第52卷 第3期 气 象 学 报 Vol. 52, No. 3
1994年8月 ACTA METEOROLOGICA SINICA Aug., 1994

大气层结的非均匀性对重力内波波射线的影响*

吕克利 徐亚梅

(南京大学大气科学系，南京，210008)

提 要

文中利用WKB近似，讨论了非均匀层结对惯性重力内波和纯重力内波能量传播路径的影响，得到了波的能量密度，广义波作用密度，和广义拟能密度守恒的条件，导得了重力内波不稳定的必要条件，给出了在波的传播过程中控制波射线折射的方程，得到了两类不同的临界层，最后还利用四阶Runge-Kutta方法计算了不同层结分布下的波射线。

关键词：非均匀层结，重力内波，波射线。

1 引 言

Hines[1]指出，整个大气，从最低层一直到最高层都充满着重力波。重力内波对中尺度系统的形成、发展起着重要的作用。早在1950年代，Tepper[2]就指出，锋前的飑线是重力波的一种表现形式；台风中的螺旋云系也是重力内波造成的。观测和理论研究都显示，重力内波是锋区雨带的驱动机制之一[3]。稳定层结是大气重力内波产生和维持的重要因子，与中尺度系统的发展和能量的传播有着重大关系。重力内波与中尺度扰动密切关联，因而可以设想，重力内波的能量输送对中尺度扰动的发展会有重大影响。巢纪平[4]曾研究过大气层结的水平非均匀性对重力内波的作用，但是没有给出能量传播路径的具体形式。本文将着重讨论层结对重力内波能量输送的作用，重力内波不稳定的条件，以及能量传播的路径。

2 层结的水平非均匀性对惯性重力内波能量传播的影响

对静止大气中百公里的中尺度扰动，可用如下准静力、Boussinesq近似下的线性方程组来描述：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - fv = -\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + fu = -\dfrac{\partial p}{\partial y} \\ \theta = \dfrac{\partial p}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial t} + N^2 w = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

* 1992年9月2日收到原稿，1992年12月5日收到修改稿。

式中 u,v,p,θ,w 是所谓场变量，其定义为

$$(u,v,w)=\rho_0(u',v',w'),$$

$$\theta=\frac{g\rho_0}{\theta_0}\theta',\qquad p=p'$$

带“′”的量是扰动量，ρ_0,θ_0 是背景场变量，$N^2=g\dfrac{\partial\ln\theta_0}{\partial z}$，是 Brunt-Väisälä 频率。

由式(1)消去 θ,u,v,p，得到

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+N^2\nabla^2 w+w\nabla^2 N^2+2\left(\frac{\partial N^2}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial N^2}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right)=0 \tag{2}$$

为简单起见，上下边界条件取为

$$w=0,\qquad z=0,\quad \mathrm{H} \tag{3}$$

方程(2)满足边条件(3)的解，显然可取为

$$w=\overline{w}(x,y,t)\sin\frac{m\pi}{\mathrm{H}}z\qquad(m=1,2,\cdots) \tag{4}$$

代入式(2)，得到

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\right)\overline{w}-\frac{N^2}{n^2}\nabla^2\overline{w}-\frac{\nabla^2 N^2}{n^2}\overline{w}-\frac{2}{n^2}\left(\frac{\partial N^2}{\partial x}\frac{\partial\overline{w}}{\partial x}+\frac{\partial N^2}{\partial y}\frac{\partial\overline{w}}{\partial y}\right)=0 \tag{5}$$

式中 $n^2=\dfrac{m^2\pi^2}{\mathrm{H}^2}$。

进一步考虑 N^2 为时间和空间的缓变函数，即设背景场与扰动之间的尺度是可分的，这时，可引入缓变变量

$$(X,Y,T)=\varepsilon(x,y,t) \tag{6}$$

其中

$$\varepsilon=\frac{\text{扰动的时空尺度}}{\text{背景场的时空尺度}}\ll 1$$

对缓变介质中的缓变波列，显然可设(5)有如下的形式解：

$$\overline{w}=A(X,Y,T)\,e^{\frac{i}{\varepsilon}\varphi(X,Y,T)} \tag{7}$$

此时有局地波数和频率，分别为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial T}=-\omega,\ \frac{\partial\varphi}{\partial X}=k,\ \frac{\partial\varphi}{\partial Y}=l \tag{8}$$

