第52卷 第2期　　气 象 学 报　　Vol. 52, No. 2
1994年5月　　ACTA METEOROLOGICA SINICA　　May, 1994

斜压大气波动准共振与中高纬低频振荡*

陆维松

(南京气象学院,南京,210044)

提　要

从准地转两层模式出发,可能产生两种情况准共振:(1)纯正压波;(2)两个斜压波和一个正压波。本文对(2)求得准共振三波振幅的解析解和波能量变化周期的近似式。此近似式和数值计算结果两者都表明,斜压情况能量变化周期比正压情况更容易趋于准共振频率偏离 $\Delta\omega$ 自身周期 $\frac{2\pi\varepsilon}{\Delta\omega}$。从物理上指出,波的位相与波振幅之间存在着一个反馈机制,由正压波与斜压波之间的慢变相差引起的动能与有效位能的互相转换,形成了正压波和斜压波交替增强和减弱的低频振荡,其振荡周期与上述近似式一致。当 $\Delta\omega \sim (0.1—0.02)o(\omega_j)$ 时,平均能量周期为12—43d,而当 $\Delta\omega = 0$ 时,平均周期为366d。因此,频率偏离 $\Delta\omega$ 出现仍可能是产生斜压大气中高纬低频振荡的一种新的重要机制。

关键词:斜压波、正压波、准共振、中高纬低频振荡

1　引言

中高纬低频振荡是气候动力学中的一个重要问题,它与持续性天气形势紧密相联,特别与熟知阻塞密切相关,这些现象已成为当前国内外大气科学研究的前沿课题。Wallace等根据观测分析讨论中高纬低频变化的性质和原因[1],指出特别涉及6种机制,波相互作用列为第5种机制。观测到的大气低频变化对一种或几种这样的机制的依赖程度决定着改进长期天气预报的可能程度。由观测事实和数值试验所得结果表明,外部强迫作用仅仅是中高纬低频振荡变化的一小部分原因,而大气环流数值模拟结果清楚表明,中高纬大气即使在没有外部强迫作用的情况下也具有相当可观的变化,甚至于在很低频率部分也是如此,因此,有必要考虑大气内部低频变化的原因。Egger,Charney等及Tung和Lindzen分别提出了阻塞形势是由波与波或波与流的共振引起的[2]。这些理论研究得到观测资料分析(如Colucci等[3])和全球大气环流模式资料分析(Chen和Shukla[4])的支持。多平衡态理论的首创者之一Wiin-Nielsen曾指出[5],阻塞形势作为一个非线性的全球现象也许取决于波-波相互作用,而不是波-流相互作用。Fjortoft、伍荣生[6]、Jones[7]等先后研究了正压和斜压大气波动共振,作者(1990)将共振条件放宽为准共振条件,即 $\vec{K}_1 + \vec{K}_2 + \vec{K}_3 = 0$ 和 $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \Delta\omega$,$\Delta\omega$ 为频率偏离,$\vec{K}_j$ 和 ω_j 分别为第j个波的波矢和频率,并对

* 1992年3月12日收到原稿,1992年8月6日收到修改稿。国家自然科学基金资助项目。

正压大气波振导得 $\Delta\omega$ 可能是产生中纬低频振荡的一种新的重要机制[8]。但斜压性对中高纬低频振荡有着重要的作用[9]，已为许多气象学者所共识，本文进一步推广到斜压大气波动准共振与中高纬低频振荡的研究。

2 斜压波动准共振的基本方程

斜压准地转两层模式的无量纲位涡方程为

$$\begin{cases}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right)[\nabla^2\psi_1+F_1(\psi_2-\psi_1)+\beta y]=0 & (1)\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right)[\nabla^2\psi_2-F_2(\psi_2-\psi_1)+\beta y]=0 & (2)\end{cases}$$

式中 ψ_n 表示第 n 层的流函数，n 层 Froude 数 $F_n=\left(\frac{L}{L_n}\right)^2$，$L_n$ 和 L 分别为 n 层 Rossby 变形半径和几何长度尺度。一般可设 $F_1=F_2=F$，且令

$$\psi=\frac{1}{2}(\psi_1+\psi_2)\qquad \Psi=\frac{1}{2}(\psi_1-\psi_2) \tag{3}$$

则可将(1)、(2)分解为正压和斜压 Rossby 波方程，

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}+\mathrm{J}(\psi,\nabla^2\psi)+\mathrm{J}(\Psi,\nabla^2\Psi)=0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2-2F)\Psi+\beta\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\mathrm{J}(\psi,\nabla^2\Psi)+\mathrm{J}(\Psi,\nabla^2\psi)-2F\mathrm{J}(\psi,\Psi)=0 \tag{5}$$

取 $\psi=-\bar{u}y+\varepsilon\psi',\Psi=\varepsilon\Psi'$（即 $\psi_n=-\bar{u}y+\varepsilon\psi'_n,n=1,2$） (6)

和 $T_0=t,\quad T=\varepsilon t$ (7)

式(6)、(7)代入式(4)、(5)两式得

$$\begin{cases}\mathscr{L}_1(\psi)+\varepsilon\left[\frac{\partial}{\partial T}\nabla^2\psi+\mathrm{J}(\psi,\nabla^2\psi)+\mathrm{J}(\Psi,\nabla^2\Psi)\right]=0 & (8)\\ \mathscr{L}_2(\Psi)+\varepsilon\left[\frac{\partial}{\partial T}(\nabla^2-2F)\Psi+\mathrm{J}(\psi,\nabla^2\Psi)+\mathrm{J}(\Psi,\nabla^2\psi)-2F\mathrm{J}(\psi,\Psi)\right]=0 & (9)\end{cases}$$

式中 ψ,Ψ 均已略去撇号，且

$$\mathscr{L}_1=\left(\frac{\partial}{\partial T_0}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2+\beta\frac{\partial}{\partial x},\quad \mathscr{L}_2=\left(\frac{\partial}{\partial T_0}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)(\nabla^2-2F)+\beta\frac{\partial}{\partial x} \tag{10}$$

