

# 纬向切变基流中的非线性正压 Rossby 波\*

何建中

(南京气象学院, 南京, 210044)

## 提 要

在半地转近似下,用相角函数方法得到了包含纬向基流及其切变的非线性常微分方程。利用常微分方程解的拓扑性质的定性理论,直接得到该方程存在有限振幅的周期波解与孤立波解即非线性正压 Rossby 波解存在的条件,由此分析了纬向切变基流对波解存在的影响。最后利用函数逼近法求得了非线性正压 Rossby 波解的显式表达式。结果表明,纬向切变基流对波的影响不仅表现在波的存在方面,而且还表现在波的形态方面,反映了波的非线性特点和基流对波动的作用。

**关键词:** 正压 Rossby 波, 非线性, 纬向基流。

## 1 引 言

近年来,关于非线性波动的研究有了很大进展。Long<sup>[1]</sup>和 Benney<sup>[2]</sup>用  $\beta$  平面近似研究了具有水平速度切变的正压 Rossby 波。Reddkopp<sup>[3]</sup>用准地转模式对斜压层结大气的孤立 Rossby 波作了研究。以上工作均采用多尺度和约化摄动法。刘式适等<sup>[4]</sup>利用半地转模式,采用相角函数方法,将偏微分方程组化为非线性常微分方程,利用 Taylor 级数近似将非线性常微分方程近似化为 Kdv 方程,表明半地转近似下的 Rossby 波具有充分的非线性特性,为讨论非线性波动问题提供了一个途径。

本文将利用常微分方程定义的非线性动力系统所对应的相空间特征,作非线性运动的定性分析,研究其解的拓扑结构。将波的存在性化为非线性常微分方程是否存在周期解问题,由动力系统对应的相平面上存在闭合的相轨线与同宿轨线的条件得到了非线性正压 Rossby 周期波与孤立波的存在条件。讨论了纬向切变基流中正压 Rossby 周期波与孤立波存在的基流切变条件与初始相角扰动的条件。利用函数逼近法求得了显式波动解,反映了波的非线性的特点和基流对波动的作用,得到了一些有意义的结果。

## 2 基本方程

不计地形作用,非线性浅水模式为

\* 1991 年 12 月 17 日收到原稿,1992 年 11 月 18 日收到最后修改稿。

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) u - fv = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) v + fu = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ m \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \varphi + \varphi \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $u, v$  为风速  $x, y$  方向上分量,  $\varphi$  为重力位势,  $f$  为科氏参数。  $m=1$  时, 表示水平辐散模式,  $m=0$  时, 则表示水平无辐散模式。

$$\text{设} \quad u = \bar{u}(y) + u', \quad v = v', \quad \varphi = \bar{\varphi}(y) + \varphi' \quad (2)$$

$$\text{式中, } \bar{u}(y) = -\frac{1}{f_0} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}.$$

将式(2)代入式(1), 并略去“'”号, 得

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) u + \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - f \right) v = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) v + fu = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ m \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi + mv \frac{\partial \varphi}{\partial y} + (\varphi + \bar{\varphi}) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

用  $\beta$  平面近似, 从式(3)中水平运动方程可求得以下涡度方程

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ & + \left[ f_0 - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left( \beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) v = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

利用半地转近似, 上式与式(3)中的连续方程可写成

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) \\ + \left( f_0 - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left( \beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) v_g = 0 \\ m \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \varphi + (\varphi + c_0^2) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

其中,  $u_g = -\frac{1}{f_0} \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ ,  $v_g = \frac{1}{f_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ,  $c_0^2 = \bar{\varphi}$ 。另外  $\left( \beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) v$  中  $v$  用  $v_g$  代替, 对于大尺度运动这种近似是合理的<sup>[5]</sup>。

利用相角函数方法, 设式(5)的形式解为

$$\varphi = \Phi(\theta), \quad u = U(\theta), \quad v = V(\theta), \quad \theta = kx + ly - \omega t \quad (6)$$