式(7)代入式(5)，得到

$$\begin{aligned}&\varepsilon^2\frac{\partial^2 A}{\partial T^2}-\varepsilon\left(2i\omega\frac{\partial A}{\partial T}+i\frac{\partial\omega}{\partial T}A\right)-(\omega^2-f^2)A\\&-\frac{N^2}{n^2}\left\{\varepsilon^2\nabla_1^2 A+\varepsilon\left[2i\left(k\frac{\partial A}{\partial X}+l\frac{\partial A}{\partial Y}\right)+i\left(i\frac{\partial k}{\partial X}+\frac{\partial l}{\partial Y}\right)A\right]-(k^2+l^2)A\right\}\\&-\varepsilon^2\frac{A}{n^2}\nabla_1^2 N^2-\frac{2}{n^2}\left[\varepsilon^2\left(\frac{\partial N^2}{\partial X}\frac{\partial A}{\partial X}+\frac{\partial N^2}{\partial Y}\frac{A}{\partial Y}\right)+\varepsilon A\left(\frac{\partial N^2}{\partial X}ik+\frac{\partial N^2}{\partial Y}il\right)\right]=0\end{aligned} \tag{9}$$

式中

$$\nabla_1^2=\frac{\partial^2}{\partial X^2}+\frac{\partial^2}{\partial Y^2}$$

把振幅 A 展开成小参数 ε 的幂级数，即令

$$A=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j}A_{j} \tag{10}$$

代入式(9),可得 ε 的各阶方程。对于本文研究的问题,只需给出 ε^0 和 ε^1 阶方程就足够了。

ε^0 阶方程为

$$\omega=\left[f^2+\frac{N^2}{n^2}(k^2+l^2)\right]^{1/2}=\Omega(k,l,X,Y,T) \tag{11}$$

这里已设 $A_0\neq 0$。

ε^1 阶方程为

$$\begin{aligned}&\frac{\partial A_0}{\partial T}+\frac{1}{2\omega}\frac{\partial\omega}{\partial T}A_0+\frac{N^2}{2\omega n^2}\left[2k\frac{\partial A_0}{\partial X}+2l\frac{\partial A_0}{\partial Y}+\left(\frac{\partial k}{\partial X}+\frac{\partial l}{\partial Y}\right)A_0\right]\\&+\frac{1}{\omega n^2}\left(\frac{\partial N^2}{\partial X}k+\frac{\partial N^2}{\partial Y}l\right)A_0+\frac{1}{2\omega i}\left[\omega^2-f^2-\frac{N^2}{n^2}(k^2+l^2)\right]A_1=0\end{aligned} \tag{12}$$

利用式(11),式(12)变为

$$\begin{aligned}&\frac{\partial A_0}{\partial T}+\frac{1}{2\omega}\left[\frac{\partial\omega}{\partial T}+\frac{N^2}{n^2}\left(\frac{\partial k}{\partial X}+\frac{\partial l}{\partial Y}\right)+\frac{2}{n^2}\left(\frac{\partial N^2}{\partial X}k+\frac{\partial N^2}{\partial Y}l\right)\right]A_0\\&+\frac{1}{2\omega}\frac{N^2}{n^2}\left(2k\frac{\partial A_0}{\partial X}+2l\frac{\partial A_0}{\partial Y}\right)=0\end{aligned} \tag{13}$$

由式(11),易得群速为

$$\vec{C}_g=\frac{N^2}{n^2}\frac{\vec{K}}{\omega} \tag{14}$$

式中 $\vec{K}=k\vec{i}+l\vec{j}$,为波数矢量。

2.1 波的守恒律

利用(14),式(13)可改写为

$$\frac{\partial A_0}{\partial T}+\vec{C}_g\cdot\nabla_1 A_0=-\frac{A_0}{2\omega}\left[\frac{\partial\omega}{\partial T}+\frac{N^2}{n^2}\nabla_1\cdot\vec{K}+\frac{2}{n^2}\vec{K}\cdot\nabla_1 N^2\right]$$