令 $\psi=\varphi_0+\varepsilon\varphi_1+\varepsilon^2\varphi_2+\cdots\cdots$ ， $\Psi=\Psi_0+\varepsilon\Psi_1+\varepsilon^2\Psi_2+\cdots\cdots$ (11)

代入式(8)、(9)，得 ε 的各阶方程组

$$0(\varepsilon^0):\mathscr{L}_1(\varphi_0)=0\quad,\quad \mathscr{L}_2(\Psi_0)=0 \tag{12}$$

$$0(\varepsilon^1):\mathscr{L}_1(\varphi_1)=-\left[\frac{\partial}{\partial T}\nabla^2\varphi_0+\mathrm{J}(\varphi_0,\nabla^2\varphi_0)+\mathrm{J}(\Psi_0,\nabla^2\Psi_0)\right] \tag{13}$$

$$\mathscr{L}_2(\Psi_1)=-\left\{\frac{\partial}{\partial T}(\nabla^2-2F)\Psi_0+\mathrm{J}(\varphi_0,\nabla^2\Psi_0)+\mathrm{J}(\Psi_0,\nabla^2\varphi_0)-2F\mathrm{J}(\varphi_0,\Psi_0)\right\} \tag{14}$$

……

由式(13)、(14)右端可见，非线性三波准共振有两种情况：(1)纯正压波($\varphi_0,\varphi_0,\varphi_0$)，即三

个波均为正压波；(2) 混合波(Ψ_0,φ_0,Ψ_0)，即两个斜压波和一个正压波。情况(1) 已由作者在文献[8] 中讨论，本文主要讨论情况(2) 混合波准共振，即两个斜压波和一个正压波构成的三波组，式(12) 的解取为

$$\begin{cases}\Psi_0 = \sum_{n=1}^{2}[a_n(T)\exp(i\theta_n) + a_n^*(T)\exp(-i\theta_n)] & (15)\\ \varphi_0 = a_3(T)\exp(i\theta_3) + a_3^*(T)\exp(-i\theta_3) & (16)\end{cases}$$

式中 $\theta_j = k_jx + l_jy - \omega_jt$ $(j = 1,2,3)$，且伪波数 $K_{np}^2 = K_n^2 + 2F$ 和

$$\omega_n = k_n(\bar{u} - \frac{\beta}{K_{np}^2})\ (n = 1,2),\omega_3 = k_3(\bar{u} - \frac{\beta}{K_3^2}) \tag{17}$$

式中 $K_j^2 = k_j^2 + l_j^2$，k_j、l_j 分别为第 j 个波在 x 和 y 方向波数。将式(15)、(16) 代入式(13)、(14) 两式右端，消去久期项，求得可解性条件，即得三波准共振耦合方程为

$$\begin{cases}\frac{da_1}{dT} = b\alpha_1a_2^*a_3^*e^{i\Delta\omega t} & (18)\\ \frac{da_2}{dT} = b\alpha_2a_1^*a_3^*e^{i\Delta\omega t} & (19)\\ \frac{da_3}{dT} = b\alpha_3a_1^*a_2^*e^{i\Delta\omega t} & (20)\end{cases}$$

已略去与式(18)—(20) 呈复共轭方程，式中

$$\begin{cases}b = k_2l_1 - k_1l_2 = k_1l_3 - k_3l_1 = k_3l_2 - k_2l_3 & (21)\\ \alpha_1 = (K_{2p}^2 - K_3^2)/K_{1p}^2,\quad \alpha_2 = (K_3^2 - K_{1p}^2)/K_{2p}^2,\quad \alpha_3 = (K_{1p}^2 - K_{2p}^2)/K_3^2 & (22)\end{cases}$$

推导式(18)—(20) 应用了准共振条件

$$\vec{K}_1 + \vec{K}_2 + \vec{K}_3 = 0 \quad 和 \quad \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \Delta\omega \tag{23}$$

式(18)—(20) 与文献[8] 中正压情况形式一致，但波数定义和振幅 a_j 表示的波不同。当 $\Delta\omega = 0$ 时，式(18)—(20) 与 Jones(1979)[7] 的耦合方程相同。

3　低频波解和低频能量反馈机制

取　$a_j = A_je^{i\eta_j}, A_j = |a_j|$　(24)

式(24) 代入式(18)—(20)，并把实、虚部分开得

$$\begin{cases}\frac{dA_j}{dT} = b\alpha_jA_mA_n\cos\eta & (25)\\ \frac{d\eta_j}{dT} = -b\alpha_j\frac{A_mA_n}{A_j}\sin\eta \quad (j,m,n = 1,2,3,且\ j \neq m \neq n) & (26)\end{cases}$$

式中 $\eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 - \Delta\omega t$。按文献[8] 中正压情况的方法，由式(25) 可得三波能量和涡度拟能守恒为

$$K_{1p}^2A_1^2 + K_{2p}^2A_2^2 + K_3^2A_3^2 = M_1 \tag{27}$$

和

$$K_{1p}^4A_1^2 + K_{2p}^4A_2^2 + K_3^4A_3^2 = M_2 \tag{28}$$

式中 M_1、M_2 为积分常数，则得 Manley-Rowe 关系式为

$$W(T) = \frac{1}{\alpha_1}[A_1^2 - A_1^2(0)] = \frac{1}{\alpha_2}[A_2^2 - A_2^2(0)] = \frac{1}{\alpha_3}[A_3^2 - A_3^2(0)] \tag{29}$$

式中 $A_j(0)$ 为 A_j 在 $T=0$ 的值。类似由式(25)、(26)得运动不变量 M,即

$$M = A_1A_2A_3\sin\eta + \frac{\Delta\omega}{2\varepsilon}\frac{A_j^2}{b_j\alpha_j} \qquad (j\text{ 任取 }1,2,3) \tag{30}$$

和式(29)求得 W 和振幅 A_j 的解析解为

$$\begin{cases} W = W_2 + (W_1 - W_2)cn^2(Nb\xi T) & (31)\\ A_1^2 = A_1^2(0) + \alpha_1 W_2 + \alpha_1(W_1 - W_2)cn^2(Nb\xi T) & (32)\\ A_2^2 = A_2^2(0) + \alpha_2 W_2 + \alpha_2(W_2 - W_1)sn^2(Nb\xi T) & (33)\\ A_3^2 = A_3^2(0) + \frac{\alpha_3}{\nu^2}(\nu'^2 W_1 + W_2) + \frac{\alpha_3(W_1 - W_2)}{\nu^2}dn^2(Nb\xi T) & (34)\end{cases}$$

