

气流过山运动的非线性浅水理论*

顾 伟 伍荣生

(南京大学大气科学系, 南京, 210008)

摘 要

用一个两层密度不同的流体所组成的非线性浅水模型讨论了过山气流的变化特征。结果表明:在背风坡下游,如果弗罗德数 F_r 大于 1,则在不同的条件下将会出现波状的、水跃的以及“破裂”的气流,如果 F_r 小于 1,将只会出现“破裂”气流;在山地上空,地形波关于地形分布是非对称的。

关键词: 非线性, 浅水模式, 过山气流。

1 引 言

气流过山问题是一个古老的动力学问题。由于问题的复杂性,近年来在理论研究的同时出现了许多数值模拟的工作。Long^[1]、巢纪平^[2]曾先后用浅水模型讨论了过山流体的水跃现象,并提出了背风坡一侧出现荚状云和旋转云的形成机制。Eliassen^[3]就线性的非静力平衡模式讨论了旋转气流中的中尺度地形波。伍荣生^[4]通过浅水模型研究了地面摩擦对中尺度地形波的影响。这些工作表明:如果浅水模型中不包含地球的旋转作用,那么背风坡下游气流将是均厚的,这显然不符合观察事实。因此,用地球旋转作用下的非线性浅水模型进一步讨论过山气流运动将是有意义的。

2 描述过山气流的浅水模型

为简单起见,设上层气流的位温为常数 θ ,下层气流的位温为常数 $\theta - \Delta\theta$ ($\Delta\theta > 0$),如果气流从正面向一个具有无限长脊的地形移动,那么我们就可近似地忽略变量随地形脊方向的变化,这样描写下层流体的定常的浅水方程就可写为:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} - fv = fV_g - g' \frac{\partial}{\partial x}(h + \eta) \quad (1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + fu = fU_g \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(hu) = 0 \quad (3)$$

其中, u, v 为 x, y 方向的风速,它们分别垂直于和平行于地形脊方向。 $h(x)$ 为下层流体的厚度, $\eta(x)$ 为地形高度分布, $g' = g\Delta\theta/\theta$ 为约化重力, $\vec{F} = (fV_g, -fU_g)$ 为上层气流对下层

* 1992 年 10 月 12 日收到原稿,1992 年 12 月 18 日收到修改稿。

气流的作用力, 它不随空间和时间变化。

设在地形上游无穷远处, 下层流体的厚度为 H , 流速为 U_g , 则由式(3)可得到

$$hu = HU_g \quad (4)$$

于是

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -HU_g \frac{\partial u}{\partial x} / u^2 \quad (5)$$

将式(5)代入方程(1)中, 有:

$$fv = u \frac{\partial u}{\partial x} - fV_g + g' \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - HU_g \frac{\partial u}{\partial x} / u^2 \right) \quad (6)$$

从式(2)、(6)中消去 v , 并作一些整理可得到:

$$\begin{aligned} & (u^4/g' - HU_g u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (u^3/g' + 2HU_g) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \\ & + \left(\mu^2 H + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) u^3 - \mu^2 HU_g u^2 = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

式中 $\mu = f/\sqrt{g'H}$, μ^{-1} 为 Rossby 变形半径。

为了便于讨论, 将方程(7)化为无因次形式, 令

$$x = Lx^*, \eta = \eta_{\max} \eta^*, h = Hh^*, u = U_g u^* \quad (8)$$

其中 L 为地形的特征宽度, $\eta_{\max}$ 为地形的最大高度, 如此无因次方程为:

$$(F_r u^4 - u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (F_r u^3 + 2) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\epsilon^2 + \frac{1}{\bar{H}} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) u^3 - \epsilon^2 u^2 = 0 \quad (9)$$

其中 $F_r = U_g^2/g'H$ 为重力 Froude 数, $\epsilon = \mu L$ 为地形宽度与 Rossby 变形半径之比, 它反映了柯氏力的影响大小, $\bar{H} = H/\eta_{\max}$ 为地形上游无穷远处流体厚度与地形最大高度之比。方程式(9)就是层结气流过山时气流移速所满足的方程。

3 计算结果

方程(9)虽是偏微分方程, 但由于只含有一个自变量 x , 故实际上可作为常微分方程来处理。为计算方便, 我们通常把方程(9)写成如下的形式:

