

临界层理论研究的进展*

谭本超** 伍荣生

(南京大学大气科学系, 210008)

提 要

平行切变流的临界层一般分为三类: 粘性临界层、非线性临界层和非定常临界层。本文对这三种临界层理论及其最新发展作了较为详细的介绍。

一、切变流的波动临界层

研究流体运动最常用方法是将流体运动分为平均运动和扰动, 即

$$\bar{\Psi}(x, y, t) = \bar{\psi}(y) + \varepsilon \psi(x, y, t) \quad (1)$$

式中 $\bar{\Psi}$ 为流函数, $\bar{\psi}$ 平均流函数, ψ 扰动流函数, ε 小参数, 它表征扰动的强度。由于 $\bar{\psi}(y)$ 仅为 y 的函数, 它所表征的流动为平行流, 它满足 Navier-Stokes 方程。

将式 (1) 代入二维不可压流体的涡度方程, 可得扰动流函数 ψ 满足的方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}(y) \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla^2 \psi - \bar{u}'' \frac{\partial \psi}{\partial x} + \varepsilon J(\psi, \nabla^2 \psi) = Re^{-1} \nabla^4 \psi \quad (2)$$

式中 Re 为雷诺数, 其余符号为惯常所用。略去非线性项, 设 ψ 有形式解

$$\psi(x, y, t) = \phi(y) \exp[i\alpha(x - ct)] \quad (3)$$

将式 (3) 代入式 (2), 得到

$$(\bar{u} - c)(\phi'' - \alpha^2 \phi) - \bar{u}'' \phi = \frac{1}{i\alpha Re} [\phi'^2 - 2\alpha^2 \phi'' - \alpha^4 \phi] \quad (4)$$

式 (4) 就是著名的 Orr-Sommerfeld 方程, 其边条件为无滑动条件 $\phi(y_1) = \phi(y_2) = \phi'(y_1) = \phi'(y_2) = 0$ 。前两个条件表明, 在刚壁处法向速度为零, 后两个条件表明, 在刚壁处切向速度为零。一般来说, 在许多实际问题中, $\delta = \frac{1}{\alpha Re}$ 远远小于 1。略去式 (4) 右边的粘性力项, 式 (4) 化为

$$\phi'' - \left(\alpha^2 + \frac{\bar{u}''}{\bar{u} - c} \right) \phi = 0 \quad (5)$$

上式就是著名的 Rayleigh 方程, 其相应的边条件为滑动条件 $\phi(y_1) = \phi(y_2) = 0$ 。方程 (5) 有着广泛的应用, 但它同时存在两个固有的困难。第一是, 由于略去了粘性力项, 方程阶数降低, 式 (5) 的解不满足粘性边条件。克服此困难, 使用的是传统的边界层方法, 即在边界附近的一薄层流体内考虑粘性力, 在远离边界的区域仍采用 Rayleigh 方

* 本文于 1990 年 11 月 5 日收到, 1991 年 11 月 30 日收到修改稿。

** 现在通讯地址: 北京大学地球物理系。

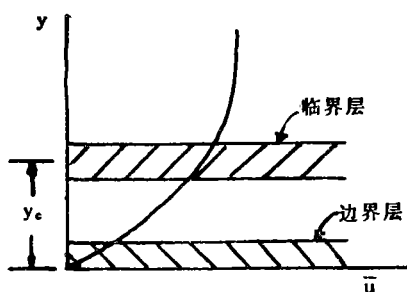


图 1 边界层和临界层

程。第二个困难是, 对于中性扰动, 相速 c 为实数, 若在某点 $y = y_c$ 处, 满足

$$\bar{u}(y_c) = c \quad (6)$$

同时 $\bar{u}''(y_c) \neq 0$, 此时方程 (5) 出现奇异性。即使 $\bar{u}''(y_c) = 0$, 方程 (5) 不出现奇异性, 但在更高阶问题中, 仍将会出现奇异性。一般称 y_c 点为临界点, 以 y_c 为中心的一薄层流体为临界层。式 (6) 表明, 在临界层, 波的相速等于基流的流速。图 1 是边界层和临界层的示意图。

为了克服第二个困难, 受传统的边界层思想的影响, 人们首先想到的是, 在临界层外部, 仍采用 Rayleigh 方程, 在临界层内恢复粘性力。这是很自然的, 因为 Rayleigh 方程就是 Orr-Sommerfeld 方程略去粘性力得到的。这就产生了经典的粘性临界层理论。事实上, 在得到式 (5) 时, 还略去了非线性项, 在临界层内恢复非线性项, 是克服第二个困难的又一可能途径。这就是非线性临界层, 它适用于大振幅波动。另外, 从平面波解式 (3) 看出, 此平面波的振幅与时间无关。若认为平面波振幅依赖于时间, 研究初值问题, 这是克服第二个困难的第三个可能途径, 它研究的是非定常临界层。

人们最早研究临界层, 是为了寻找流体运动不稳定机制 (Lin, 1955; Miles, 1957)。而近年来临界层研究日益受到重视, 主要原因是: 1) 近些年的研究表明, 非线性对临界层的性质有重大修正, 而实际问题大多是非线性的; 2) 在研究波向临界层传播时得到, 波动能量大部分被临界层吸收; 3) 越来越多的领域发现, 临界层现象在各自的领域里起有重要作用。