式中已设 $G=0$ 有3个不相等实根,且满足 $W_1 < W_2 < W_3$,$\xi = \sqrt{m}$,$m = \alpha_1\alpha_2\alpha_3$,$N = \sqrt{W_3 - W_1}$,$\nu^2 = \frac{W_2 - W_1}{W_3 - W_1}$,$\nu'^2 = 1 - \nu^2$,不失一般性,已设 $K_{2p}^2 < K_3^2 < K_{1p}^2$,三次代数式 G 为

$$G(W) = -2b^2m(W^3 + \beta_1 W^2 + \beta_2 W + \beta_3) \tag{35}$$

式中

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{A_1^2(0)}{\alpha_1} + \frac{A_2^2(0)}{\alpha_2} + \frac{A_3^2(0)}{\alpha_3} - \frac{1}{m}\frac{(\Delta\omega)^2}{4\varepsilon^2b^2} & (36)\\ \beta_2 = \frac{A_1^2(0)A_2^2(0)}{\alpha_1\alpha_2} + \frac{A_1^2(0)A_3^2(0)}{\alpha_1\alpha_3} + \frac{A_2^2(0)A_3^2(0)}{\alpha_2\alpha_3} - \frac{1}{m}\frac{(\Delta\omega)^2A_j^2(0)}{2\varepsilon^2b^2\alpha_j} + \frac{M\Delta\omega}{m\varepsilon b} & (37)\\ \beta_3 = \frac{A_1^2(0)A_2^2(0)A_3^2(0)}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} - \frac{1}{m}\left[M^2 + \frac{(\Delta\omega)^2A_j^4(0)}{4\varepsilon^2b^2\alpha_j^2} - \frac{\Delta\omega MA_j^2(0)}{\varepsilon b\alpha_j}\right] & (38)\end{cases}$$

W 的周期 P 由式(31)可得

$$P = \frac{2\tau}{Nb\xi} \approx \frac{\pi}{Nb\xi}(1 + \frac{1}{4}\nu^2 + \cdots\cdots) \tag{39}$$

式中 $\tau(\nu) = \int_0^{\pi/2}(1 - \nu^2\sin^2\mu)^{-1/2}\mathrm{d}\mu$,对周期 P 作粗略估计。如取 $b \sim k_j^2 \sim 10^{-12}/m^2$,$\xi \sim 1.0$,$N \sim A_j \sim \varphi \sim 10^6 m^2/S$,$\nu \sim 1.0$,则由式(39)右端取两项近似得

$$P \sim 45(d) \tag{40}$$

显然,斜压大气混合三波能量变化周期为1.5月左右,这与通常所讨论的中高纬低频振荡周期30—50d较为一致。若 $\Delta\omega = 0$,则式(32)—(34)与Jones的结果相同[7]。与Jones研究不同,本文中 $\Delta\omega$ 对周期 P 有重要影响。与正压情况不同,本文需考虑正压波与斜压波之间的相差引起动能与有效位能之间的转换从而影响周期 P。

式(26)代入式(25),式(30)代入式(26)分别得

$$\frac{\mathrm{d}\ln A_j}{\mathrm{d}T} = -\cot\eta\frac{\mathrm{d}\eta_j}{\mathrm{d}T} \tag{41}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}\eta_j}{\mathrm{d}T} = \frac{\Delta\omega}{2\varepsilon} - \frac{Mb\alpha_j}{A_j^2} \qquad (j = 1,2,3) \tag{42}$$

由式(41)、(42)两式可见,正压和斜压波的复振幅 a_j 的位相 $\eta_j(T)$ 与它的实振幅 $A_j(T)$ 之间有一反馈调节机制。考虑到正压波 ψ 与斜压波 Ψ 的位相差可近似由 φ_0 与 Ψ_0 的相差表示,而 φ_0 与 Ψ_0 的相差由两部分组成:(i)慢变相差 $(\eta_1 - \eta_3)$、$(\eta_2 - \eta_3)$;(ii)快变相差 $(\theta_1 - \theta_3)$、$(\theta_2 - \theta_3)$。因快变相差仅在快变时间尺度 t 内对载波有影响而对波包振幅几乎没有影响,故可不考虑。下面仅讨论慢变相差的作用。

考虑初始时刻有两个有限振幅的斜压波（或温度波）a_1、a_2，而正压波（或平均位势波）a_3很小，即A_1、$A_2 \gg A_3$，若取$b<0$（由计算表明存在着许多组$b<0$的准共振矢量），和$0<\eta<\frac{\pi}{2}$，又由前面的$K_{2p}^2<K_3^2<K_{1p}^2$，有$\alpha_1<0$、$\alpha_2<0$、$\alpha_3>0$，从而$M=A_1A_2A_3\sin\eta+\frac{\Delta\omega}{2\varepsilon}\frac{A_1^2}{b\alpha_1}>0$，则$Mb<0$，且式(42)化为

$$\begin{cases}\frac{d\eta_n}{dT}=\frac{\Delta\omega}{2\varepsilon}+\frac{|Mb\alpha_n|}{A_n^2} \quad (n=1,2) & (43)\\ \frac{d\eta_3}{dT}=\frac{\Delta\omega}{2\varepsilon}-\frac{|Mb\alpha_3|}{A_3^2} & (44)\end{cases}$$

(1). 取$\Delta\omega>0$，因$T=0$，$A_3 \ll A_1$、A_2，可视$A_3\to 0$，有$|Mb\alpha_3|/A_3^2>\frac{\Delta\omega}{2\varepsilon}$，则$\frac{d\eta_3}{dT}<0$，而式(43)总有$\frac{d\eta_1}{dT}$、$\frac{d\eta_2}{dT}>0$。则$T=0$，有

$$\frac{d\eta_1}{dT}、\frac{d\eta_2}{dT}>0,\frac{d\eta_3}{dT}<0,和\cot\eta>0 \quad (0<\eta<\frac{\pi}{2}) \tag{45}$$