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = y/(F_r u^3 - 1) \\ \frac{dy}{dx} = \epsilon^2 u - \left(\epsilon^2 + \frac{1}{\bar{H}} \frac{d^2 \eta}{dx^2} \right) u^2 + 2y^2/(F_r u^4 - u) \end{cases} \quad (10)$$

设地形上游的气流状态为: $u \rightarrow 1$, $\frac{du}{dx} \rightarrow 0$, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时(这里将不考虑地形对上游气流的影响), 地形函数为 $\eta(x) = e^{-4x^2}$, 如果取 $L = 100\text{km}$, $U_g = 10\text{ms}^{-1}$, $H = 1.5\text{km}$, $g' = 0.02\text{ms}^{-2}$, 则 $F_r = 3.33$, 当 $\eta_{\max}$ 分别为 0.25km , 0.5km , 0.66km 和 0.76km 时, 气流在地形上空及其下游处的高度变化为图 1 所示。可见, 当 $\eta_{\max}$ 较小时, 背风坡下游的气流为波状气流, 但是随着地形高度的增加, 气流界面变得越来越陡, 以至在图 1c 中出现了明显的定常气压跃变(或水跃)。这种由地形强迫所引起的现象, 在背风坡下游是经常能观察到的。如果继续增加 $\eta_{\max}$ 的值($\geq 0.67\text{km}$), 在背风坡下游, 将有一部分气流处于“破碎”状态(如图 1d

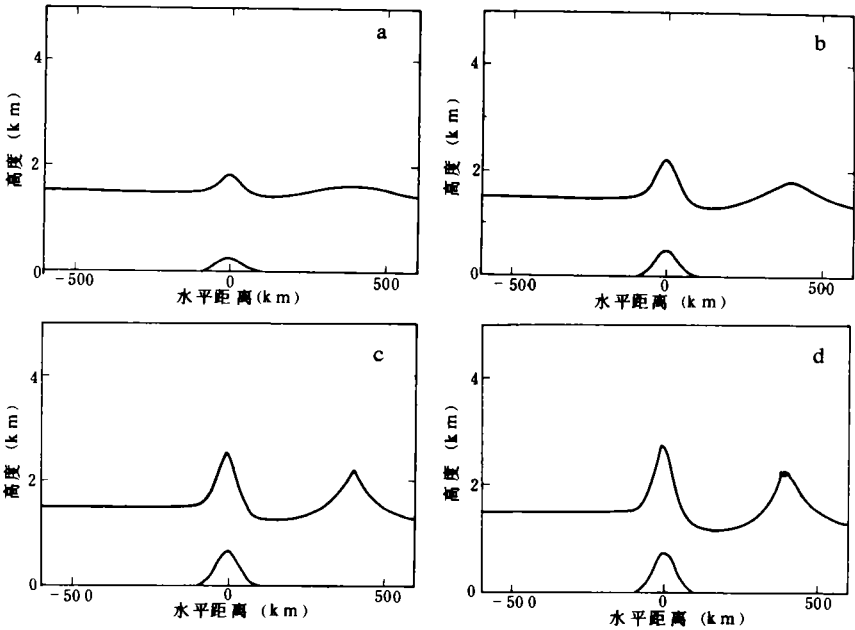


图1 气流界面变化图
(此时 $F_r=3.33, \epsilon=1.82$, (a)、(b)、(c)、(d) 所对应的地形高度分别为
0.25km, 0.5km, 0.66km, 0.76km)

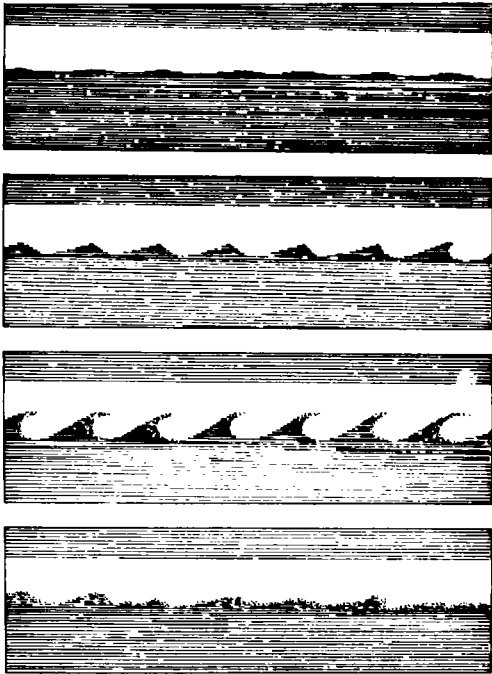


图2 在一个实验室用的管子中出现的 Kelvin-Helmholtz 波的演变, 取自[6]