在大气中, 低纬东西风的交界处就是 Rossby 驻波的临界层。当 Rossby 驻波从高纬传向低纬时, 波在临界层是被吸收, 反射, 还是超反射? 这是大气动力学理论的基本问题, 曾一度引起争论, 仍在深入研究之中。

本文拟对上述的平行流临界层的三种基本理论加以介绍, 至于其它理论, 例如, 非平行流的局地临界层, 在此不再作介绍, 有兴趣的读者可参看 Merkin (1983)。

二、经典理论: 粘性临界层

在临界层外部, 流体运动可用 Rayleigh 方程 (5) 来描述。在 y_c 附近, 用 Frobenius 方法可求得式 (5) 的两个线性独立解:

$$\begin{cases} \phi_a = (y - y_c) + \frac{\bar{u}_c''}{\bar{u}_c'} (y - y_c)^2 / 2 + \dots \\ \phi_b = 1 + \dots + \frac{\bar{u}_c''}{\bar{u}_c'} \phi_a \log(y - y_c) + \dots \end{cases} \quad (7)$$

因此, 外解可用此两个解表示, 即

$$\phi = A\phi_a + B\phi_b \quad (8)$$

式 (7) 中带脚标 c 的量, 表示该量在临界点处取值。从式 (7) 看出, ϕ_b 的表达式中出

现了对数奇异性项。此项的出现,一是使水平扰动速度出现强梯度;二是 $\log(y-y_c)$ 是多枝函数,当 $y < y_c$ 时,应确定选取哪一枝,即

$$\log(y-y_c) = \log|y-y_c| + i\theta_R, \quad y < y_c \quad (9)$$

式中 θ_R 的值未定。只有定出 θ_R 的值,与 Rayleigh 方程相联系的本征值问题才能得到解决。经典理论(例如, Lin, 1945),是在临界层内恢复粘性力项,求出临界层的解后与外解匹配,定出 θ_R 。

在临界层,引进新变量

$$\begin{cases} \eta = (y-y_c)/\delta^{\frac{1}{3}} \\ \phi(y) = \chi(\eta) \end{cases} \quad (10)$$

用新变量表示的 Orr-Sommerfeld 方程为

$$\chi^{IV} - i\bar{u}'_c \eta \chi'' = \delta^{\frac{1}{3}} i\bar{u}''_c (\eta^2 \chi''/2 - \chi) + O(\delta^{\frac{2}{3}}) \quad (11)$$

将 χ 按小参数 $\delta^{1/3}$ 展开:

$$\chi = \sum_{n=0}^{\infty} (\delta^{\frac{1}{3}})^n \chi^{(n)} \quad (12)$$

将式(12)代入式(11),得到 $\chi^{(0)}$ 满足

$$\chi^{(0)IV} - i\bar{u}'_c \eta \chi^{(0)''} = 0 \quad (13)$$

式(13)有4个线性独立解:

$$\begin{cases} \chi_1^{(0)} = \eta, \chi_2^{(0)} = 1 \\ \chi_3^{(0)} = \int_{-\infty}^{\eta} d\eta \int_{-\infty}^{\eta} d\eta \eta^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}^{(1)} \left[\frac{2}{3}(i\alpha_0 \eta) \right] \\ \chi_4^{(0)} = \int_{-\infty}^{\eta} d\eta \int_{-\infty}^{\eta} d\eta \eta^{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left[\frac{2}{3}(i\alpha_0 \eta) \right] \end{cases} \quad (14)$$

式中 $\alpha_0 = (\bar{u}'_c)^{\frac{1}{3}}$, $H_{\frac{1}{3}}^{(i)}$ 为汉克尔函数。这样, $\chi^{(0)}$ 可用以上4个解表示出:

$$\chi^{(0)} = \sum_{j=1}^4 C_j^{(0)} \chi_j^{(0)} \quad (15)$$

令 $|\eta| \rightarrow \infty$, 将内解式(15)与外解式(8)匹配,定出 $C_1^{(0)} = A/\delta$, $C_2^{(0)} = B=1$, $C_4^{(0)} = 0$ 。

$C_3^{(0)}$ 还未确定,最后由无滑动条件定出。为了确定 θ_R , 必须考虑 $O(\delta^{\frac{2}{3}})$ 问题,即

$$\chi^{(1)IV} - i\bar{u}''_c \eta \chi^{(1)''} = i\bar{u}''_c (\eta^2 \chi^{(0)''}/2 - \chi^{(0)}) \quad (16)$$

式(16)的解可用参数变易法求得。事实上,与 $\chi_2^{(0)}$ 对应的特解就是我们需要的部分。

对 η 的大负值,将 $H_{\frac{1}{3}}^{(1)}$ 作展开,发现,只有当式(9)中的 θ_R 取 $-\pi$ 时,外解才能与内解匹配。这样, θ_R 的值就确定了。通常称 θ_R 为相角变化,它在临界层理论中是一个重要的量。下面,对它的意义作一考察。

首先看它与雷诺应力的关系。雷诺应力定义为

$$\tau = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi/\alpha} (-uv) dx \quad (17)$$

设 $C = C_r + iC_i$, 将扰动解

$$\psi = \frac{1}{2} [\phi(y) \exp(i\alpha(x-ct)) + \phi^*(y) \exp(-i\alpha(x-ct))] \quad (18)$$

代入式 (17), 并对 y 微分, 得

$$\frac{d\tau}{dy} = \frac{1}{4} i\alpha (\phi \phi^{*''} - \phi'' \phi^*) \quad (19)$$