式(45)代入式(41)，得

$$\frac{d\ln A_1}{dT}、\frac{d\ln A_2}{dT}<0,\frac{d\ln A_3}{dT}>0 \tag{46}$$

由式(46)可得，A_1、A_2随T增加而减小，而A_3随T增加而增加，由于三波总能量守恒，两个斜压波减少的能量恰好是向正压波输送的能量。其反馈机制是，两个斜压波（或温度波）的位相η_1、η_2随时间T增加，一个正压波（或位势波）的位相η_3随时间T减少，若$T=0$，$\eta_1=\eta_2=\eta_3$，则温度波与位势波之间将产生慢变相差$(\eta_1-\eta_3)$、$(\eta_2-\eta_3)$，且$\eta_1-\eta_3>0$、$\eta_2-\eta_3>0$，即两个温度波将随时间T缓慢地落后于一个位势波，将引起有效位能转化为动能，是斜压不稳定波的结构，使式(46)持续成立，且式(45)仍成立，$(\eta_1-\eta_3)$，$(\eta_2-\eta_3)$逐渐增大。

(2). 由于式(46)持续成立，A_1、A_2和A_3分别不断增加和减少，则存在$T=\overline{P}_0$时刻，有A_1、$A_2 \ll A_3$，即A_1、$A_2\to 0$，A_3变为有限振幅，以至$|Mb\alpha_3|/A_3^2\to(\frac{\Delta\omega}{2\varepsilon})_+$，且$\frac{d\eta_3}{dT}<0$仍成立；由于$A_1$、$A_2\to 0$，使得$|Mb\alpha_1|/A_1^2$、$|Mb\alpha_2|/A_2^2\to\infty$，因$\frac{d\eta_1}{dT}$、$\frac{d\eta_2}{dT}>0$恒成立，则由式(43)、(44)知，$\eta_1$、$\eta_2$随$T$增加而急剧增加，而$\eta_3$随$T$增加而减小很少。位相$\eta_j$的这种变化将从两方面影响$A_j$：

(a). 由式(43)、(44)和η的定义，得$\frac{d\eta}{dT}\propto|Mb\alpha_1|/A_1^2+|Mb\alpha_2|/A_2^2>0$，因$A_1$、$A_2\to 0$，则$\eta$随$T$增加而急剧增大。可见将由$T=0$时$0<\eta<\frac{\pi}{2}$，到$T=\overline{P}_0$时变为$\frac{\pi}{2}<\eta<\pi$，从而$\cot\eta>0$变为$\cot\eta<0$。式(45)此时化为

$$\frac{d\eta_1}{dT}、\frac{d\eta_2}{dT}>0,\frac{d\eta_3}{dT}<0 \text{ 和 } \cot\eta<0 \tag{47}$$

式(47)代入式(41)，得

$$\frac{d\ln A_1}{dT}、\frac{d\ln A_2}{dT}>0 \text{ 和 } \frac{d\ln A_3}{dT}<0 \tag{48}$$

此时式(48)与式(46)正好相反，即A_1、A_2和A_3随时间T增加而分别增大和减少，仍由三

波总能量守恒，两个斜压波增加的能量正是正压波输送的能量。又将趋于初始状态 A_1、$A_2 \gg A_3$。

(b). 由 η_1、η_2 随 T 急剧增大和 η_3 随 T 减小很小，可得慢变相差由 $(\eta_1-\eta_3)>0$、$(\eta_2-\eta_3)>0$ 急剧增加，以至同样到达 $T=\overline{P}_0$ 时，

$$(\eta_1-\eta_3)\geqslant\pi、(\eta_2-\eta_3)\geqslant\pi \tag{49}$$

这时，温度波与位势波的配置，使得动能向有效位能转换，则位势波将输出动能而衰减，两个温度波将得到有效位能而增强。

式(49) 代入 η 的定义和 $T=\overline{P}_0$，得

$$\eta=\eta_1+\eta_2+\eta_3-\frac{\Delta\omega}{\varepsilon}\overline{P}_0\geqslant 2\pi+3\eta_3-\frac{\Delta\omega}{\varepsilon}\overline{P}_0\approx 2\pi-\frac{\Delta\omega}{\varepsilon}\overline{P}_0 \tag{50}$$

因 $T=0, 0<\eta_3<\frac{\pi}{6}$，而 η_3 随 T 增加而缓慢减少，可取 $\eta_3\approx 0$。又由(a) 中，$T=\overline{P}_0$ 时，$\frac{\pi}{2}<\eta<\pi$ 或 $\eta=\frac{r\pi}{2}(2>r>1)$，代入式(50) 中 η 的临界值 $\eta\approx 2\pi-\frac{\Delta\omega}{\varepsilon}\overline{P}_0$，

得
$$\eta=\frac{r}{2}\pi\approx 2\pi-\frac{\Delta\omega}{\varepsilon}\overline{P}_0，或\ \overline{P}_0\approx(2-\frac{r}{2})\pi\varepsilon/\Delta\omega \tag{51}$$

则
$$\frac{\pi\varepsilon}{\Delta\omega}\lesssim\overline{P}_0\lesssim\frac{3\pi\varepsilon}{2\Delta\omega} \tag{52}$$

临界时间 $T=\overline{P}_0$ 是慢变相差由 $0<\eta_1-\eta_3、\eta_2-\eta_3<\pi$ 急剧增加到 $\pi<\eta_1-\eta_3、\eta_2-\eta_3<2\pi$ 再增加到 $2\pi<\eta_1-\eta_3、\eta_2-\eta_3<3\pi$(或 $0<\eta_1-\eta_3、\eta_2-\eta_3<\pi$) 这一周期的时间，也是正压波和两个斜压波之间动能与有效位能互相转换的周期。在下文将证明，式(52) 给出的粗略周期 $\overline{P}_0$ 与三波能量变化周期式(39) 是一致的。

4 计算例子和周期近似式

引入 $\vec{K}_0$ 矢量，

$$\vec{K}_1=-\frac{1}{2}(\vec{K}_3-\vec{K}_0),\qquad \vec{K}_2=-\frac{1}{2}(\vec{K}_3+\vec{K}_0) \tag{53}$$