式中 $\nabla_1=\frac{\partial}{\partial X}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial Y}\vec{j}$。上式乘以 A_0,并令 $E=\frac{A_0^2}{2}$,为波的能量密度,则有

$$\frac{\partial E}{\partial T}+\vec{C}_g\cdot\nabla_1 E=-\frac{E}{\omega}\left[\frac{\partial\omega}{\partial T}+\frac{N^2}{n^2}\nabla_1\cdot\vec{K}+\frac{2}{n^2}\vec{K}\cdot\nabla_1 N^2\right] \tag{15}$$

利用 $\vec{C}_g$ 的表达式(14),有

$$\nabla_1\cdot\vec{C}_g=\frac{N^2}{n^2}\frac{1}{\omega}\nabla_1\cdot\vec{K}-\frac{N^2}{n^2}\vec{K}\cdot\frac{\nabla_1\omega}{\omega^2}+\frac{\vec{K}}{\omega}\cdot\nabla_1\frac{N^2}{n^2}$$

从而由(15)得到

$$\frac{\partial E}{\partial T}+\nabla_1\cdot\vec{C}_g E=-\frac{E}{\omega}\left[\frac{\partial\omega}{\partial T}+\vec{C}_g\cdot\nabla_1\omega\right]-\frac{E}{\omega}\left[\frac{1}{n^2}\vec{K}\cdot\nabla_1 N^2\right] \tag{16}$$

由式(8),显然有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial k}{\partial T}+\dfrac{\partial\omega}{\partial X}=0\\[2ex]\dfrac{\partial l}{\partial T}+\dfrac{\partial\omega}{\partial Y}=0\\[2ex]\dfrac{\partial k}{\partial Y}=\dfrac{\partial l}{\partial X}\end{cases}$$

利用频散关系(11),易得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\omega}{\partial T}+C_{gx}\dfrac{\partial\omega}{\partial X}+C_{gy}\dfrac{\partial\omega}{\partial Y}=\dfrac{1}{2\omega}\dfrac{k^2+l^2}{n^2}\dfrac{\partial N^2}{\partial T} \\ \dfrac{\partial k}{\partial T}+C_{gx}\dfrac{\partial k}{\partial X}+C_{gy}\dfrac{\partial k}{\partial Y}=-\dfrac{1}{2\omega}\dfrac{k^2+l^2}{n^2}\dfrac{\partial N^2}{\partial X} \\ \dfrac{\partial l}{\partial T}+C_{gx}\dfrac{\partial l}{\partial X}+C_{gy}\dfrac{\partial l}{\partial Y}=-\dfrac{1}{2\omega}\dfrac{k^2+l^2}{n^2}\dfrac{\partial N^2}{\partial Y} \end{cases} \tag{17}$$

利用(17)的第一式,式(16)可写为

$$\frac{\partial E}{\partial T}+\nabla_1\cdot\vec{C}_gE=-\frac{E}{2\omega^2}\frac{k^2+l^2}{n^2}\frac{\partial N^2}{\partial T}-\frac{E}{\omega}\left[\frac{1}{n^2}\vec{K}\cdot\nabla_1N^2\right] \tag{18}$$

这是波动能量密度方程。显见,当 N^2 为常值时,波动能量是守恒的。这时,表征能量传播路径的波射线应是直线;当 N^2 是时空函数时,波射线将发生折射,后面我们的计算将证实这一点。

式(16)乘以 ω,得到

$$\frac{\partial\omega E}{\partial T}+\nabla_1\cdot\vec{C}_gE\omega=-\frac{E}{n^2}\vec{K}\cdot\nabla_1N^2 \tag{19}$$

可见,当 N^2 不随 x,y 改变时,量 ωE(我们暂且称为广义波作用密度)守恒,N^2 的空间变化是造成广义波作用 ωE 改变的原因。

如果用 N^2 乘(19),并利用群速表达式(14),即有

$$\frac{\partial N^2\omega E}{\partial T}+\nabla_1\cdot\vec{C}_gN^2\omega E=\omega E\frac{\partial N^2}{\partial T} \tag{20}$$