利用 Rayleigh 方程及其共轭方程, 可将式 (19) 括号里的量算出。将 Rayleigh 方程 (5) 乘以 ϕ^* , 其共轭方程乘以 ϕ , 然后相减, 再代入式 (19), 得

$$\frac{d\tau}{dy} = \frac{1}{2} \alpha C_i \frac{\bar{u}''}{|\bar{u}-c|^2} |\phi|^2 \quad (20)$$

从式 (20) 可得出一些有关中性波的重要结论。若 $\bar{u}-c$ 处处不为零, 当 C_i 趋于零时, $\frac{d\tau}{dy} = 0$ 。这表明, 对于中性波, 雷诺应力为常数。但若有临界层存在时, 即 $\bar{u}(y_c) = c$ 时, 在临界层两侧, 雷诺应力就会出现不连续。这可证明如下。在 $y = y_c$ 附近, 若用解式 (8), 雷诺应力可表为

$$\tau = i\alpha (A^* B - A B^*) \quad (21)$$

若用“+”表 $y > y_c$ 的区域, “-”表 $y < y_c$ 的区域, 同时取 $B^+ = B^-$, 则可得到

$$\tau^+ - \tau^- = 2\alpha \frac{\beta - \bar{u}_c''}{\bar{u}_c'} |B|^2 \theta_R \quad (22)$$

式 (22) 表明, θ_R 的存在, 使得雷诺应力在临界层两侧出现不连续。

θ_R 还与临界层对波的吸收、反射等性质有关, 下面以大气 Rossby 波临界层为例 (Tung, 1979) 对此加以介绍。对于位于 β -平面的正压大气, 考虑如下基流分布

$$\bar{u}(y) - c = \begin{cases} = \bar{u}_c'(y - y_c), & y_2 \leq y \leq y_1 \\ = \bar{u}(y_1) - c \equiv U_1, & y \geq y_1 \\ = \bar{u}(y_2) - c \equiv U_2, & y \leq y_2 \end{cases} \quad (23)$$

这里已假定临界层位于 y_1 和 y_2 之间, 即 $y_2 < y_c < y_1$ 。在 $y \geq y_1$ 区域, 解为

$$\phi = \phi_1(y) = A_1 e^{il_1(y-y_1)} + B_1 e^{-il_1(y-y_1)} \quad (24)$$

式中 $l_1 = \left(\frac{\beta}{U_1} - \alpha^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, $A_1 e^{il_1(y-y_1)}$ 为向北传播的波, $B_1 e^{-il_1(y-y_1)}$ 为向南传播的波。若将向南传播的波看成入射波, 临界层的反射系数定义为

$$R = \left| \frac{\text{反射波振幅}}{\text{入射波振幅}} \right| = \left| \frac{A_1}{B_1} \right| \quad (25)$$

为了计算 R , 还需知道临界层附近解的性质和南部边界条件。对无穷 β -平面, 南部边界条件为解有界。因此, 在 $y \leq y_2$ 区域, 解为

$$\phi = \phi_2(y) = A_2 e^{-A(y_2-y_1)} \quad (26)$$

式中 $A = \left(\alpha^2 - \frac{\beta}{U_2} \right)^{\frac{1}{2}}$ 。式 (26) 描述的是随纬度衰减的扰动。在切变带 $y_2 \leq y \leq y_1$ 区域, 解为

$$\phi \begin{cases} = \phi_+ = A\phi_a(y-y_c) + B\phi_b(y-y_c), & y > y_c \\ = \phi_- = A'\phi_a(y-y_c) + B\phi_b(y-y_c), & y < y_c \end{cases} \quad (27)$$

这里 ϕ_a 和 ϕ_b 是用 Froubenius 方法求得两个解, 其表达式与式 (7) 的表达式基本相同, 只要将式 (7) 中的 $\bar{u}_c''$ 用 $\bar{u}_c'' - \beta$ 取代即可。式 (27) 中

$$A' = A - i\theta_R \frac{\beta - \bar{u}_c''}{\bar{u}_c'} B \quad (28)$$

将几个区域的解匹配起来, 并利用连续性条件, 最后得到

$$R^2 = \left| \frac{A_1}{B_1} \right|^2 = 1 + \frac{4 l_1 \theta_R}{r^2} \frac{\beta - \bar{u}_c''}{\bar{u}_c'} \quad (29)$$

式中 r^2 为常数。假定 $\frac{\beta - \bar{u}_c''}{\bar{u}_c'} > 0$ (这对应于稳定基流), 式 (29) 表明, $\theta_R = -\pi$ 时, $|R|^2 < 1$, 反射波能量小于入射波能量, 波能被临界层部分吸收; 若 $\theta_R = 0$, $|R|^2 = 1$, 反射波能量等于入射波能量, 波在临界层被完全反射; 若 $\theta_R > 0$ 时, $|R|^2 > 1$, 反射波能量大于入射波能量, 波在临界层发生超反射现象。

经典临界层理论得到 $\theta_R = -\pi$, 这表明波在临界层被部分吸收, 这是经典临界层理论的著名结果。在很长一段时间内, 人们一直将此结论看成是普遍成立的, 而忘记了 θ_R 的值与具体的物理过程有关。事实上, $\theta_R = -\pi$ 的结论是在线性粘性临界层理论中成立, 当在临界层考虑非线性项时, $\theta_R = -\pi$ 的结论就不再成立了。以下几节将对此加以深入讨论。