将式(23)、(17) 消去 ω_j，再应用式(53)，得

$$\rho_1K_0^4+2\rho_2K_0^2+\rho_3=0 \tag{54}$$

式中
$$\begin{cases}\rho_1=1+B\\ \rho_2=8F+K_3^2(\cos2\phi'-2\tan\phi_3\sin2\phi')+B(8F-K_3^2\cos2\phi')\\ \rho_3=(8F+K_3^2)[(8F-3K_3^2)+B(8F+K_3^2)]\end{cases} \tag{55}$$

其中 $\phi'=\phi_0-\phi_3$，且 $(k_j,l_j)=K_j(\cos\phi_j,\sin\phi_j)(j=0,1,2,3)$，$\phi_j$ 为 $\vec{K}_j$ 与 x 轴的夹角，$B=\frac{\Delta\omega}{\beta}K_3\sec\phi_3$。取 $\Delta\omega=0, F=\frac{1}{2}$，式(54) 与文献[7] 相同；取 $F=0$，式(54) 与文献[8] 相同。

由式(54) 易得 K_0 有正根的充要条件为

$$\Delta=\rho_2^2-\rho_1\rho_3\geqslant 0\quad 且\quad K_0^2\geqslant 0 \tag{56}$$

利用式(54)、(55)，则式(56) 化为

$$当\ \rho_2>0\ 且\quad 0\leqslant(1+B)(8F+K_3^2)\leqslant 4K_3^2 \tag{57}$$

$$和当\ \rho_2<0\ 且\quad 0\leqslant(1+B)(8F+K_3^2)\leqslant 2K_3^2+(\rho_2^2+4K_3^4)^{1/2} \tag{58}$$

均有 $$K_0^2=\frac{1}{\rho_1}\{-\rho_2+\sqrt{\rho_2^2-\rho_1\rho_3}\} \tag{59}$$

而当 $\rho_2<0$ 且 $$4K_3^2\leqslant(1+B)(8F+K_3^2)\leqslant 2K_3^2+(\rho_2^2+4K_3^4)^{1/2} \tag{60}$$

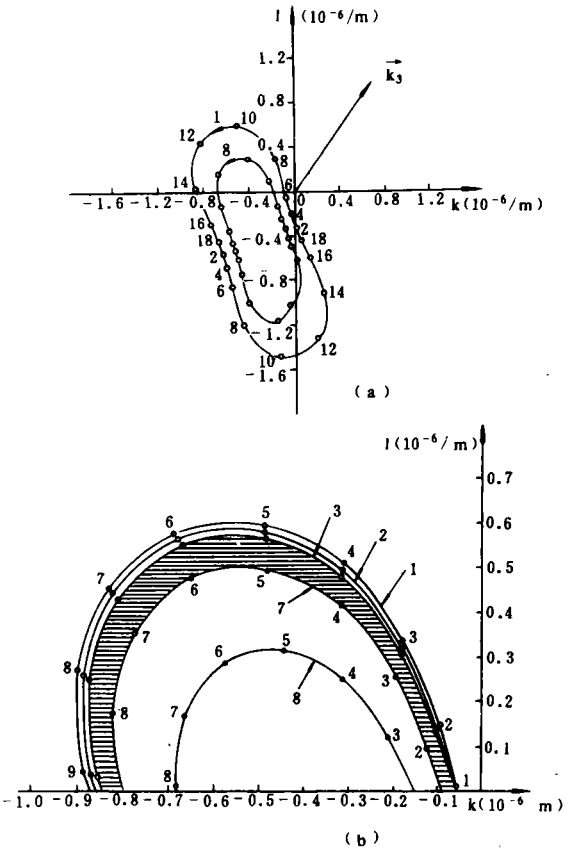
有 $$K_0^2=\frac{1}{\rho_1}\{-\rho_2-\sqrt{\rho_2^2-\rho_1\rho_3}\} \tag{61}$$

对于其它情况，(56) 式均不能成立。式(57)—(61) 是两个斜压波与一个正压波产生准共振的充要条件。由式(17)，$B=\Delta\omega/\frac{\beta\cos\phi_3}{K_3}=\frac{\Delta\omega}{|\omega_3|}$，因准共振要求 $|\Delta\omega|\leqslant 0.1\times o(\omega_j)$，则 $|B|\leqslant 10^{-1}$；$1+B\leqslant 0$ 或 $|B|\geqslant 1$ 为非共振，故 $1+B\leqslant 0$ 情况可略去。

由式(57) 和 $|B|\leqslant 0.1$，得 $F\lesssim 0.43K_3^2$。又由式(58)、(60) 两式的 $\rho_2<0$ 和 ρ_2 的定义，可得：当 $\cos(2\phi'+\phi_3)\sec\phi_3<0$ 时，$F\lesssim 0.4\frac{K_3^3}{|k_3|}$；而当 $\cos(2\phi'+\phi_3)\sec\phi_3>0$ 时，$F\lesssim\frac{K_3^2}{8}$。若 $\frac{K_3}{|k_3|}\approx\sqrt{2}$（即 $|k_3|\approx|l_3|$），则可得 F 的上界为 $F\lesssim 0.57K_3^2$。由此可见，仅当 F 较小，才能存在准共振波矢，斜压情况比正压情况增加了对 F 或长度尺度的限制。

