1^* \to C_0} R_b^*(\lambda) = \lambda^{*-2} e^{-4\pi^2 C_0 (1-\lambda^{*-2})} \tag{10}$$

式(10)右端表示的曲线即是图2所表示的曲线簇的极限曲线。

由于较小的半宽度是带通滤波所要求的，可认为曲线 E 对应的无量纲系数 $C_1^* = 0.022$、$C_2^* = 0.0285$ 是所有 $\{C_1^*, C_2^*\}$ 中较合适的，它对应的半宽度约为0.61—2.08。

从图2还可看出相对响应函数在长、短波方向的不对称性。在长波方向的响应曲线当 $\lambda^* < 4$ 时下降得较快，而当 $\lambda^* > 4$ 时下降得较慢。在短波方向的响应曲线则相反，在 $\lambda^* > 0.7$ 时下降得较慢，在 $\lambda^* < 0.7$ 时下降得较快。事实上，从式(8)也可看出，当 $\lambda^* \ll 1$ 时，$R_b^*(\lambda^*) \propto e^{-\alpha \lambda^{*-2}}$，$\alpha = -4\pi^2 C_1^*$ 为常数；当 $\lambda^* \gg 1$ 时，$R_b^*(\lambda^*) \propto \lambda^{*-2}$，或者说，相对响应函数 R_b^* 值大小在短波方向呈指数下降，而在长波方向随2次方幂下降。

3　实例分析

1991年5月6—7日，受锋面、低槽影响，广东、广西两省(区)部分地区发生了暴雨和强对流天气。这里将以5月6日12时200hPa 的流场为例，说明带通滤波方法的应用。

图3显示的是5月6日12时的200hPa 风场，1°×1°的格点值是用常规探空资料加少量欧洲中心格点资料用逐步订正法求出，区域范围是20°×15°。由图可见，中国南方地区处在一个超长波脊区，除风速由南向北增加和流线由西向东略辐散开外，从整个场看不出明显的闭合环流系统。在这种情形下进行适当的带通滤波将有可能揭示被背景环流所掩盖的天气尺度系统。

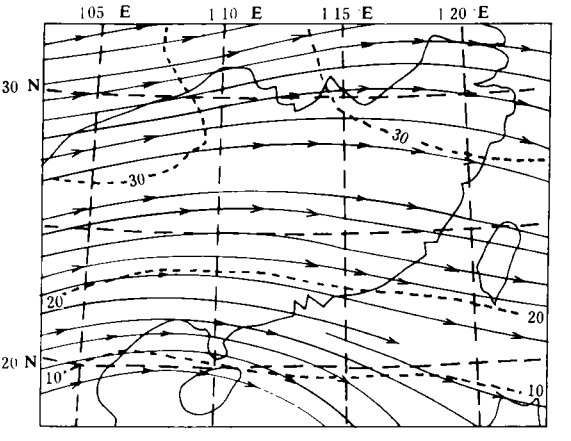


图3　1991年5月6日12时200hPa 流场(实线)和等风速线(虚线)

由第2节的讨论知，带通滤波的响应特性可由最大响应波长唯一确定。为了获得最大响应波长，可以借鉴 Moddox[2] 求结构函数的做法。

函数 $f(x)$ 的结构函数定义为：

$$\mathscr{D}(x) = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} [f(x') - f(x'+x)]^2 \, \mathrm{d}x' \tag{11}$$

若取 $f(x) = A\sin kx$，$\lambda = 2\pi/k$，则有

$$\mathscr{D}(x) = A^2(1-\cos kx) \tag{12}$$

式(12)表明当 $x = \lambda/2$ 时，$\mathscr{D}$ 取极大值。

图4是5月6日12时200hPa 要素分布的结构函数。其中横坐标 x 表示的是以纬距为单位的距离。图上的 a 曲线是高度场，b，c 曲线分别是 u，v 场，为便于三条曲线的比较，图中

的 Y 轴取为 $\mathscr{D}(x)/\mathrm{Max}(\mathscr{D}(x))$。

从图4中的结构函数曲线分布上可以看出该场的一个特征半波长是14个纬距。图5即是取最大响应波长为28个纬距时的带通滤波流场。

图5中波纹线描绘的是同时刻卫星红外云图上白亮云团的轮廓。由图可见，一个反气旋环流控制着中国南方大部分地区，其中心位于109°E、26°N，两块白亮云团分别位于其西北侧和西南侧。这个反气旋环流在7日00时的带通滤波图上(图略)同样很清楚，但中心东移到114°E、26°N。