三、BBD 理论: 非线性临界层

在临界层内恢复被略去的非线性项, 这一思想由 Lin 和 Benney (1964) 首先提出。随后, Benney 和 Bergeron (1969) 和 Davis (1969) 采用匹配渐近展开法, 同时独立地探讨了这一途径并获得成功。这就是现被称为的 BBD 理论, 它是临界层的非线性理论。Benney 和 Bergeron 的工作与稳定性有关, 而 Davis 研究的是风产生水波的问题。下面介绍 Benney 和 Bergeron 的工作。

采用以 c 作平移的坐标系, 设

$$\Psi(x, y) = \int_0^y (\bar{u} - c) dy + \varepsilon \psi(x, y) \quad (30)$$

Ψ 和 ψ 分别满足以下两个方程:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \Delta \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Delta \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \nu \Delta^2 \Psi \quad (31)$$

$$(\bar{u} - c) \Delta \psi_x - \bar{u}_{,y} \psi_x + \varepsilon \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \Delta \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \Delta \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \nu \Delta^2 \psi \quad (32)$$

式中 Δ 为拉普拉斯算符。当 ε 和 ν 都是小参数时, 在临界层以外的区域可用 Rayleigh 方程, 用 Froubenius 方法可求得 Tollmien 解 (7)。为了确定 θ_R , 经典理论在临界层考虑的是 Orr-Sommerfeld 方程, 而这里, 将采用非线性方程 (31)。设小参数 ε 和 ν 有关系

$$\varepsilon \ll 1, \nu \ll 1, \varepsilon^{1/2} \gg \nu^{1/3} \quad (33)$$

如此有

$$\lambda = \nu \varepsilon^{-3/2} \ll 1 \quad (34)$$

在临界层, 引进新变量

$$y - y_c = \varepsilon^{1/2} Y \quad (35)$$

则式(31)和(32)化为

$$\begin{aligned} & \Psi_x \Psi_{YYY} - \Psi_Y \Psi_{YYX} + \varepsilon (\Psi_x \Psi_{YXX} - \Psi_Y \Psi_{XXY}) \\ & = \lambda \varepsilon (\Psi_{YYY} + 2 \varepsilon \Psi_{YXX} + \varepsilon^2 \Psi_{XXX}) \end{aligned} \quad (36)$$

$$(\bar{u} - c) \Delta \psi_x - \bar{u}_y \psi_x + \varepsilon (\psi_x \Delta \psi_y - \psi_y \Delta \psi_x) = \lambda \varepsilon^{3/2} \Delta^2 \psi \quad (37)$$

设外部解可展开为

$$\Psi_{0s} = \int_0^y (\bar{u} - c) dy + \varepsilon \psi_{0s}^{(1)} + \varepsilon^2 \psi_{0s}^{(2)} + \dots \quad (38)$$

$\psi_{0s}^{(1)}$ 满足 Rayleigh 方程, 其 Tollmien 解为

$$\psi_{0s}^{(1)} = (A_s \phi_a + B_s \phi_b) \cos \alpha x + (C_s \phi_a + D_s \phi_b) \sin \alpha x \quad (39)$$

其中

$$\begin{cases} \phi_a = (y - y_c) + \frac{\bar{u}_c''}{\bar{u}_c'} (y - y_c)^2 / 2 + \dots \\ \phi_b = 1 + \left(\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\bar{u}_c''}{2 \bar{u}_c'} - \frac{\bar{u}_c'^2}{\bar{u}_c'^2} \right) (y - y_c)^2 + \dots \\ \quad + \frac{\bar{u}_c''}{\bar{u}_c'} \phi_a \log |y - y_c| \end{cases} \quad (40)$$

这里的脚标“0”表外部解, 后面出现的脚标“i”表内部解。s = ±, “+”表 y > y_c 区域, “-”表 y < y_c 区域。不失一般性, 取

$$B_+ = 1, C_+ = D_+ = 0 \quad (41)$$

用变量 η 表示的 Ψ_{0s} 的前两项和为

$$\begin{aligned} {}_2\Psi_{0+} &= \varepsilon \left(\frac{\bar{u}_c'}{2} Y^2 + \cos \alpha x \right) + \varepsilon^{3/2} \log \varepsilon \left(\frac{\bar{u}_c''}{2 \bar{u}_c'} Y \cos \alpha x \right) \\ &+ \varepsilon^{3/2} \left(\frac{\bar{u}_c''}{2} Y^3 + A_+ Y \cos \alpha x + \frac{\bar{u}_c''}{\bar{u}_c'} Y \log |Y| \cos \alpha x + O(\varepsilon^2 \log \varepsilon) \right) \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} {}_2\Psi_{0-} &= \varepsilon \left(\frac{\bar{u}_c'}{2} Y^2 + B_- \cos \alpha x + D_- \sin \alpha x \right) + \varepsilon^{3/2} \log \varepsilon \left(\frac{\bar{u}_c''}{2 \bar{u}_c'} Y \cos \alpha x \right) \\ &+ \varepsilon^{3/2} \left[\frac{\bar{u}_c''}{6} Y^3 + Y (A_- \cos \alpha x + C_- \sin \alpha x) + B_- \frac{\bar{u}_c''}{\bar{u}_c'} Y \log |Y| \cos \alpha x \right. \\ &\quad \left. + D_- \frac{\bar{u}_c''}{\bar{u}_c'} \log |Y| \right] + O(\varepsilon^2 \log \varepsilon) \end{aligned} \quad (43)$$