仍按文献〔6〕、〔8〕，采用叶笃正研究波状基流动力学所采用的4种波状基流[10]，即 Ⅰ：$k_3=0.63\times10^{-6}$/m，$l_3=0.86\times10^{-6}$/m；Ⅱ：$k_3=0.63\times10^{-6}$/m，$l_3=-0.86\times10^{-6}$/m；Ⅲ：$k_3=0.78\times10^{-6}$/m，$l_3=0.50\times10^{-6}$/m；Ⅳ：$k_3=0.78\times10^{-6}$/m，$l_3=-0.50\times10^{-6}$/m，和文献〔8〕中的10种频率偏离 $\Delta\omega$，即①$\Delta\omega=0$，②$\Delta\omega=0.63\times10^{-7}$/s，③$\Delta\omega=0.7876\times10^{-7}$/s，④$\Delta\omega=0.105\times10^{-6}$/s，⑤$\Delta\omega=0.1575\times10^{-6}$/s，⑥$\Delta\omega=0.315\times10^{-6}$/s，⑦$\Delta\omega=0.63\times10^{-6}$/s，⑧$\Delta\omega=1.89\times10^{-6}$/s，⑨$\Delta\omega=3.78\times10^{-6}$/s，⑩$\Delta\omega=6.3\times10^{-6}$/s。情况①、⑩分别对应于一般共振和非共振，其它情况为准共振。附图给出了基波 Ⅰ 对应的准共振波矢 $\vec{K}_1$ 和 $\vec{K}_2$ 矢端点曲线图，相同编号的圆点对应一组 $\vec{K}_1$、$\vec{K}_2$ 的矢端点，圆心为波矢始点，$\vec{K}_1$、$\vec{K}_2$ 可互换。由附图(a)、(b)可见，按 $\Delta\omega$ 由小到大，对应的准共振波矢端点曲线依次由外向里层层相套。显然，$\Delta\omega$ 越小，对应的准共振波矢 $\vec{K}_1$、$\vec{K}_2$ 的模越大。对于其它三种基波也有类似结果，图略。由附图可见，准共振波矢可取，如 $k_3=0.63\times10^{-6}$/m，$k_2=0.3044\times10^{-6}$/m，$k_1=-0.9344\times10^{-6}$/m；对应波长分别为 $L_3\approx10.0\times10^6$m，$L_2\approx20.6\times10^6$m，$L_1\approx6.7\times10^6$m，分别对应55°N 处2，1和4波，斜压波可为4波，近于天气尺度，将对超长波 k_3 起强迫作用。

用上述4种基波 $\vec{K}_3$，10 种 $\Delta\omega$，并取 $(A_1(0),A_2(0),A_3(0))$ 的 10 种组合，按(39) 式分别求得各种 $\vec{K}_3$、$\Delta\omega$、$A_j(0)$ 组合对应的能量变化周期 P，如表 1，2，3 所示。由表 1 知，当 $|A_j(0)|\leqslant 3\times10^6\mathrm{m^2/s}$ 时，周期 P 均为 22d 左右，而当 $|A_j(0)|\geqslant 4\times10^6\mathrm{m^2/s}$ 时，P 出现小于 10d 的高频振荡。当 $\Delta\omega=0.1575\times10^{-6}$/s 时，对于 4 种基波和 10 种振幅组合，均对应 $P\sim43$d(表略)。为比较，由表 2 知，当 $|A_j(0)|\leqslant 3\times10^6\mathrm{m^2/s}$，$P\sim11$—1046d，$P$ 值相当分散，没有明显地趋近于某个数值；而 $|A_j(0)|\geqslant 4\times10^6\mathrm{m^2/s}$，也有 $P<10$ 天。其它 3 种基波的 P 与表 1、2 类似。由表 3 知，除 $\Delta\omega=0$ 外，对于 $1.89\times10^{-6}/\mathrm{s}\leqslant\Delta\omega\leqslant0.063\times10^{-6}$/s，$P$ 似乎均趋近于各自的某一周期。为了较准确确定各 $\Delta\omega$ 所对应的周期，定义平均周期 $\overline{P}$ 和平均绝对周期离差 $|\overline{P'}|$，即



附图 基波 I 的准共振波矢$\vec{K}_1$、$\vec{K}_2$，曲线编号与$\Delta\omega$的10种情况序号对应，F = 0.2

((a) 圆点编号为$\phi_0/10$；(b) 圆点编号1—9对应于ϕ_0 = 60°—140°)

表1 能量变化周期$P(k_3 = 0.63\times10^{-6}/\mathrm{m}, l_3 = 0.86\times10^{-6}/\mathrm{m}, \Delta\omega = 0.315\times10^{-6}/\mathrm{s}, F = 0.2)$

A_1	A_2	A_3	ϕ_0								
			20	40	60	80	100	120	140	160	180
1	1	1	X	23.0	23.1	22.4	19.5	X	22.6	22.6	22.8
0.1	1	1	X	23.1	23.1	22.3	19.6	X	23.1	22.9	23.0
1	0.1	0.1	X	23.0	23.1	23.2	22.9	X	22.6	22.7	22.9
1	2	0.1	X	23.0	23.1	19.8	14.3	X	22.6	22.4	22.5
1	3	0.1	X	23.0	23.0	17.1	10.8	X	22.5	22.0	22.1
3	1	0.1	X	22.8	23.1	X	X	X	X	20.9	21.5
1	4	0.1	X	23.0	23.0	14.7	8.5	X	22.5	21.5	21.6
4	1	0.1	X	22.6	23.1	X	X	X	X	20.9	20.7
1	6	0.1	X	22.9	22.8	11.1	5.9	X	22.3	20.3	20.3
6	1	0.1	X	22.6	23.1	X	X	X	X	X	20.8

* 表中周期P的单位为d，初始振幅$A_1A_2A_3$的单位为$10^6\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$，$\phi_0$的单位为度，表2同

表2 能量变化周期$P(k_3 = 0.63\times10^{-6}/\mathrm{m}, l_3 = -0.86\times10^{-6}/\mathrm{m}, \Delta\omega = 0, F = 0.2)$

A_1	A_2	A_3	ϕ_0								
			20	40	60	80	100	120	140	160	180
1	1	1	220.7	402.4	45.3	32.8	61.7	602.1	533.2	304.2	219.1
0.1	1	1	288.2	603.3	115.0	113.9	107.4	686.3	533.2	316.9	246.0
1	0.1	0.1	253.3	447.3	47.1	33.5	68.2	746.7	1046.2	1023.3	470.4
1	2	0.1	167.9	320.3	40.8	33.5	68.2	466.0	300.8	156.8	119.3
1	3	0.1	128.6	252.4	35.7	33.5	53.7	310.8	200.6	105.2	81.9
3	1	0.1	83.1	147.3	15.6	11.2	22.8	249.5	350.1	238.0	134.0
1	4	0.1	102.0	204.0	31.9	33.5	40.3	233.2	150.4	79.0	61.1
4	1	0.1	62.8	111.1	11.7	8.4	17.1	187.1	262.7	205.7	317.7
1	6	0.1	71.6	144.6	23.6	27.1	26.9	155.3	100.3	52.8	40.9
6	1	0.1	42.1	74.4	7.8	5.6	11.4	124.8	175.1	156.7	76.3

$$\overline{P} = \frac{1}{308}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{8}\sum_{n=1}^{9}P_{i,j,n} \quad 和 \quad |\overline{P'}| = \frac{1}{308}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{8}\sum_{n=1}^{9}|P_{i,j,n} - \overline{P}| \tag{62}$$