可见,量 $N^2\omega E$(我们暂称为广义拟能密度)的变化是由 N^2 随 T 变化造成的,当 N^2 不是时间 T 的函数时,广义拟能密度守恒:

$$\frac{\partial N^2\omega E}{\partial T}+\nabla_1\cdot\vec{C}_gN^2\omega E=0 \tag{21}$$

2.2 波的稳定性

考虑常定背景场(即设 N^2 不是 T 的函数)中的扰动稳定度问题,为此,对式(21)在所考虑的区域内积分,积分时设边界上没有扰动的拟能通量,则式(21)变为

$$\iint_D\frac{\partial}{\partial T}(N^2\omega E)\,ds=0$$

式中 D 是积分域。利用 E 的定义和频散关系(11),得到

$$\iint_D\frac{N^2}{2}\frac{\partial}{\partial T}\left[A_0^2\left(f^2+\frac{N^2}{n^2}(k^2+l^2)\right)\right]ds=0 \tag{22}$$

对于不稳定扰动,振幅 A_0,波数 k,l 随时间变化,因此,积分号内的时间变化项 $\frac{\partial}{\partial T}\left[A_0^2\left(f+\frac{N^2}{n^2}(k^2+l^2)\right)\right]\neq0$,如此,式(22)显示,扰动若要不稳定发展,其必要条件应是 N^2 在区域 D 内取不同符号,就是说,如果 N^2 在域中一部分区域内为正,一部分为负,是有利于中尺度扰动发展的,N^2 在全域内为同一符号(不管是正是负),则不利于中尺度扰动的发展。

2.3 波射线方程

波射线即波能量的传播路径。如果我们设 θ 是波射线与 x 轴的夹角，则有

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{C_{gy}}{C_{gx}} = \frac{l}{k}$$

因此，

$$\frac{d_g\theta}{dt} = \frac{1}{k^2+l^2}\left(k\frac{d_g l}{dt} - l\frac{d_g k}{dt}\right) \tag{23}$$

式中 $\frac{d_g}{dt} = \frac{\partial}{\partial T} + C_{gx}\frac{\partial}{\partial X} + C_{gy}\frac{\partial}{\partial Y}$，即为沿着波射线的微分。

式(17)代入式(23)，得到

$$\frac{d_g\theta}{dt} = \frac{1}{2\omega n^2}\vec{n}\cdot(\nabla_1 N^2 \wedge \vec{K})$$

式中 $\vec{n}$ 为垂直于 x,y 平面的单位矢量，$\vec{K}$ 是水平波数矢量。

利用 $\vec{C}_g$ 的表达式(14)，上式可改写为

$$\frac{d_g\theta}{dt} = -\frac{1}{2N^2}\vec{n}\cdot(\vec{C}_g \wedge \nabla_1 N^2) \tag{24}$$

这是波在传播过程中，控制其能量传播路径即波射线折射的方程。显见，射线的弯曲是由 N^2 的空间变化引起的，对水平均匀的 N^2，射线为直线，当 N^2 为 x,y 函数时，波射线发生折射，呈弯曲形状。由式(24)还可发现，当 $N^2>0$ 时，射线总是向着 N^2 的梯度方向折射，即向着 N^2 小值区域折射。

2.4 波射线的计算

可以利用式(24)计算波射线，也可以利用波射线的定义，对给定的 $N^2=N^2(x,y)$ 分布，算出波射线分布。按定义，波射线的计算公式可写为

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = \dfrac{N^2}{n^2\omega}k \\ \dfrac{dY}{dt} = \dfrac{N^2}{n^2\omega}l \\ \dfrac{d_g k}{dt} = +\dfrac{1}{2\omega}\dfrac{k^2+l^2}{n^2}\dfrac{\partial N^2}{\partial X} \\ \dfrac{d_g l}{dt} = -\dfrac{1}{2\omega}\dfrac{k^2+l^2}{n^2}\dfrac{\partial N^2}{\partial Y} \\ \dfrac{d_g\omega}{dt} = \dfrac{1}{2\omega}\dfrac{k^2+l^2}{n^2}\dfrac{\partial N^2}{\partial T} \end{cases} \tag{25}$$