为了能与外解相匹配, 内解的展开式必须为

$$\Psi_i = \varepsilon \Psi_i^{(0)} + \varepsilon^{3/2} \log \varepsilon \Psi_i^{(1)} + \varepsilon^{3/2} \Psi_i^{(2)} + \dots \quad (44)$$

将式(44)代入式(31), 有

$$\frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial Y} \frac{\partial^3 \Psi_i^{(0)}}{\partial Y^2 \partial x} - \frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial x} \frac{\partial^3 \Psi_i^{(0)}}{\partial Y^3} = 0 \quad (45)$$

式(45)可化为

$$J\left(\Psi_i^{(0)}, \frac{\partial^2 \Psi_i^{(0)}}{\partial Y^2}\right) = 0 \quad (46)$$

将式(46)积分一次,然后将所得结果乘以 $\frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial Y}$,再积分一次,有

$$\left(\frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial Y}\right)^2 = 2 G(\Psi_i^{(0)}) + F(x) \quad (47)$$

式中 G 为 $\Psi_i^{(0)}$ 的任意函数, F 为 x 的任意函数,待定。将式(45)对 Y 积分两次,然后与式(42)匹配,定出

$$F(x) = -2 \bar{u}'_e \cos \alpha x \quad (48)$$

为了确定 $G(\Psi_i^{(0)})$ 的函数形式,Benney 和 Bergeron 使用了粘性久期性条件,最后得出:

$$G(\Psi_i^{(0)}) \doteq \bar{u}'_e \Psi_i^{(0)} \quad (49)$$

将(48)和(49)两式代入式(47),积分后得到

$$\Psi_i^{(0)} \frac{\bar{u}'_e}{2} Y^2 + \cos \alpha x \quad (50)$$

再与 Ψ_0 -匹配,定出

$$B_- = 1, D_- = 0 \quad (51)$$

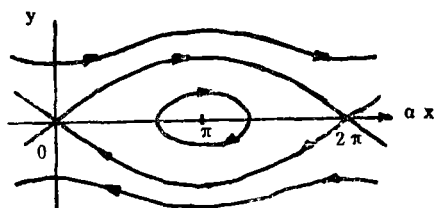


图 2 非线性临界层中的 Kelvin 猫眼流型

内解的首要部分式(50)所代表的流场就是著名的 Kelvin 猫眼流型,如图 2 所示。此流型由 Kelvin(1880)在用运动学方法研究临界层时首先得到。猫眼流型是线性临界层理论中所没有的。

用同样的方式可确定 $\Psi_i^{(1)}$,它与外解相等。为求出 A_+ 与 A_- 间的关系,从(42)和(43)两式看出,必须求解 $O(e^{3/2})$ 问题。结果给出:

$$A_+ = A_- \quad (52)$$

式(52)表明, $\theta_R = 0$ 。这是一意想不到的结果。这意味着,穿过非线性临界层,雷诺应力不出现不连续现象,波在临界层是完全反射的。这些结论与线性粘性临界层理论的结论截然不同。

Benney 和 Bergeron 利用 $\theta_R = 0$ 的结果,对 Rayleigh 方程的本征值问题作了数值计算,他们得到了一类新的波模态,其相速与自由流的值接近,这是 Tollmien-Schlichting 模态所不能得到的,因为雷诺应力的不连续限制临界层只能在边界层附近出现。这一结果有可能与边界层从层流向湍流的转换有联系。

Haberman(1972)进一步考虑了粘性项的作用,扩展了 Benney 和 Bergeron 的工作。他得到 θ_R 是参数 λ 的连续函数,当 λ 从 ∞ (粘性项占主导地位)变化到零(非线性项占主导地位),相应 θ_R 从 $-\pi$ 变化为零。

四、Rossby波临界层的演变: 初值问题

临界点奇异性是与中性模态相联系的, 若扰动迅速演变, 则临界点奇异性就不出现。因此, 若将波振幅考虑成时间的函数, 研究初值问题, 这是解决与 Rayleigh 方程相联系的奇异性的第三个可能途径。Booker 和 Bretheton(1967)在研究地形强迫的重力波上传现象时, 开创了此方法。随后, Dickinson(1970)应用此方法研究了强迫 Rossby 驻波从高纬传向赤道时其临界层的演变。Warn 等 (1976)对 Dickinson 的结果作了一些修正。

Dickinson 采用了一非常简单的模型: 基流切变为线性切变, 在北部边界有一波状强迫源。对于 Rossby 驻波, 东西风交界面就是临界层, 如图 3 所示。其定解问题为

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U'y \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi_{yy} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \\ \psi(x, y_0, t) \begin{cases} = e^{ikx} & t > 0 \\ = 0 & t < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (53)$$

这里 U' 为常数。设解的形式为

$$\psi = \Psi(y, t) e^{ikx} \quad (54)$$

将式(54)代入式(53)得

$$i \left(kU'y - \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + i\beta k \Psi = 0 \quad (55)$$

无量纲化后的定解问题为

$$\begin{cases} \left(y - i \frac{\partial}{\partial t} \right) \Psi_{yy} + \Psi = 0 \\ \Psi(y_0, t) \begin{cases} = 1, & t > 0 \\ = 0, & t < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (56)$$