式中$i = 1-4$表示4种基波，$j = 1-8$表示10种振幅组合中除(1,4,0.1)和(1,6,0.1)外的8种，$n = 1-9$表示9种$\phi_0 = 20°\times n$。表4中用$MP = \overline{P}$、$DP = |\overline{P'}|$。若规定：当$DP/MP < 40\%$时，则认为$P_{i,j,n}$趋近于$\overline{P}$；而当$DP/MP > 40\%$时，则认为$P_{i,j,n}$不趋近于$\overline{P}$。由表4可见，斜压情况仅$\Delta\omega = 0$时，$P_{i,j,n}$不趋近于$\overline{P}$，而正压情况有四种$\Delta\omega$，即$\Delta\omega = (0.105、0.07876、0.063、0)\times10^{-6}/\mathrm{s}$，$DP/MP > 40\%$，$P_{i,j,n}$不趋近于$\overline{P}$，这与文献[8]一致，且更为准确。与正压情况相比，斜压情况中$\Delta\omega$的作用更为重要，且$\Delta\omega$对应的周期$P_{i,j,n}$更容易趋于其平均周期$\overline{P}$，且$\overline{P}$又与理论近似周期较为一致。

从物理上所得式(52)已证实这一结果，此处从解析解式(39)可较准确地证实之。考虑三次代数方程$G(W) = 0$中根与系数的关系知，

$$W_1 + W_2 + W_3 = -\beta_1 = -\left[\frac{A_1^2(0)}{\alpha_1} + \frac{A_2^2(0)}{\alpha_2} + \frac{A_3^2(0)}{\alpha_3}\right] + \frac{1}{m}\left(\frac{\Delta\omega}{2\varepsilon b}\right)^2 \tag{63}$$

若 $o\left(\frac{1}{m}\left(\frac{\Delta\omega}{2\varepsilon b}\right)^2\right) > o\left(\frac{A_1^2(0)}{\alpha_1} + \frac{A_2^2(0)}{\alpha_2} + \frac{A_3^2(0)}{\alpha_3}\right)$ (64)

成立，因 $W_1 < W_2 < W_3$，这 3 个根中绝对值最大者为 $|W_3|$ 或 $|W_1|$，可取

$$W_3 - W_1 \approx |W_1 + W_2 + W_3| \tag{65}$$

则由(63)、(65) 两式和 N 的表达式，可得

$$N = \sqrt{W_3 - W_1} \approx \frac{\Delta\omega}{2\varepsilon b\xi} \tag{66}$$

代入式(39)，得

$$P \approx \frac{\pi}{Nb\xi} \approx \frac{2\pi\varepsilon}{\Delta\omega} \tag{67}$$

因 $\varepsilon \ll 1$，即 $\varepsilon \sim 0.1$，则 $P \sim \frac{1}{\Delta\omega}$。因此，当不等式(64) 成立时，能量变化周期 P 趋于 $\Delta\omega$ 自身对应的周期 $\frac{2\pi\varepsilon}{\Delta\omega}$ 或 $\frac{1}{\Delta\omega}$。由于斜压情况 α_j 包含的 $2F$ 恰好使分母、分子绝对值分别增大和减少，有 $|\alpha_j| \ll 1.0$，可取 $|\alpha_j| \sim 1/4$，利用 $\frac{m}{|\alpha_j|} \sim |\alpha_j|^2$，将此诸参数值代入(64) 式，得

$$\Delta\omega > 0.5 \times 10^{-7}/\mathrm{s} \tag{68}$$

表3　能量变化周期 $P(k_3 = 0.78 \times 10^{-6}/\mathrm{m}, l_3 = 0.50 \times 10^{-6}/\mathrm{m}, \phi_0 = 60°, F = 0.2)$

A_1	A_2	A_3	$\Delta\omega$									
			6.3	3.78	1.89	0.63	0.315	0.1576	0.105	0.07876	0.063	0
1	1	1	X	X	X	11.5	23.0	45.7	67.7	89.2	111.3	217.4
0.1	1	1	X	X	X	11.5	X	45.8	67.9	88.9	108.5	217.4
1	0.1	0.1	X	X	X	11.5	23.1	46.0	69.1	93.0	123.9	358.8
1	2	0.1	X	X	X	11.5	22.8	43.7	61.4	75.6	86.7	129.7
1	3	0.1	X	X	X	11.5	22.5	41.2	54.7	63.8	69.9	86.5
3	1	0.1	X	X	3.8	11.5	22.9	X	X	X	X	120.0
1	4	0.1	X	X	X	11.4	22.0	38.3	48.3	54.0	57.4	64.9
4	1	0.1	X	X	3.8	11.5	23.1	X	X	X	X	90.0
1	6	0.1	X	X	X	11.3	20.9	32.6	37.8	40.1	41.4	43.2
6	1	0.1	X	X	3.8	11.5	X	X	X	X	X	60.0

$\Delta\omega$：10^{-6}/s，其它同表1。

表4　平均周期和平均绝对周期离差

项目		$\Delta\omega$									
		6.3	3.78	1.89	0.63	0.315	0.1576	0.105	0.07876	0.063	0
理论近似周期	MP	1.2	1.9	3.8	11.5	23.1	46.2	69.2	92.3	115.4	∞
正压	MP	1.2	1.9	3.8	11.3	21.6	34.6	39.4	43.1	46.8	116.3
	DP	0.0	0.0	0.0	0.5	3.4	10.8	16.9	19.1	23.5	109.9
	DP/MP	0.0	0.0	0.0	4%	16%	31%	43%	44%	50%	94%
斜压	MP	X	X	3.8	11.4	22.3	42.9	61.2	77.2	92.1	336.3
	DP	X	X	0.0	0.2	1.6	3.6	8.7	16.3	25.9	279.6
	DP/MP	X	X	0.0	0.2%	7%	8%	14%	21%	.28%	76%