式中,  $\theta$  为相角,  $k, l$  分别为  $x, y$  方向上的波数,  $\omega$  为圆频率。

将式(6)代入式(5), 类似文献[6]、[7], 考虑  $y$  变化区间不太大, 以保证基本状态参量在该区间内是缓变的, 这样可以得到关于  $\Phi$  的常微分方程

$$\Phi'' = \frac{\left[ mc_x f_0 \left( f_0 - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + c_0^2 \left( \beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) \right] \Phi + m \left( \beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) \Phi^2}{c_0^2 \lambda^2 (c_x - \bar{u}) - m \lambda^2 \bar{u} \Phi} \quad (7)$$

式中,  $\lambda^2 = k^2 + l^2$ ;  $c_x = \omega/k$  为  $x$  方向上的相速。“'”号代表对相角  $\theta$  的微分。式(7)即为本文

讨论纬向切变基流下的非线性正压 Rossby 波解存在条件与解的基本方程。当  $m \neq 0$  时, 该方程为非线性常微分方程。下面仅讨论  $m \neq 0, m=1$  时的非线性方程。文献[6]也得到类似方程, 然后用 Taylor 级数近似展开方法讨论平衡点附近的小扰动稳定问题。为了讨论有限振幅的周期波解, 本文将对方程式(7)不作任何近似, 利用非线性定性理论, 讨论方程式(7)解的拓扑结构。在较严格的基础上讨论波动解的存在条件及求解问题。

显然, 如不计纬向基流, 式(7)简化为

$$\Phi'' = \frac{(c_x f_0^2 + c_0^2 \beta) \Phi + \beta \Phi^2}{c_0^2 \lambda^2 c_x} \quad (8)$$

文献[5]曾得到上述方程。上式不难化为 Kdv 方程。存在有界 Rossby 波解时, 相速  $c_x < 0$ 。有关解的性质文献[5]已作过详细分析, 在此不再重复。下面着重讨论存在纬向基流的普遍情形。

首先讨论  $\beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \neq 0$  情形。此时, 式(7)可改写为

$$\Phi'' = |r| \operatorname{sgn}(r) \frac{\Phi^2 + A\Phi}{\Phi - B} \quad (9)$$

其中,

$$A = \frac{c_x f_0 \bar{\xi}_a}{\frac{\partial \bar{\xi}_a}{\partial y}} + c_0^2, \quad B = c_0^2 (c_x - \bar{u}) / \bar{u}, \quad (10)$$

$$r = \left( -\frac{\partial \bar{\xi}_a}{\partial y} \right) / (\bar{u} \lambda^2), \quad \bar{\xi}_a = f_0 - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \bar{\xi}_a}{\partial y} = \beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}$$

$\operatorname{sgn}(r)$  为符号函数,  $\operatorname{sgn}(r) = \begin{cases} 1 & r > 0 \\ -1 & r < 0. \end{cases}$

作变换  $Q = (\Phi + A + B) / (A + 2B)$  (11)

记  $a = (A + B)B, \quad b = A + 2B$  (12)

则式(9)可变成如下形式

$$Q'' = |r| \operatorname{sgn}(r) \left( Q + \frac{a}{b^2} \frac{1}{Q-1} \right) \quad (13)$$

上式可视为无限长载流导体附近单位质量载流导体的运动方程<sup>[8]</sup>, 等效于下面的微分系统

$$\begin{cases} \frac{dQ}{d\theta} = p \\ \frac{dp}{d\theta} = |r| \operatorname{sgn}(r) \left( Q + \frac{a}{b^2} \frac{1}{Q-1} \right) \end{cases} \quad (14)$$