用拉普拉斯变换法求解式(56), 当 t 充分大时, Dickinson

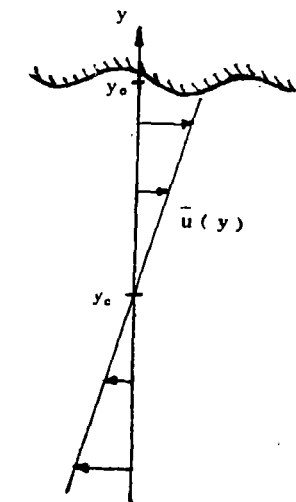


图 3 研究 Rossby 临界层所采用的大气模型

得到

$$\Psi(y, t) = \frac{ia}{2} \int_0^t \frac{d\tau}{\tau^2} \exp[-i(y\tau + \tau^{-1})] + O(t^{-2}) \quad (57)$$

式中 a 为常值。当 t 充分大时, 按如下定义将流体分为三个区域:

- $|y|t \gg 1$, 外部区域;
- $|y|t \sim 1$, 临界层;
- $|y|t \ll 1$, 临界层中心。

在这三个区域, 解的渐近形式分别为:

1. 外部区域

$$\begin{aligned} \Psi(y, t) = \Psi(y, \infty) - \frac{ae^{-iyt}}{2yt^2} + O(t^{-2}) + O(y^{-2}t^{-3}) \\ + O(y^{-1}t^{-3}) \end{aligned} \quad (58)$$

2. 临界层

$$\Psi(y, t) = \Psi(y, \infty) - \frac{ia|y|}{2} I_2^{\mp}(|y|t) + O(|y|^2) + O(t^{-2}) \quad (59)$$

3. 临界层中心

$$\begin{aligned} \Psi(y, t) \approx & \frac{ia}{2} \left\{ -ie^{-i/t} - iy \left[\ln t - \left(\gamma + \frac{i}{2} \pi \right) + O(t-1) \right] \right. \\ & \left. - \frac{y^2}{2} [te^{-i/t} + O(\ln t)] + \frac{iy^3}{6} \left[\frac{t^2}{2} e^{-i/t} + O(t^{-2}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (60)$$

式中 γ 是欧勒常数, $\Psi(y, \infty)$ 是定常解(参看 Dickinson, 1970), $I_2^{\mp}(x)$ 的表达式为

$$I_2^{\mp}(x) = \mp \frac{e^{\mp ix}}{x^2} \left(1 \pm \frac{2i}{x} - \frac{2(2+1)}{x^2} + \dots \right) \quad (61)$$

从上述渐近解, 得到如下几点重要结论:

1) 临界层厚度 $|y| \sim \frac{1}{t}$, 随时间增大临界层变薄;

2) 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 外部解趋于定常。但穿过临界层, 解仍有一 π 相角变化, 这表明, Rossby 驻波能量在临界层仍被部分吸收, 这与粘性线性临界层理论结论是一致的;

3) 在临界层中心, 纬向速度分量

$$u' \sim \ln t,$$

它随时间以 $\ln t$ 形式增大;

4) 当 $t = O(e^{-1/2})$ 时, 在临界层, 非线性项与线性项量级相当, 这反映了线性无粘初值问题的奇异性。事实上, 当 $|y|t \ll 1$, $t \gg 1$ 时, 涡度方程各项量级为

$$\begin{aligned} \psi_{yyt} + y\psi_{yyx} + \psi_x + \varepsilon(\psi_x\psi_{yyy} - \psi_y\psi_{yyx}) &= 0 \\ O(1) \quad O(yt) \quad O(1) \quad O(\varepsilon t^2) \quad O(\varepsilon t \ln t) \end{aligned} \quad (62)$$

因此, 当 $t \sim O(e^{-1/2})$ 时, $\varepsilon^2 t \sim O(1)$, 非线性项必须要加以考虑。

图 4 是 Rossby 波临界层随时间演变的示意图。

为了研究在更长时间尺度上 Rossby 波临界层的演变, Warn 等 (1978) 利用匹配渐近展开法和多重尺度法, 取线性理论在 $t \rightarrow \infty$ 时的值作为初值, 用数值方法研究了 Rossby 波非线性临界层的演变。在临界层, 出现了与猫眼流型类似的流型, 但它不是定常的, 它还在随时间演变。相角变化 θ_R 是时间 $T = e^{1/2}t$ 的函数, 如图 5 所示。 θ_R 的值从线性理论的 $-\pi$ 开始增大, 穿过零值后变为正。以后因计算不稳定, 计算终止。与此同时, Stewartson (1978) 研究了同一问题, 当临界层与边界之间的距离适当时, 临界层方程可以解析求解, 他得到 θ_R 随 T 振荡, 最后趋于零。SWW 理论表明, 线性理论所预言的 Rossby 波在临界层被吸收的结论并不是普遍成立的, 它是在部分吸收、反射和超反射间振荡, 最后趋于完全反射。图 6 是由 SWW 理论给出的 Rossby 波的非线性临界层的解随时间的演变。

由于 SWW 理论模型非常粗糙, 它与实际大气状况相差甚远, 它能用来解释什么大气现象还不太清楚。尽管这样, McIntyre 和 Palmer (1983, 1984) 发现, SWW 理论给出的临界层图象与平流层等熵位涡图上观测到的行星波破碎现象有某些类似, 因此, 他们认为非线性临界层理论可模拟行星波破碎的某些方面。