MP：平均周期，DP：平均绝对周期离差，单位均为天，$\Delta\omega$ 同表3。

因此，式(68) 或(64) 成立，即频率偏离作用比初始振幅作用大，从而式(67) 成立。斜压情况式(68)$\Delta\omega$ 的下界 0.5×10^{-7}/s 比正压的 $\Delta\omega$ 下界 $\sqrt{2} \times 10^{-7}$/s 要小得多，从而斜压能量变化周期 P 比正压的 P 更容易趋于频率偏离 $\Delta\omega$ 周期 $\frac{2\pi\varepsilon}{\Delta\omega}$，即表 4 中的理论近似周期，(67)、(68) 两式从理论上普遍地证实了表 4 的结果。特别，当 $\Delta\omega = (0.63 - 0.1576) \times 10^{-6}/\mathrm{s} \sim (0.1—0.02)o(\omega_j)$ 时，$\bar{P} \sim 12—43$d；而当 $\Delta\omega = 0$ 时，$\bar{P} \sim 366$d。显然，后者与通常所指 30—50d 低频振荡周期不一致，且 $\Delta\omega = 0$ 与 $\Delta\omega \neq 0$ 相比在实际大气中难以实现，而前者 $\bar{P}$ 正是中高纬准双周振荡和 30—50d 振荡的周期。因此，在斜压大气中，较小 $\Delta\omega$ 出现也可能是中高纬低频振荡(准双周和 30—50d) 的一种新的重要机制。值得注意的是，前面从物理上所导得的能量变化周期 $\bar{P}_0$ 的式(52) 与式(67) 和表 4 结果均相当一致。这表明式(67) 的 P 正是由温度波与位势波之间的慢变相差引起斜压有效位能与动能的互相转换的周期。若初始时刻只有近 1 波和 4 波两个斜压波，则由于斜压能量的转换，将激发近 2

波的正压波，形成阻塞。这与Schilling认为大尺度气流不同模态间的斜压能量转换能引起阻塞形成的事实相当一致[9]。由此可见，斜压性对中高纬低频振荡是相当重要的。

5 结语

本文求得两个斜压波和一个正压波准共振三波振幅的解析解。并由物理直观、解析解和数值计算三方面表明，对于较小的 $\Delta\omega \sim (0.1—0.02)o(\omega_j)$，准共振能量变化周期趋于中高纬准双周振荡和 30—50d 振荡的周期。还从物理上分析得，三波准共振能量变化周期正是斜压大气中有效位能与动能互相转换的周期。这也说明了斜压能量在不同波动之间的转换对中高纬低频振荡是相当重要的，同时与观测事实的分析结果也是一致的。当然，本文模式比较简单，主要揭示斜压能量转换过程。为了考虑更多的物理过程，还须进一步考虑加热波和地形波及摩擦对波动准共振的影响。

参考文献

[1] Hoskings B, Pearce R. Large-scale dynamical processed in the atmosphere, Academic press, 1983.

[2] Egger J. Dynamics of blocking highs, J A S. 1978, 35: 1788－1801.

[3] Colucci S, Loesch A, Bosart L. Spectral evolution of a blocking episode and comparison with wave interaction theory, J A S. 1981, 38: 2092－2111.

[4] Chen T C, Shukla J. Diagnostic analysis and spectral energetics of a blocking event in the GLAS climate model simulation. M W R. 1983, 111: 3－22.

[5] Wiin-Nielsen A C. Anomalous atmospheric flows and blocking, Advances in Geophysics. 1986, 29: 3－26.

[6] 伍荣生. 正压大气中波动共振与能量变化. 中国科学(B), 1979, (2): 195－203.

[7] Jones S. Rossby wave interactions and unstabilities in a rotating, two-layer fluid on a beta-plane, I: Resonant interactions, Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics, 1979, 11: 289－322.

[8] 陆维松. 正压大气波动准共振与中纬低频振荡. 中国科学(B), 1991, 1: 102－112.

[9] Scnilling H D. Anomalous atmospheric flows and blocking. Advance in Geophysics. 1986, 29: 71－99.

[10] 叶笃正. 波状基本气流中的若干扰动动力学问题. 气象学报, 1964, 34: 1－11.

QUAST-RESONANCE OF BAROCLINIC ATMOSPHERIC WAVES AND MIDDLE AND HIGH LATITUDE LOW-FREQUENCY OSCILLATION

Lu Weisong

(*Nanjing Institute of Meteorology, Nanjing*, 210044)

Abstract

From the quasi-geostrophic two-layer model, the quasi-resonance occurs possibly for two cases: (1) pure barotropic waves; (2) two baroclinic waves and one barotropic wave. For case (2), it is the analytic solution of triad amplitude of quasi-resonance and

approximate expression for the variation period of wave energy which are found. Both the approximate expression and numerical calculation indicate that for the baroclinic atmosphere the period of energy variaton approaches the period $\frac{2\pi\varepsilon}{\Delta\omega}$ corresponding to the quasi-resonance frequency mismatch $\Delta\omega$ itself more easily than for the barotropic atmosphere. It is pointed from physics that there is a feedback mechanism between the phase of wave and wave amplitude, the slowly varying phase difference between the barotropic wave and the baroclinic waves causes the transformation of the kinetic energy and the available potential energy, and formes the low-frequency oscillation alternately strengthening and weakening the barotropic wave and the baroclinic wave, which oscillation period is the same as above approximate formula. When $\Delta\omega \sim (0.1—0.02)o(\omega_j)$, averaged energy period is 12—43 days and when $\Delta\omega = 0$, it is 366 days. Therefore, the occurrence of frequency mismatch $\Delta\omega$ is also probably a new important mechanism for the formation of middle and high latitude low-frequency in the baroclinic atmosphere.

Key Words: Baroclinic wave, Barotropic wave, Quasi-resonance, Middle and high latitude low-frequency oscillation.