所示)。这种现象跟 Thorpe^[6]在实验室得到的 Kelvin-Helmholtz 波的演变非常相似(见图 2)。Kelvin-Helmholtz 波经常发生在流体内具有强切变的面上,如果 Richardson 数下降至大约 0.25 时,这个面就变成波动,如果继续降低 Richardson 数,这些波动会自发地增长起来,最后卷成滚轴状并破裂。“破裂”现象在地形波中也可能发生。由图 1 可看出,在地形上空形成的地形波随着地形高度的增加,其波峰变得越来越陡,计算表明:当 $\eta_{\max} \geq 0.8\text{km}$ 时,地形波也将发生“破裂”。

如果取 $L=100\text{km}, U_g=10\text{ms}^{-1}, H=3\text{km}, g'=0.2\text{ms}^{-2}$, 则 $F_r=0.166$, 当 $\eta_{\max}$ 分别为 0.5km 和 0.75km 时,气流在山地上空及其下游处的高度变化分别为图 3a,b 所示。可见在背风坡下游某一距离处出现了“破碎”气流。不过,地形波仍然存在,并且随着地形高度的增加,地形波的振幅越来越大。同样,如果继续增加地形的高度($\geq 0.76\text{km}$),地形波也将发生“破裂”。

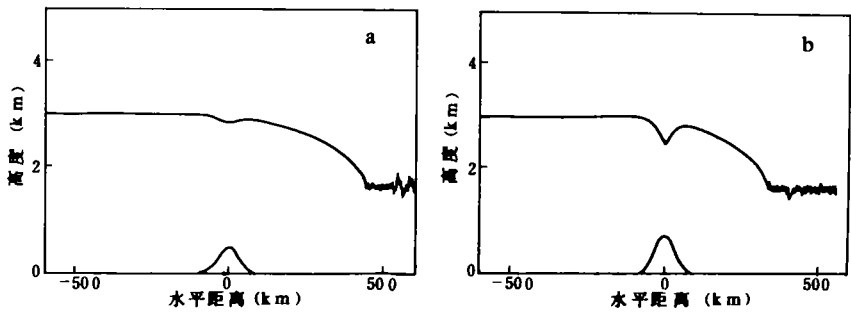


图 3 气流界面变化图

(此时 $F_r=0.166, \epsilon=0.408$, (a)、(b)对应的地形高度分别为 0.5km 和 0.75km)

4 结果分析

从以上的计算结果中我们可看出:过山气流的状态与 F_r 数及地形扰动强度有密切的关系,为了弄清这种关系,我们有必要对方程(10)的定性性质作一具体分析。由于 $\frac{d^2\eta}{dx^2}$ 为 x 的函数,故方程(10)是一个非线性非自治系统,对于这样的非自治系统,其定性性质一般较难研究,故下面仅就背风坡下游气流来讨论。由于在背风坡下游 $\eta=0, \frac{d^2\eta}{dx^2}=0$, 于是方程(10)可简化为,

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = y/(F_ru^3 - 1) \\ \frac{dy}{dx} = \epsilon^2u - \epsilon^2u^2 + 2y^2/(F_ru^4 - u) \end{cases} \tag{11}$$

因此

$$\frac{dy}{du} = \epsilon^2u(1 - u)(F_ru^3 - 1)/y + 2y/u \tag{12}$$

令 $y=su^2$, 则上式可化为

$$sds = \epsilon^2 [F_r(1-u) - (1/u^3 - 1/u^2)]du \quad (13)$$

积分得:

$$s^2 = \epsilon^2 [(u-1)^2(1/u^2 - F_r) + F_r - 1] + 2C \quad (14)$$

故

$$y = \pm u^2 \sqrt{\epsilon^2 (u-1)^2(1/u^2 - F_r) + (F_r - 1)\epsilon^2 + 2C} \quad (15)$$