继后, Rossby 波非线性临界层理论研究又有许多扩展。Killworth 和 McIntyre

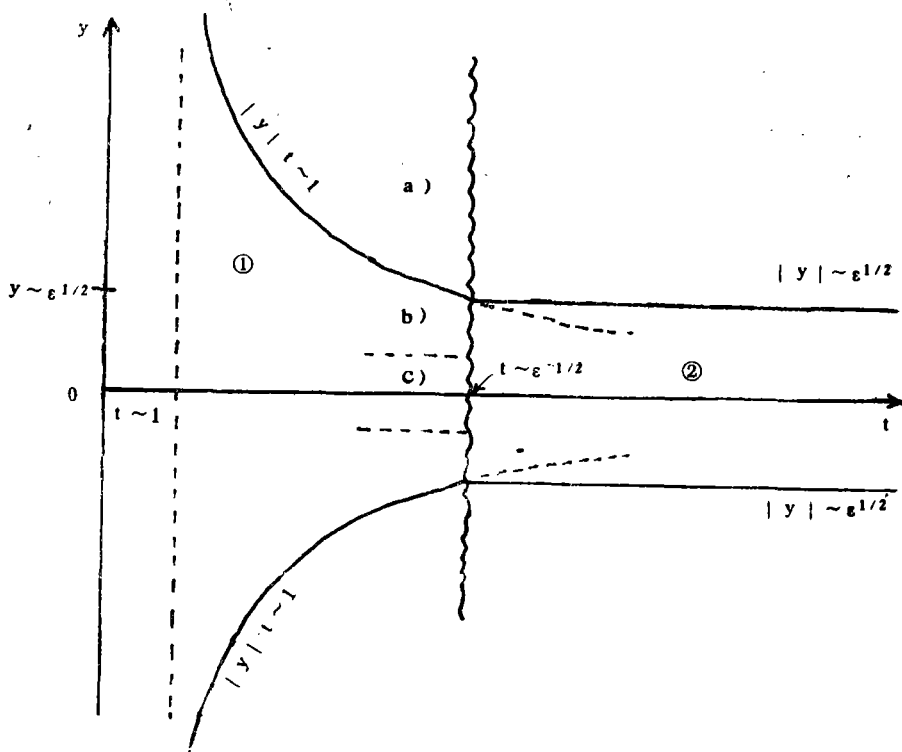


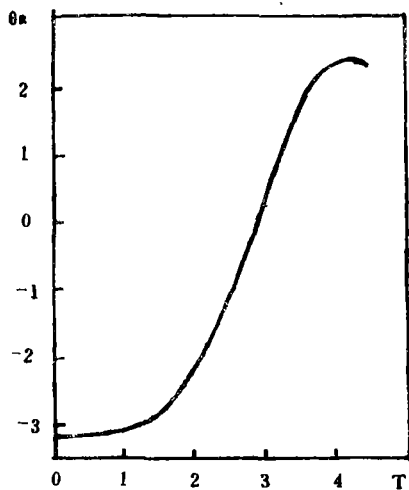
图 4 Rossby 波临界层的演变

(① 线性临界层, ② 非线性临界层, a) 外部区域, b) 临界层, c) 临界层中心)

(1985), Haynes (1985) 证明, SWW 理论研究的非线性临界层内的流动是正压不稳定的, 初看起来, 这种不稳定引起的临界层内流体的混和会增强耗散, 进而增强临界层对波的吸收。但 Killworth 和 McIntyre 证明, 吸收并不一定会发生, 在相当一般的条件下, 时间平均的临界层仍是完全的反射器。

Ritchie(1985) 用解析和数值方法研究了强迫与自由模态的共振现象, 共振使临界层随时间扩大。当参数 λ 比较小和高次谐波非共振的情况下, 他得到了稳定的类似猫眼的流型。Haynes 和 Cowley (1986) 考虑了带状基流随时间变化的情况, 他们得到, 当临界层迅速移动时, 在临界层存在猫眼流型, 流点被限制在猫眼内, 流点的经向输送形成强的涡度, θ_R 随时间变得越来越负。

目前, Rossby 波非线性临界层理论仍处于发展之中。Rossby 波在临界层到底是被吸收、反射还是超反射? 非定常的临界层是否存在稳定的猫眼环流? 它的存在是否需要粘性? 这些都是需要理论和数值研究者进一步弄清楚的问题。