在  $(Q, p)$  所定义的相平面上, 它有两个平衡点  $A \pm \left( \frac{1 \pm A/b}{2}, 0 \right)$ 。式(14)存在首次积分为

$$p^2 - |r| \operatorname{sgn}(r) \left( Q^2 + \frac{2a}{b^2} \ln|Q-1| \right) = E = p^2 + V(Q) \quad (15)$$

式中,  $E$  为积分常数, 可由初始扰动值确定, 定义为拟能。 $V(Q)$  为拟势函数相当于位势能。于是式(15)即是运动方程(13)表征的运动的能量方程, 因而原问题简化为单位质量点在由  $V(Q)$  所定义的势场中的问题。由式(15)可计算出两个平衡点处的拟能, 即有

$$E_{\pm} = \frac{|r|}{2} (1 \pm A/b) - \frac{a|r|}{b^2} \left( 1 - 2 \ln \frac{1 \mp A/b}{2} \right) \tag{16}$$

其次,考虑  $\beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} = 0$  时的情形。此时,式(7)可改写成

$$\Phi'' = |r_1| \operatorname{sgn}(r_1) \Phi / (\Phi + a) \tag{17}$$

其中,  $r_1 = -c_x f_0 \bar{u}_a / (\lambda^2 \bar{u}), \quad a = c_0^2 (\bar{u} - c_x) / \bar{u}$  (18)

式(17)等效于下面的微分系统(为一致记  $Q = \Phi$ )

$$\begin{cases} \frac{dQ}{d\theta} = p \\ \frac{dp}{d\theta} = |r_1| \operatorname{sgn}(r_1) Q / (Q + a) \end{cases} \tag{19}$$

在  $(Q, p)$  定义的相平面上,有一个平衡点  $(0, 0)$ , 其首次积分即能量方程为

$$p^2 - 2|r_1| \operatorname{sgn}(r_1) (Q - a \ln|Q + a|) = E = p^2 + V(Q) \tag{20}$$

$E, V(Q)$  的意义与前相同。由上式可计算出平衡点处的拟能, 即有

$$E_0 = 2|r_1| \operatorname{sgn}(r_1) a \ln|a| \tag{21}$$

### 3 相平面上运动的特征

根据首次积分即拟能式(15)或式(20), 可以研究整个相平面上运动的特征, 这给分析问题带来较大方便。图1与图2给出了由式(15)与式(20)所定义的拟势函数曲线与相平面上的相轨线。图上绕中心点的封闭轨线对应原问题的有限振幅周期波动解, 过鞍点的同宿轨线对应有限振幅孤立波解。

对  $\operatorname{sgn}(r) = 1$  及  $a < 0$  (图1b) 与  $r = 0$  及  $r_1 a > 0$  (图2a; 2d), 一切  $E$ , 不存在闭相轨线, 故原问题不存在有限振幅周期波动解与孤波解。

图1a(图1c)的结果表明, 对  $\operatorname{sgn}(r) = 1$  及  $a > 0$  ( $\operatorname{sgn}(r) = -1$  及  $a > 0$ ) 时, 只要条件  $E_- (-E_+) < E \leq E_+ (-E_-)$  成立, 相轨线为绕中心点  $A_+$  ( $A_-$ ) 的封闭曲线或过鞍点  $A_-$  ( $A_+$ ) 的同宿轨线。分别对应有限振幅周期波与孤立波。在  $E > E_+ (-E_-)$  时, 相轨线非封闭, 因而不存在有界波动解。

图1d(图2b; 2c)的结果表明, 对  $\operatorname{sgn}(r) = -1$  及  $a < 0$  ( $r_1 a < 0$  及  $r = 0$ ) 时, 对一切  $E$  (对  $E \geq E_0$ ), 相轨线是两族分别绕  $A_+$  与  $A_-$  中心点(绕中心点原点)的封闭轨线, 因而原问题存在有限振幅周期波解, 但