作为例子，我们计算 N^2 只是空间函数时的波射线。计算是用四阶 Runge-Kutta 方法进行的。计算时先给定初始的 k,l，由于 N^2 不随 T 变，因此，(25)的最后一式右边为零，这时沿着波射线 ω 为常值，如此，初始 ω 可由频散关系来确定。除了有特定说明外，计算区域为 300km×300km，H=10km，$m=2$。

图 1 给出了 $N^2=10^{-4}/\mathrm{s}^2$ 时的群速分布。曲线 a 是初始波数 $k=\frac{2\pi}{10^6}$，$l=\frac{2\pi}{7\times10^5}$ 时计算得到的群速分布，曲线 b 是初始 k,l 的波长 L_x,L_y 都是 100km 的群速分布，曲线 c 是初始波长 $L_x=70\mathrm{km}$，$L_y=100\mathrm{km}$ 的群速分布。由图显见，这时群速是直线传播的，即波射线为

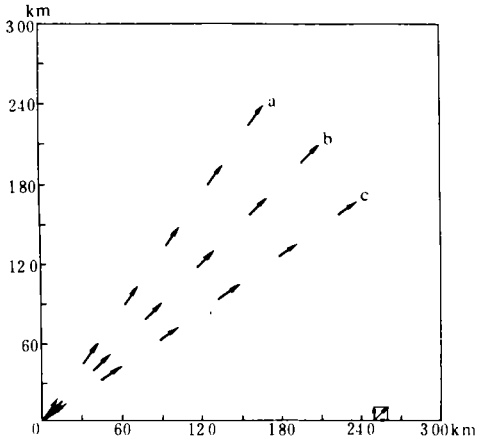

图 1　群速分布图

($N^2=10^{-4}/s^2$,初始波长:a. $L_x=100$km,$L_y=70$km;b. $L_x=L_y=100$km;c. $L_x=70$km,$L_y=100$km;右下方格为群速单位尺度,即 $C_{gx}=C_{gy}=10$m/s)

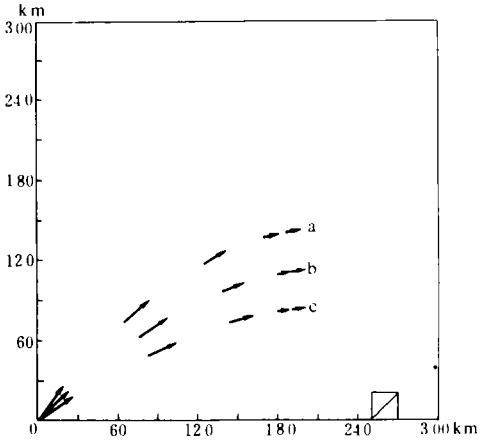

图 2　群速分布图

($N^2=10^{-4}-5\times10^{-10}X$,余同图 1)

直线,这与式(24)给出的结果完全一致。

图 2 给了 N^2 随 X 线性变化,即 $N^2=10^{-4}(1-5\times10^{-6}X)$时的群速分布图。显见,由于 N^2 的非均匀性,波射线(群速的传播路径)发生折射,向小的 N^2 区域折射,即波能量向 N^2 小的区域传播。

我们还计算了 $N^2=10^{-4}(1-5\times10^{-6}Y)$时的群速分布(图略),计算结果同样显示,能量向 N^2 小值区折射现象非常清楚,而且,与图 2 所示一样,波能量在传播过程中有能量的辐合。

图 3 给出了 N^2 等值线分布呈同心圆状,N^2 由里向外增大时的群速分布,同样清楚地显示出能量向 N^2 小值中心集中的现象,从而可能造成垂直运动发展。可以说,惯性重力内波的能量输送是产生中尺度系统的一种触发机制。

由上面计算易知,由于不同波数的波能量向小的 N^2 区传播并集中,因此,在 N^2 小值区有可能产生新的系统,造成天气变化。此外,由式(24)显见,对于给定的初始波数 k 和 l(也就给定了 ω),波射线的形状决定于 N^2 的梯度,梯度越大,波射线的弯曲也越大。图 4 给定了不同 N^2 梯度的波射线。由图显见,随 N^2 梯度的增大,波射线向小值 N^2 区域的折射也越大。