式中 C 为积分常数。方程(15)就是一阶常微分方程组(11)在相空间 (u, y) 中的轨迹方程。它较为复杂, 因此为了搞清它在平衡点附近的轨迹分布, 我们有必要对系统(11)的定性性质作进一步分析。

如果 $F_r \neq 1$, 系统(11)有高阶奇点 $y=0, u=1$ 。在此奇点附近对式(11)线性化, 那么此线性系统的系数矩阵特征方程为:

$$\lambda^2 + \epsilon^2/(F_r - 1) = 0 \quad (16)$$

这里 λ 为特征值, 因此若 $F_r < 1$, 则 $y=0, u=1$ 为此线性系统的鞍点, 因而也是系统(11)本身的鞍点。若 $F_r > 1$, 则 $y=0, u=1$ 为线性系统的中心, 它是否为系统(11)的中心, 还需进一步判别。为此令 $\bar{u}=u-1, \bar{y}=y$, 则式(11)可写成:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{u}}{dx} = \bar{y}/[F_r(1+\bar{u})^3 - 1] \equiv U(\bar{u}, \bar{y}) \\ \frac{d\bar{y}}{dx} = \epsilon^2(1+\bar{u}) - \epsilon^2(1+\bar{u})^2 + 2\bar{y}^2/[F_r(1+\bar{u})^4 - 1 - \bar{u}] \equiv Y(\bar{u}, \bar{y}) \end{cases} \quad (17)$$

由于 $U(\bar{u}, -\bar{y}) = -U(\bar{u}, \bar{y}), Y(\bar{u}, -\bar{y}) = Y(\bar{u}, \bar{y})$, 故由(17)右侧函数所定义的线素场关于 $\bar{u}$ 轴对称, 据对称原理可知, $\bar{u}=0, \bar{y}=0$ 也即 $u=1, y=0$ 为系统(11)的中心。

当 $u=u_0$ 或 $1/\sqrt[3]{F_r}$ 时, 系统(11)无定义, 因此按照通常的办法是很难求出 $u=u_0$ 附近的轨迹性质。不过此时可把式(11)当作是某一系统在研究无穷远奇点时通过 Poincare 变换转化而来的, 因此我们可用研究无穷远奇点的办法来讨论。由于 $u \rightarrow 0$ 时, $h \rightarrow \infty$ 没有意义, 故我们只讨论 $u_0 = 1/\sqrt[3]{F_r}$ 附近的轨迹特征, 作平移变换 $u' = u - u_0, y' = y$, 这样系统(11)变为:

$$\begin{cases} \frac{du'}{dx} = y'/F_r u' (u'^2 + 3u' u_0 + 3u_0^2) \\ \frac{dy'}{dx} = \epsilon^2(u_0 + u')(1 - u_0 - u') + 2y'^2/F_r u' (u_0 + u')(3u_0^2 + 3u_0 u' + u'^2) \end{cases} \quad (18)$$

令 $x' = x/F_r u' (u_0 + u')(3u_0^2 + 3u_0 u' + u'^2)$, 则有

$$\begin{cases} \frac{du'}{dx'} = y' (u_0 + u') \\ \frac{dy'}{dx'} = \epsilon^2 F_r u' (u_0 + u')^2 (1 - u_0 - u') (3u_0^2 + 3u_0 u' + u'^2) + 2y'^2 \end{cases} \quad (19)$$

当 $u' \neq 0$ 时, 式(18)与(19)是等价的, 而式(19)在 $u'=0$ 上已有定义, 它在 y 轴上 ($u'=0$) 的平衡点为 $y'=0, u'=0$, 这是一个高阶奇点, 为此作变换:

$$\begin{cases} \zeta = u' \\ \psi = (u_0 + u')y' \end{cases} \quad (20)$$

这样式(19)变为:

$$\begin{cases} \frac{d\zeta}{dx'} = \psi \\ \frac{d\psi}{dx'} = \epsilon^2 F_r \zeta (1 - u_0 - \zeta) (\zeta + u_0)^3 (\zeta^2 + 3\zeta u_0 + 3u_0^2) + 3\psi^2 / (\zeta + u_0) \end{cases} \quad (21)$$