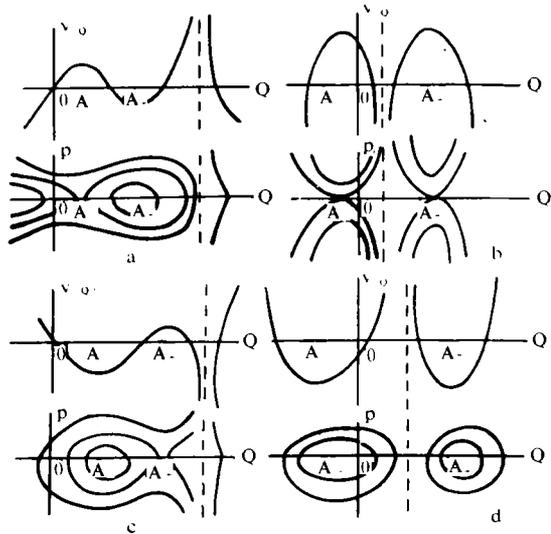


图1  $r \neq 0$  时  $V(Q)$  曲线与相轨线  
((a)  $r > 0, a > 0$ ; (b)  $r > 0, a < 0$ ; (c)  $r < 0, a > 0$ ; (d)  $r < 0, a < 0$ )

不会有孤立波解。对  $E < E_0$  时 ( $r_1 \alpha < 0$  及  $r = 0$ )，相轨线非封闭，不存在有界波动解。

### 4 纬向切变基流中的非线性正压 Rossby 波的存在条件

考虑西风基流  $\bar{u} > 0$ ，由式(10)、(18)可得

$$\frac{\partial^2 \xi_a}{\partial y^2} \neq 0 \text{ 时, } \text{sgn}(r) = \text{sgn}\left(-\frac{\partial^2 \xi_a}{\partial y^2}\right), a = c_0^2 c_x (c_x - \bar{u}) \left[ \frac{f_0 \xi_a}{\partial^2 \xi_a} + \frac{c_0^2}{\bar{u}} \right] / \bar{u} \quad (22)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_a}{\partial y^2} = 0 \text{ 时, } \text{sgn}(r_1) = \text{sgn}(-c_x \xi_a), \alpha = c_0^2 (c_x - \bar{u}) / \bar{u} \quad (23)$$

据上节分析，结合(22)、(23)两式，可得存在非线性正压 Rossby 波的纬向切变基流条件如下。

$$(1) \frac{\partial^2 \xi_a}{\partial y^2} < 0 \text{ 时, } c_x (c_x - \bar{u}) \left[ \frac{f_0 \xi_a}{\partial^2 \xi_a} + \frac{c_0^2}{\bar{u}} \right] > 0 \quad (24)$$

且  $E_- < E \leq E_+$ 。否则

$$c_x (c_x - \bar{u}) \left[ \frac{f_0 \xi_a}{\partial^2 \xi_a} + \frac{c_0^2}{\bar{u}} \right] < 0 \quad (25)$$

对一切  $E$  值，不存在非线性正压 Rossby 波解。

(2)  $\frac{\partial^2 \xi_a}{\partial y^2} > 0$  时。若式(24)成立，则当  $-E_+ < E \leq -E_-$  时，存在非线性正压 Rossby 波(周期的或孤立的)。若式(25)成立，则对一切  $E$ ，均存在有限振幅周期波解，但不会出现孤立波解。

(3)  $\frac{\partial^2 \xi_a}{\partial y^2} = 0$  时，若满足

$$c_x \xi_a (c_x - \bar{u}) > 0 \quad (26)$$

对一切  $E$ ，均不存在非线性正压 Rossby 波。当

$$c_x \xi_a (c_x - \bar{u}) < 0 \quad (27)$$

时，对  $E \geq E_0$ ，存在有限振幅周期波解，但不会有孤立波解。

上述判别条件可由表 1 更直观地表示。

另外，由前面的判别条件可知，无论  $\frac{\partial^2 \xi_a}{\partial y^2} > 0$  或  $< 0$ ，只有在  $a > 0$  时，即式(24)成立时，才有可能出现孤立波。