我们还计算了非静力近似下的波射线,结果显示,与静力近似下的波射线相比,两者没有什么差别,这说明静力近似对百公里大小的中尺度系统的研究是足够精确的。

3　N^2 的垂直变化对重力内波波射线的作用

下面考虑常值西风气流 $\bar{u}$ 下,N^2 随 Z 变化时的情形。为简单起见,我们讨论尺度为 10km 左右的系统,这时,可以略去 f 的作用,但必须是非静力的,并且进一步考虑二维情况,设扰动与 y 无关,这时,线性方程组可写为

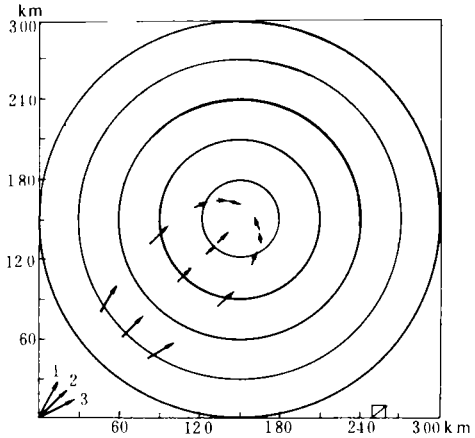

图 3 群速分布图

($N^2=10^{-9}[(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2]^{1/2}$, $X_0=Y_0=150$km,余同图 1)

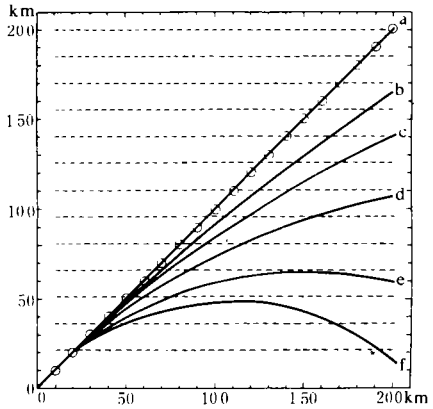

图 4 不同 N^2 梯度的波射线:初始波长 $L_x=L_y=100$km

(a. $N^2=2\times10^{-4}$, b. $N^2=2\times10^{-4}+2.5\times10^{-10}Y$, c. $N^2=2\times10^{-4}+5\times10^{-10}Y$, d. $N^2=2\times10^{-4}+10^{-9}Y$, e. $N^2=2\times10^{-4}+2\times10^{-9}Y$, f. $N^2=2\times10^{-4}+2.5\times10^{-9}Y$,虚线为 N^2 等值线,实线为波射线)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+\bar{u}\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \dfrac{\partial w}{\partial t}+\bar{u}\dfrac{\partial w}{\partial x}-\theta=-\dfrac{\partial p}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial t}+\bar{u}\dfrac{\partial \theta}{\partial x}+N^2w=0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0 \end{cases} \tag{26}$$

式中变量与式(2)相同 。

由式(26)消去 θ,u,p,得到

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+N^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \tag{27}$$

同前,设 N^2 是时空的缓变函数,引入缓变变量 X,Z,T,即有

$$(X,Z,T)=\varepsilon(x,z,t)$$

$\varepsilon\ll1$。设式(27)有形式解:

$$W=B(X,Z,T)e^{\frac{i}{\varepsilon}\psi(X,Z,T)} \tag{28}$$

则有

$$\omega=-\frac{\partial\psi}{\partial T},\ k=\frac{\partial\psi}{\partial X},\ m=\frac{\partial\psi}{\partial Z}$$

把 B 展成 ε 的幂级数:

$$B=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j B_j \tag{29}$$

代入(27),得零级近似方程:

$$(\omega - k\bar{u})^2 = \frac{k^2N^2}{k^2 + m^2} \tag{30}$$

以及群速表达式:

$$\begin{cases} C_{gx} = \bar{u} + \dfrac{m^2N}{(k^2 + m^2)^{3/2}} \\ C_{gz} = -\dfrac{kmN}{(k^2 + m^2)^{3/2}} \end{cases} \tag{31}$$