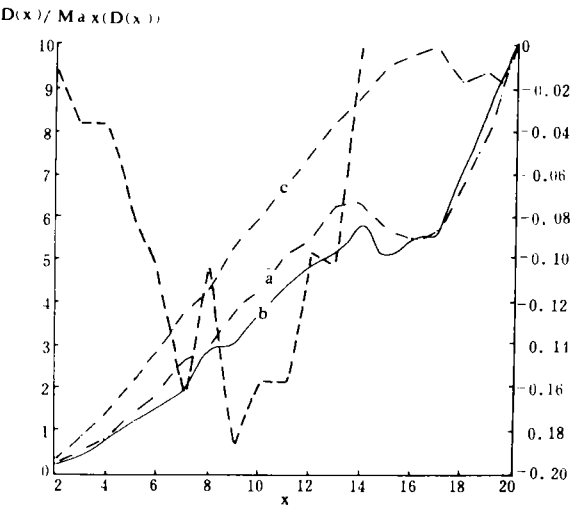


图4 1991年5月6日12时200hPa要素场的结构函数
(a 曲线是高度场，b、c 曲线是 u、v 场，虚线表示的是 u 场的偏差结构函数)

图5中的波长是28个纬距，相当于3000km，属于大尺度波段，图3中是否还含有中尺度波呢？仔细检查图4可以发现 b 曲线除了在14纬距处有明显峰值外，在8纬距附近也有一个弱峰值，为了进一步证实这一点，定义偏差结构函数：

$$\delta\mathscr{D}(x)=\frac{\Delta(x)}{\mathscr{D}(\lambda_0/2)}-\frac{1-\cos(2\pi x/\lambda_0)}{2} \tag{13}$$

上式右端第二项表明的是波长为 λ_0 的大尺度波对结构函数的贡献。

图4中虚线给出的即是 $\delta\mathscr{D}(x)$ 随 x 的分布，可见8纬距处的峰值很突出。

图6是最大响应波长取16纬距时的带通滤波流场，卫星云图上白亮云团的外轮廓仍以波纹线表示。与图5不同的是，该图上出现了一对气旋、反气旋耦，其中心分别位于107.5°E，31.5°N 和107.5°E，23°N。两中心之间的距离约为8个纬距，正是最大响应波长的一半，这也表明了该中-α 尺度波是存在的。

4 小结和讨论

本文研究了高斯权重带通滤波的响应函数和参数 C_1、C_2 的选取，给出了滤波方法在实际天气过程中的应用，主要结论如下：

(1)由函数 $f(x)=A\sin kx$ 推导出的高斯权重带通滤波响应函数 $R_b=e^{-k^2C_1}-e^{-k^2C_2}$，对任意的二维函数都适合，这时 k 应理解为二维波数矢。

(2)带通滤波的相对响应函数比响应函数本身更具有物理意义。相对响应函数定义为 $R_b^*=R_b(\lambda)/R_b(\lambda_0)$，$\lambda_0$ 为最大响应波长。