$a < 0$  时或  $\frac{\partial^2 \xi_a}{\partial y^2} = 0$  时，不会出现有限振幅孤立波(相轨线无同宿轨线)。因此，在  $\frac{\partial^2 \xi_a}{\partial y^2} = 0$  的模型中，如使用 Taylor 级

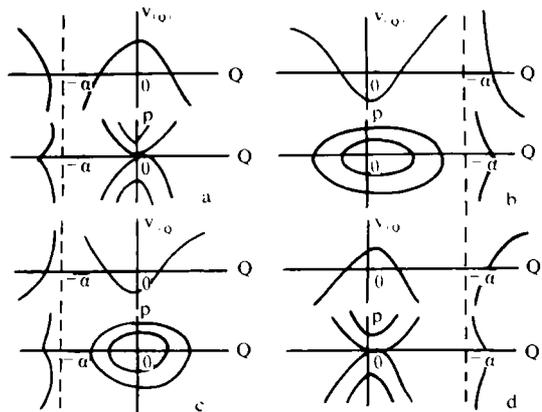


图 2  $r=0$  时  $V(Q)$  曲线与相轨线  
 ((a)  $r_1 > 0, \alpha > 0$ ; (b)  $r_1 > 0, \alpha < 0$ ; (c)  $r_1 < 0, \alpha > 0$ ;  
 (d)  $r_1 < 0, \alpha < 0$ )

表 1 非线性正压 Rossby 存在条件

$\lambda = \frac{\partial \xi_a}{\partial y}$	$c_x < 0$ 或 $c_x > \bar{u}$		$\bar{u} > c_x > 0$	
$\mu^2 = \frac{c_0^2}{f_0 \bar{u}}$	$\xi_a < -\lambda \mu^2$	$\xi_a > -\lambda \mu^2$	$\xi_a < -\lambda \mu^2$	$\xi_a > -\lambda \mu^2$
$\lambda < 0$	$E_- < E \leq E_+$ 周期或孤立波	一切 $E$ 不存在有界波	一切 $E$ 不存在有界波	$E_- < E \leq E_+$ 周期或孤立波
$\lambda = 0$	一切 $E$ 不存在有界波	$E \geq E_0$ 周期波	$E \geq E_0$ 周期波	一切 $E$ 不存在有界波
$\lambda > 0$	一切 $E$ 周期波	$-E_+ < E \leq -E_-$ 周期或孤立波	$-E_+ < E \leq -E_-$ 周期或孤立波	一切 $E$ 周期波

数近似展开所得到的孤立波特解是“虚假”的孤立波。孤立波解处是级数展开的临界发散点( $Q = -\alpha$ 处)。同样,对于有限振幅周期波解的存在条件,本文结果与以往级数近似展开后所得的结果有较大差异。为比较方便,仅考虑基流的一次切变,  $\frac{\partial \xi_a}{\partial y} = \beta > 0$ 。则式(7)用级数展开后所得波解条件为<sup>[6]</sup>

$$(c_x f_0 \xi_a + c_0^2 \beta) / (c_x - \bar{u}) < 0 (> 0) \quad \text{存在(不存在)有界波解} \quad (28)$$

如  $\xi_a > 0$ , 则  $c_x > \bar{u}$  时, 不存在有界波解。而本文结果是

$$\begin{aligned} c_x(c_x - \bar{u})(\bar{u} f_0 \xi_a + c_0^2 \beta) < 0 & \quad \text{一切 } E \text{ 存在有界周期波} \\ c_x(c_x - \bar{u})(\bar{u} f_0 \xi_a + c_0^2 \beta) > 0 & \quad -E_+ < E \leq -E_- \text{ 存在有界周期或孤立波} \end{aligned} \quad (29)$$