同理,由一级近似方程可得到关于 $N^2=N^2(Z)$ 情况下的波的守恒律,以及波的稳定性判据。为省篇幅,这里只给出这种情况下的波射线计算。

对 $N^2=N^2(Z)$ 的背景场,由波射线的定义,计算波射线的方程组可写为

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = \bar{u} + \dfrac{m^2N}{(k^2 + m^2)^{3/2}} \\ \dfrac{dZ}{dt} = -\dfrac{kmN}{(k^2 + m^2)^{3/2}} \\ \dfrac{d_gk}{dt} = 0 \\ \dfrac{d_gm}{dt} = -\dfrac{k^2}{2(k^2 + m^2)(\omega - k\bar{u})}\dfrac{\partial N^2}{\partial Z} \\ \dfrac{d_g\omega}{dt} = 0 \end{cases} \tag{32}$$

作为例子,我们取下述三种 N^2 廓线进行计算:

(1) $N = 1 \times 10^{-2} = N_a$

(2) $N = (1.5 - 1.4\dfrac{Z}{H}) \times 10^{-2} = N_b$

(3) $N^2 = 2.5397 \times \left[(11.19\dfrac{Z}{H} + 1)e^{-(11.19\frac{Z}{H}+1)} - e^{-1}\right] = N_c$

图 5 给出了 $N=N_c$ 的廓线,它取自文献[5],与实测比较接近。计算区域取 x 方向为 100km,z 方向为 10km(即 H=10km)。计算时,初始波长取 $L_x=10$km,$L_z=10$km,$\bar{u}=10$m/s。

图 6—8 分别给出了 $N=N_a,N_b,N_c$ 时的波射线。由图显见,对 $N=N_a$(即均匀层结)波射线为直线,没有折射产生,当 N 不均匀时,波射线发生折射,对 $N=N_b$,即 N 随高度线性减小时,波能量的传播在临界高度上发生反射(图 7),波射线切于临界层,这是由于在临界层上,群速趋于零,而 $\bar{u}$ 对波的传播起主要作用所致。当 $N=N_c$ 时,图 8 显示,波射线对临界层是渐近的,就是说,波射线要无限长的时间才能达到临界层,在此期间,波能量变为零,这意味着波能量全部被平均气流吸收。这是两类不同类型的临界层,前者起反射作用,后者起吸收作用。我们的计算结果与 Lighthill[6]从理论上得到的图形和结论完全相似。

4　结　语

文中利用 WKB 近似分别讨论了层结的水平非均匀性对惯性重力内波和垂直非均匀

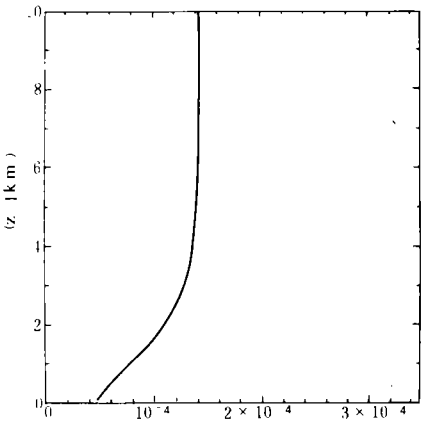

图 5 $N=N_c$ 的廊线(引自文献[5])