据文献[5]中的定理 7.2,此时 $k=1,a_k=3F_r(1-u_0)\epsilon^2u_0^5,b_n=0$,故当 $1-u_0>0$,也即 $F_r>1$ 时, $a_k>0,u'=0,y'=0$ 为鞍点;当 $1-u_0<0$,也即 $F_r<1$ 时, $a_k<0$,这样 $u'=0,y'=0$ 为中心或焦点。因此当 $F_r>1$ 时, $y=0,u=1/\sqrt[3]{F_r}$ 为系统(11)的鞍点;当 $F_r<1$ 时, $y=0,u=1/\sqrt[3]{F_r}$ 为系统(11)的中心或焦点。可用同样的方法得到:当 $F_r=1$ 时, $y=0,u=1$ 为退化奇点。

从以上的讨论中我们可看出:系统(11)的定性性质随着 F_r 是大于1还是小于1而不同,因此我们可不妨取 (F_r,ϵ) 分别为(3.33,1.82)、(1,4)和(0.5,2.8),这时相应的相图结构为图4所示。图4表明:当 $F_r>1$ 时,如果地形扰动使得背风坡下游的气流状态 (u,y) 正好落在鞍点的同宿环以内(比如A点),那么下游的气流运动将呈周期状态(波解)(如图1a,b,c),如果地形扰动使得背风坡下游的气流状态 (u,y) 落在鞍点的同宿环以外(比如B点),那么随着 x 的增加,气流状态将按同宿环以外的某一轨线发生变化,当变化到 $u_0=1/\sqrt[3]{F_r}$ 的右侧(左侧)附近时,由于 $F_ru_0^3-1\rightarrow0^+(0^-)$,故 $\frac{du}{dx}\rightarrow-\infty(+\infty)$,这时解发生了突变,波发生了“破裂”(如图1d所示)。当 $F_r<1$ 时,虽然 $y=0,u=u_0=1/\sqrt[3]{F_r}$ 为系统(11)的中心,但由于 $u\rightarrow u_0^+(u_0^-)$ 时 $F_ru^3-1\rightarrow0^+(0^-)$,故 $\frac{du}{dx}\rightarrow-\infty(+\infty)$,所以解在 $u=u_0$ 附近也发生了突变,周期解也不复存在了(如图3所示)。由图4也可看出:当 $F_r>1$ 时,地形扰动强度对背风坡下游气流的定性状态有很大的影响,故在图1中,随着地形高度的增加,背风坡下游将依次出现波状、水跃及“破碎”气流。当 $F_r<1$ 时,不管地形扰动强度多大,背风坡下游某一距离处都只会出现“破碎”气流,故在图3中,不管地形高度多少,在背风坡下游都不会出现波状气流。

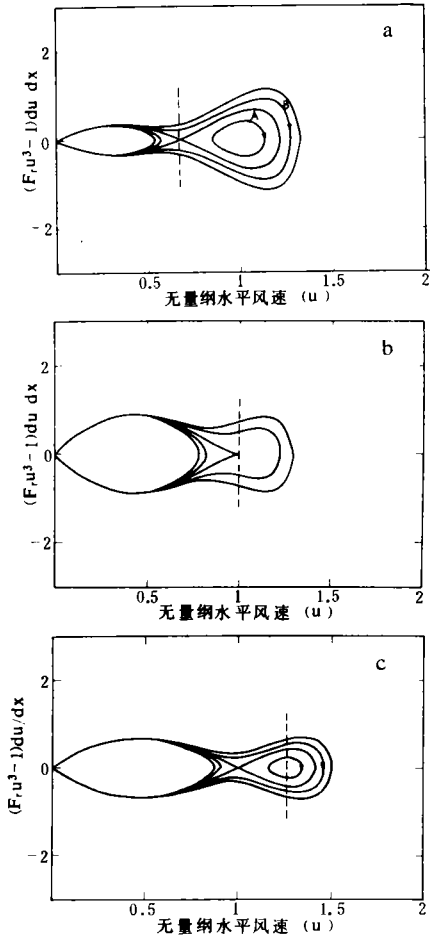


图4 a. $F_r>1$, b. $F_r=1$, c. $F_r<1$ 时的相图结构
(虚线为奇异线 $u=1/\sqrt[3]{F_r}$)