显然, 同样对  $\xi_a > 0$ , 存在  $c_x > \bar{u}$  的有界波解。

因此, 由于对方程(7)采用级数近似, 原模式存在波解的条件(包括解的稳定性条件)会发生较大的改变。

由此可见, 非线性正压 Rossby 波解存在与否, 不仅取决于初始扰动位相决定的拟能值, 而且在同样的拟能值条件下, 波的存在与基流及其切变有密切关系, 与无基流时仅存在  $c_x < 0$  的非线性正压 Rossby 波解的情形有很大差别, 不仅依赖于一次切变, 而且还依赖于二次切变。切变的存在使可能存在  $c_x > 0$  甚至  $c_x > \bar{u}$  的非线性正压 Rossby 波解。

当考虑水平无辐散条件时( $m = 0$ ), 非线性常微分方程(7)退化为线性常微分方程, 即有

$$\Phi'' = \left( \beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) \Phi / [\lambda^2 (c_x - \bar{u})] \quad (30)$$

则当

$$\begin{aligned} \left( \beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) / (c_x - \bar{u}) > 0 & \quad \text{不存在有界波动} \\ \left( \beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) / (c_x - \bar{u}) < 0 & \quad \text{存在有界波动} \end{aligned} \quad (31)$$

类似文献[9], 若相速有  $\bar{u}_{\min} \leq c_x \leq \bar{u}_{\max}$ , 考虑  $\bar{u}(y)$  在  $y$  方向的连续性, 则存在  $y_s$ , 使得  $\beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}$  在  $y = y_s$  两侧变号, 也就是  $(\beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}) \Big|_{y=y_s} = 0$ 。从而导出郭氏判据<sup>[10]</sup>。因此, 用水平无辐散的半地转模式得到的非线性波解与准地转模式得到的结果一致, 为线性正压

Rossby 波。

### 5 非线性正压 Rossby 波的近似显式解

当满足非线性正压 Rossby 波存在条件时,可由首次积分求得波解的隐式表达式

$$\theta = \pm \int [E - V(Q)]^{-1/2} dQ \tag{32}$$

为求得显式近似波解,以往曾用 Taylor 级数近似直接将非线性常微分方程化为 Kdv 方程求解。但必须注意的是,必须在原问题存在波动的前提下才能进行,否则会产生虚假的椭圆余弦波或孤立波,且该近似方法得到的波解存在条件与原模式存在条件有较大差别。例如原模式在一次切变基流条件下,可能存在  $c_x > \bar{u}$  的有界波解,而级数展开法则得不到这类波解。另外,级数展开条件将限制拟能值  $E$  的取值范围。以  $\lambda=0, a < 0$  时为例,当  $\xi_a c_x (c_x - \bar{u}) < 0, E > 2a|r_1| \ln|\alpha|$  时,存在波动解。而级数展开近似,只需  $|\Phi| < \alpha$  才行。因此,对应  $E$  必须满足  $2a|r_1| \ln|\alpha| - 2|r_1|\alpha(1 - \ln 2) > E > 2a|r_1| \ln|\alpha|$  才行。注意到对  $E$  的上界限制仅为了保证级数展开能够进行。事实上,对  $E > 2a|r_1| \ln|\alpha| - 2a|r_1|(1 - \ln 2)$  时的初相扰动,波动解仍存在。另一方面,级数展开将改变  $V(Q)=0$  的零点个数及取值与间断点。对于其它参数情形,也有类似问题。为了求得式(32)的近似显式波动解,本文采用函数逼近法<sup>[11]</sup>。以方程(13),对应  $\text{sgn}(r) = -1, a > 0$  为例。显有  $-E_+ < E \leq -E_-$  时,对应相轨线绕  $A_-$  点的封闭曲线,这时  $Q$  关于  $\theta$  存在有界周期波解。用三次多项式逼近  $V(Q) - E = 0$ 。并使多项式与  $V(Q) - E = 0$  具有相同的零点个数与零点值。于是由式(32)可以积分求出  $\Phi$  的稳定有界波动解为

$$\Phi = (A + 2B)[Q_2 + (Q_1 - Q_2) \ln^2 \sqrt{\frac{Q_1 - Q_3}{6} \left| \frac{\partial \xi_a / \partial y}{\bar{u}} \right|} \frac{\theta}{\lambda}] - (A + B) \tag{33}$$