(3)无量纲权重参数 C_1^*、C_2^* 之间有如式(9)所示的约束关系。不同(C_1^*，C_2^*)值对应的相

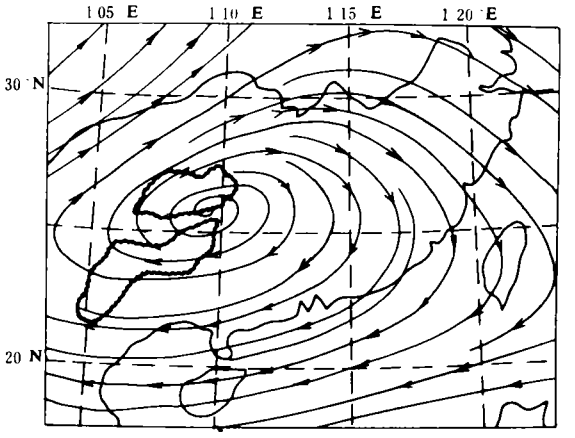


图5　图3所示风场当最大响应波长为28个纬距时的带通滤波场，波纹线描绘的是同时刻红外云图上白亮云团的轮廓

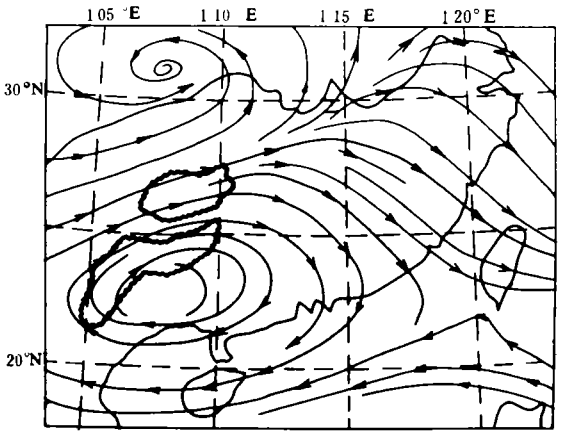


图6　同图5，但最大响应波长为16个纬距

对响应函数曲线形状相似，但响应半宽度随 C_2^* 减小而变窄，并趋于一个级限值。图2表明，选取 E 曲线对应的无量纲参数 $C_1^*=0.022$、$C_2^*=0.0285$ 较为合适。

(4)高斯型带通滤波的相对响应函数曲线在长、短波方向具有明显的不对称性，特别是当 $\lambda^*\ll1$ 时，$R_b^*(\lambda^*)\propto e^{-\alpha\lambda^{*-2}}$；而当 $\lambda^*\gg1$ 时，$R_b^*(\lambda^*)\propto\lambda^{*-2}$。

(5)结构函数曲线可用来帮助推测二维要素场中的特征波长。当最大响应波长取这些特征波长时，对应的扰动环流将在滤波场中得到最大反映。

(6)未滤波的对流层高层流场上通常主导成份是基本气流和超长波槽、脊，选取适当的最大响应波长进行带通滤波，能够揭示出被背景场掩盖着的波长为800—3000km 的天气尺度环流系统，发现和跟踪这些系统对天气形势的演变预测和暴雨、强对流系统的分析

和预报将提供一定帮助。

从分析中也可看出高斯权重带通滤波的一个不足之处是响应的半宽度偏宽，例如波长为$2\lambda_0$的波，带通滤波后振幅只能衰减一半。解决的办法一种是多次使用高斯带通滤波器，这时相对响应函数是$(R_b^*)^n$，R_b^*是一次带通滤波的相对响应函数，n是使用的次数。另一种办法是修改高斯型或构造其它型的权重函数。

对参数g的逐步订正分析主要是使原始场中的短波振幅在分析场中能得到较满意的反映，但带通滤波的目的不同于客观分析，也不同于高通滤波，因此与参数g相联系的订正项在带通滤波中的情况有待今后进一步检查。

参考文献

[1] Charles A Doswell Ⅲ. Obtaining meteorologically significant surface divergence fields through the filtering property of objective analysis. Mon Wea Rev, 1977, 105: 885－892.

[2] Maddox R A. An objective technique for separating macroscale and mesoscale features in meteorological data. Mon Wea Rev, 1980, 108: 1108－1121.

[3] 徐元泰，丁一汇. 气象场的客观分析和中尺度滤波. 大气科学，1988，12：274—282.

[4] Maddox R A et al. Evolution of upper tropospheric features during the development of a MCC. J Atm Sci, 1981, 38: 1664－1674.

[5] 党人庆. 中尺度滤波方法对中间尺度云团分析的初步应用. 气象科学，1984，9—14.

[6] 蔡则怡，于波. 带通滤波在华北飑线预报中的应用. 气象，1988，14(1)：23—27.

[7] 丁一汇. 天气动力学中的诊断分析方法. 北京：科学出版社，1989，72—78.

BANDPASS FILTERING ANALYSIS WITH GAUSS WEIGHTING IN TWO-DIMENSIONAL FIELDS

He Xicheng Wan Qilin

(Guangzhou Institute of Tropical and Oceanic Meteorology, Guangzhou, 510080)

Abstract

This paper examines the response of the bandpass filter with Gauss weighting to arbitrary two-dimensional fields and suggests a new concept: Relative Response Function. Based on the nature of relative response function, satisfactory weighting parameters C_1, C_2 are obtained. By studying of selected case, the procedure of using structure function curves to choose the maximum response wavelength is formulated. It is shown that bandpass filtering offers some improvements to the analysing and forecasting of mesoscale weather processes.

Key words: Bandpass filtering, Response function, Weighting parameter.