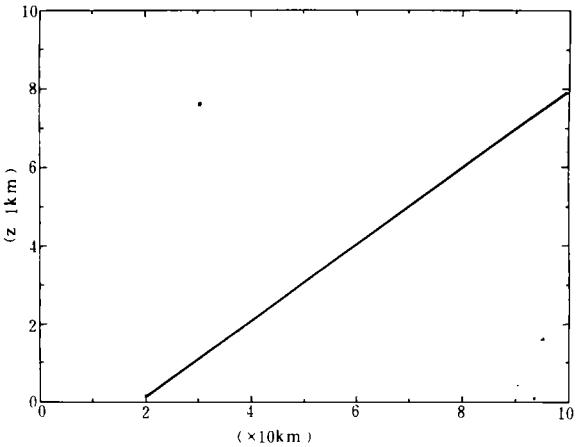

图 6 $N=N_a$ 的波射线

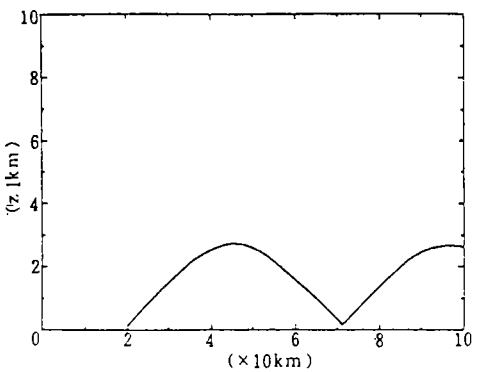

图 7 $N=N_b$ 的波射线

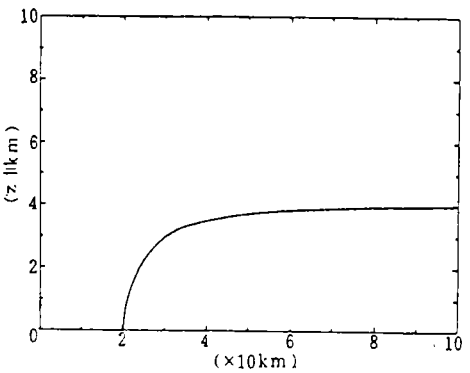

图 8 $N=N_c$ 的波射线

性对重力内波能量传播路径的影响，得到如下结果：

(1)层结 N 为常值时，波能量守恒，波射线为直线。当 N 是时空函数时，波射线发生折射，波能量不再守恒。

(2)当 N 只是时间函数时，广义波作用量 ωE 守恒，N 的空间变化是造成 ωE 变化的原因。

(3)N 的时间变化造成广义波拟能 $N^2\omega E$ 的变化，当 N 不随时间变化时，广义波拟能守恒。

(4)N^2 在区域中具有不同符号有利于中尺度扰动不稳定发展，全域中 N^2 符号相同不利于扰动发展。

(5)对于 $N^2>0$ 的稳定层结，惯性重力内波波射线总是向 N^2 小值区折射，波射线的弯曲是由 N^2 的空间变化引起的；N^2 的小值区，是波能量的集中区，这里有可能产生新的

中尺度系统。

(6)对 $N=N(Z)$ 的稳定层结,重力内波存在两类临界层,一类波射线切于临界层,波发生反射,是波能量的反射区;另一类波射线渐近地趋近临界层,是波能量的吸收区。

致谢:本文第一部分的部分计算是王兴宝同志进行的。

参考文献

[1] Hines C O. Gravity waves in the atmosphere. Nature, Lond, 1972, 239: 73—78.

[2] Tepper M. A proposed mechanism of squall lines: The presure jump line. J Meteor, 1950, 7: 21—29.

[3] Raymond D J. A model for predicting the movement of continuously propagating convective storms. J A S, 1975, 32: 1308—1317.

[4] 巢纪平. 非均匀层结大气中的重力惯性波及其在暴雨预报中的初步应用. 大气科学, 1984, 4: 230—236.

[5] Kuo H L and Seitter K L. Instability of shearing geostrophic currrents in neutral and partly unstable atmosphere. J Atmos Sci, 1985, 42: 331—345.

[6] Lighthill J. Waves in Fluids. Cambridge University Press, 1978, p 504.

THE EFFECTS OF NON-HOMOGENEOUS STRATIFICATION ON RAYS OF INTERNAL GRAVITY WAVES

Lu Keli　Xu Yamei

(*Department of Atmospheric Sciences, Nanjing University, Nanjing*, 210008)

Abstract

The influences of non-homogeneous stratification on energy propagating path of internal gravity waves are discussed by using WKB approximation. The conditions of conservation of generalized energy, action and enstrophy are obtained. A necessary condition for instability of internal gravity wave is derived. The equation governing refraction of wave rays and two kinds of critical layer are also yielded. Finally, the wave rays for different stratifications are calculated by using a Runge-Kutta method.

Key words: Non-homogeneous stratification, Internal gravity wave, Wave ray.