图 1 和图 3 还表明: $F_r > 1$ 和 $F_r < 1$ 时的地形波扰动方向正好相反, 这个性质与 $f = 0$ 时的情况相同, 但是从背风坡下游的气流特性来看, 柯氏力考虑与否, 其结果将存在很大的差别。当 $f = 0$ 时, 方程(9)可化为:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{2} F_r u^2 + \frac{1}{u} + \frac{1}{H} \eta \right) = 0 \quad (22)$$

于是在边界条件: $u \rightarrow 1, \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0, \frac{\partial \eta}{\partial x} \rightarrow 0, x \rightarrow \infty$ 下, 上式可写成:

$$\frac{1}{2} F_r u^2 + \frac{1}{u} + \frac{\eta}{H} = \frac{1}{2} F_r + 1 \quad (23)$$

或者

$$h^3 + \left(\frac{\eta}{H} - \frac{1}{2} F_r - 1 \right) h^2 + \frac{1}{2} F_r = 0 \quad (24)$$

故当 $\eta = 0$ 时, $h = 1$ 或 $h = \frac{1}{4} (F_r + \sqrt{F_r^2 + 8F_r})$, 这说明在背风坡下游气流是均厚的。这与 $f \neq 0$ 时的情况是截然不同的。此外, 如果考虑了柯氏力的影响, 地形波关于地形分布是非对称的。具体说, 当 $F_r > 1$ 时, 在迎风坡上气流移速(厚度)将达到最小(最厚), 在背风坡上气流移速(厚度)将达到最大(最薄), 当 $F_r < 1$ 时, 情况则正好相反。这种非对称性将随着 ϵ 的增大而变得越来越明显。

关于旋转气流的过山运动, Eliassen 曾用非静力平模式讨论过, 但模型是线性的, 因此在背风坡下游总可得到一个定常的波状气流。这一点在线性的浅水模型中也是这样, 故线性模型结果与非线性模型结果是有较大不同的。

5 结 论

本文用非线性浅水模型讨论了旋转气流过山运动的变化特征, 结果表明, 在背风坡下游, 如果 $F_r > 1$, 则在不同的条件下将会出现波状气流、水跃气流以及“破碎”气流; 如果 $F_r < 1$, 则在背风坡下游某一距离处出现“破碎”气流。在地形上空, 地形波关于地形分布是非对称的, 并且随着 ϵ 的增加, 这种非对称性越加明显。

波状气流、水跃气流以及波的“破裂”现象在大气中能经常观察到。这正如 Verginer 和 Lilly^[7]所说的, 在地形上空及其下游, 对于不同的时间可能有不同的近于定常状态的气流存在, 这种不同的定常态将取决于气流特性和地形特征。

参考文献

- [1] Long R R. Some aspects of the flow of stratified fluid. I. Tellus, 1954, 6: 97—115.
- [2] 巢纪平, 章光锟, 袁孝明. 二层模式中小地形对于气压跳跃形成的初步研究. 气象学报, 1964, 34(2): 233—241.
- [3] Eliassen A. On meso-scale mountain waves on the rotating earth. Geofysiske Publikasjoner. 1968, 29. (6): 1—15.
- [4] Wu R. The surface friction and the flow over mountain. Adv Atm Sci, 1991 8: 272—278.
- [5] 张芷芬等. 微分方程定性理论. 科学出版社, 1985, 135—153.
- [6] Thorpe S A. Instability and wave. Weather, 1979, 34: 102—105.
- [7] 阿特金森 B W. 大气中尺度环流. 北京: 气象出版社, 1987, 23—72, 290—316.

NONLINEAR SHALLOW-WATER MODEL OF FLOW OVER MOUNTAIN

Gu Wei Wu Rongsheng

(Department of Atmospheric Sciences Nanjing University, Nanjing, 210008)

Abstract

This paper uses the shallow-water model to discuss the characteristics of the rotating flow over the mountain. The results show that the flow has such features as follows: If Froude number Fr is greater than 1, then there exist wave-type flow, "jumping flow" or "breaking" flow respectively on the backward of the mountain; While if Froude number Fr is less than 1, then exist the "breaking" flow only. Mountain wave is asymmetric with regard to symmetric mountain.

Key words: Nonlinear, Shallow water model, Flow over mountain.