式中,  $A, B$  定义同式(10),  $Q_i (i=1, 2, 3)$  是超越方程

$$|r| \left( Q^2 + \frac{2a}{b^2} \ln|Q - 1| \right) = E \tag{34}$$

的三个小于 1 的单根,且有  $Q_1 > Q_2 > Q_3$ 。式(33)为椭圆余弦波,其模为

$$m^2 = (Q_1 - Q_2) / (Q_1 - Q_3) \tag{35}$$

波长为

$$L = \frac{2}{k} \sqrt{\frac{6\bar{u}\lambda^2}{\left| \frac{\partial \xi_a}{\partial y} \right| (Q_1 - Q_3)}} \tilde{K}(m) \tag{36}$$

其中,

$$\tilde{K}(m) = \int_0^{\pi/2} (1 - m^2 \sin^2 t)^{-1/2} dt \tag{37}$$

为第一类完全椭圆积分。波动振幅为  $(A+2B)(Q_1-Q_2)$ 。当  $E \rightarrow -E_+$  时,即  $Q_1 \rightarrow Q_2, m \rightarrow 0, \tilde{K}(m) \rightarrow \frac{\pi}{2}$  时。此时,有界波动退化为线性正压 Rossby 波。当  $E = -E_-$  时,相轨线是过鞍点  $A_+$  点的同宿轨线,在初相  $\theta=0$  所对应的  $Q$  满足  $Q_2 < Q \leq Q_1$  时,近似地  $\Phi$  有孤立波解

$$\Phi = (A + 2B)[Q_2 + (Q_1 - Q_2) \text{sech}^2 \sqrt{\frac{Q_1 - Q_3}{6\bar{u}} \left| \frac{\partial \xi_a}{\partial y} \right|} \frac{\theta}{\lambda}] - (A + B) \tag{38}$$

其中,  $Q_1$  为方程(34)在上述条件下的单根,  $Q_2=Q_3$  是其重根。

当  $Q < Q_2$  及  $E > -E_-$  时, 相轨线为开曲线, 因而没有稳定有界波动解。

图 3a, b 分别为给定切变基流, 根据式(33)与式(38)求出的波动图象。其中,  $c_x = 1.1\bar{u}(y)$ , 取  $\bar{u}(y) = \bar{u}_0 + \delta(y - y_0)$ , 参数取值同文献[12]。

因此, 在一次弱切变基流中, 存在  $c_x > \bar{u}$  的非线性正压椭圆余弦波与孤立波解。这类波解在以往工作中是得不到反映的。而原模式确实存在这类波解, 大气中是否存在这种波解有待于进一步观察与验证。

由近似显式解可推知, 纬向基流及其切变对非线性波的影响, 不仅表现在前节所讨论的波动的存在条件方面, 而且还表现在波的形态方面, 即波速、波长、振幅与纬向基流及其切变有关, 反映了非线性波动的非线性特点和基流对波动的作用。

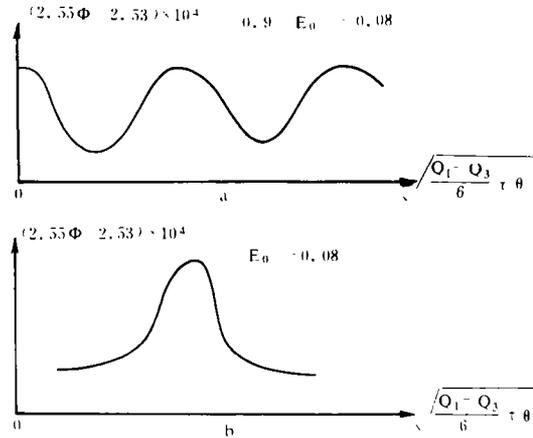


图 3 椭圆余弦波与孤立波图象

### 6 结 语

在半地转近似下, 用相角函数方法得到含纬向切变基流的非线性常微分方程。利用常微分方程解的定性理论, 直接求得了存在有限振幅周期波解与孤立波解的条件。利用函数逼近法求得了非线性正压 Rossby 波解的显式近似解为椭圆余弦波或孤立波。得到以下几点结果:

- (1) 纬向切变基流中的非线性正压 Rossby 波除通常的  $c_x < 0$  的波解外, 还存在  $c_x > 0$  甚至  $c_x > \bar{u}$  波解。对于不同的纬向切变和初相扰动, 这种波解可能是周期的或孤立的。
- (2)  $c_x > 0$  与  $c_x < 0$  的波解存在与否不仅取决于初相扰动, 还取决于切变基流条件, 且对同一拟能可以同时存在  $c_x > 0$  与  $c_x < 0$  的两类波解。而无纬向基流时仅存在  $c_x < 0$  的一种波解。
- (3) 纬向切变基流对波的影响不仅表现在波的存在条件方面, 而且还表现在波的形态方面。即波长、波速、振幅等波参数与纬向切变基流有关。这反映了非线性特点和纬向切变基流对波动的作用。

### 参考文献

- [1] Long, R R. Solitary waves in the westerlies. J Atmos Sci 1966. 21: 197-200.
- [2] Benney, D M. Long nonlinear waves in fluid flows. J Math and Phys. 1966. 45: 52-63.
- [3] Redekopp, L G. On solitary Rossby waves. J Fluid Mech. 1977. 82 (part 4): 725-745.
- [4] 刘式适, 刘式达. 半地转近似下的非线性波. 气象学报. 1987. 45(3): 257-266.
- [5] 谭本植, 刘式适. 地球流体中的非线性 Rossby 波. 北京大学学报. 1988. 24: 341-349.
- [6] Zhao Ping. The effects of zonal flow on nonlinear Rossby waves. Advances in Atmospheric Science. 1991. 8: 299

—306.

- [7] 赵平, 孙淑清. 纬向基流对地形 Rossby 波的影响. 气象学报, 1991, 49: 300—307.
- [8] 安德罗诺夫, A. A 等. 振动理论(上册). 科学出版社, 1981.
- [9] 陆维松. 非线性正压不稳定性. 南京气象学院学报, 1986, 3: 205—216.
- [10] Kuo, H L. Dynamic instability of two-dimensional non-divergent flow in a barotropic atmosphere. J Met. 1949, 6 (2): 105—122.
- [11] 黄思训, 张铭. 大气中非线性波动的非频散解. 中国科学(B), 1987, 9: 1011—1022.
- [12] 罗德海. 正压大气中的代数 Rossby 孤波. 气象学报, 1991, 49: 269—277.

## THE EFFECTS OF LATITUDINAL SHEARING FLOW ON NONLINEAR BAROTROPIC ROSSBY WAVES

He Jianzhong

(*Nanjing Institute of Meteorology, Nanjing, 210044*)

### Abstract

Under the condition of semi-geostrophical approximation and by means of the phase function method, the non-linear ordinary differential equation with latitudinal shearing flow is obtained. Then the conditions for the existence of limited amplitude periodical and isolated wave solutions are directly obtained on the basis of the qualitative theory of ordinary differential equations. It is proved that latitudinal shearing flow affects not only the existence but also the formation of waves, which indicates the non-linear features of waves and the influence of basic flows on undulations.

**Key words:** Barotropic Rossby waves, Non-linear, Latitudinal flow.