图 5 相角 θ_R 随时间 T 的变化

五、结 语

本文对切变流的波动临界层研究状况进行了综述,重点放在对基本概念,基本理论和基本方法的介绍。

近20多年来,临界层研究经历了从线性理论到非线性理论的飞跃。非线性理论取得

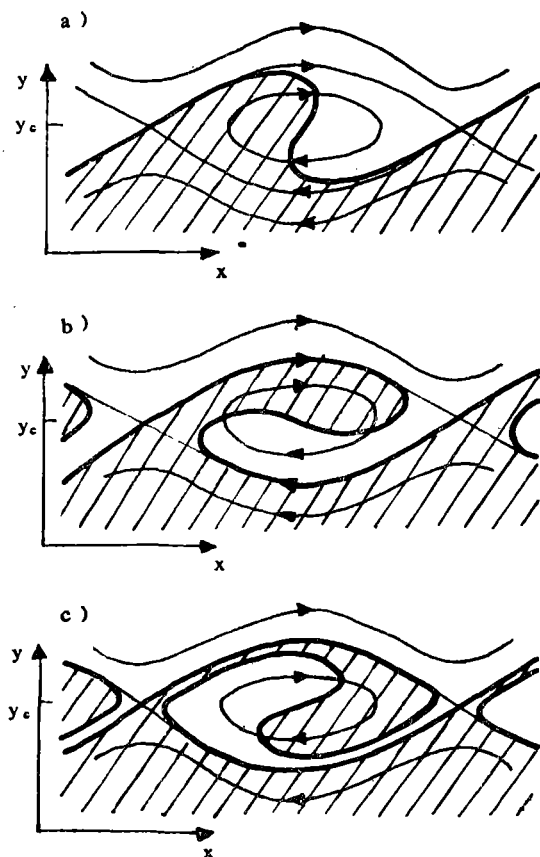


图 6 Rossby 波非线性临界层的解随时间的演变

(a $T = e^{1/2}t = 2$, b $T = 4$, c $T = 6$; 细实线为流线,由闭合流线构成的晶体区域为 Kelvin 猫眼,粗实线为绝对涡度 $\xi = \xi_c$ 的物质线,初始位于 $y = y_c$, 阴影区 $\xi < \xi_c$, 非阴影区 $\xi > \xi_c$ (根据 Andrews 等, 1987))

了许多成果,对线性理论有重大修正。如,非线性临界层的相角变化 θ_R 并不等于线性临界层的 $-\pi$ 值;非线性临界层内存在猫眼流型,这是线性临界层所不具有的。这导致非线性临界层与线性临界层具有显著不同的性质,它为流动不稳定性提供了新的机制。

就非线性临界层理论本身而言,由于各个研究者采用了不同的研究途径,在时间依赖性、粘性和非线性三者间取不同的平衡,最后得到了不同的振幅演化方程,这样,各个研究者所得结论也有不一致的地方。不同振幅演化方程间有何关系以及它们与具体物理过程有何联系,还需要人们进一步去弄清楚。

实际问题大都是非线性的。可以期望,非线性临界层理论研究将会进一步得到发展。

参 考 文 献

- [1] Andrews, D. G., J. R. Holton and C. B. Leovy, *Middle Atmosphere Dynamics*, Academic Press, Inc, 1987.
- [2] Benney D. J., and R. F. Bergeron, A new class of nonlinear waves in parallel flows, *Studies Appl. Math.* **48**, 181-204, 1969.
- [3] Booker, J. R., and F. P. Bretherton, The critical layer for internal gravity waves in a shear flow, *J. Fluid Mech.* **27**, 513-539, 1967.
- [4] Davis, R. E., On the high Reynolds number flow over a wavy boundary, *J. Fluid Mech.*, **36**, 337-346, 1969.
- [5] Dickinson, R. E., Development of a Rossby wave critical level, *J. Atmos. Sci.*, **27**, 627-633, 1970.
- [6] Haberman, R., Critical layers in parallel flows, *Studies Appl. Math.*, **51**, 139-161, 1972.
- [7] Haynes, P. H., Nonlinear instability of a Rossby-wave critical layer, *J. Fluid Mech.*, **161**, 493-511, 1985.
- [8] Haynes, P. H., and S. J. Cowley, The evolution of an unsteady nonlinear Rossby wave critical layer, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **35**, 1-55, 1986.
- [9] Kelvin, L., On a disturbing infinity in Lord Rayleigh's solution for waves in a plane vortex stratum, *Nature*, **XXIII**, 45-46, 1880.
- [10] Killworth, P. D., and M. E. McIntyre, Do Rossby wave critical layers absorb, reflect or over-reflect? *J. Fluid Mech.* **161**, 449-492, 1985.
- [11] Lin, C. C., On the stability of two-dimensional parallel flows, Part I, II, III, *Quart. Appl. Math.*, **3**, 117-142, 218-234, 277-301, 1945.
- [12] Lin, C. C., *The Theory of Hydrodynamic Stability*, Cambridge Uni. Press, 1955.
- [13] Lin, C. C., and D. J. Benney, On the instability of shear flows and transition to turbulence, *Pro. XIth Intl. Congr. Appl. Meth.* ed. by H. Görtler, 1964.
- [14] McIntyre, M. E., and T. N. Palmer, The "surf-zone" in the stratosphere, *J. Atmos. Terr. Phys.*, **46**, 825-849, 1984.
- [15] McIntyre, M. E., and T. N. Palmer, Breaking planetary waves in the stratosphere, *Nature* (London), **305**, 593-600, 1983.
- [16] Maslowe, S. A., Shear flow instability and transition, In *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence*, ed. by H. L. Swinney and J. P. Gollub, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1981.
- [17] Merkin, L., A critical layer dominated by non-parallel effects in a rotating barotropic flow, *Proc. R. Soc. London*, **A388**, 293-310, 1983.
- [18] Miles, J. W., On the generation of surface wave by shear flows, *J. Fluid Mech.*, **3**, 185-204, 1957.
- [19] Ritchie, H., Rossby wave resonance in the presence of a nonlinear critical layer, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **31**, 49-92, 1985.
- [20] Stewartson, K., The evolution of the critical layer of a Rossby wave, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **9**, 185-200, 1978.
- [21] Tung, K. K., A theory of stationary long waves, Part III: Quasi-normal modes in a singular waveguide, *Mon. Wea. Rev.*, **107**, 751-774, 1979.
- [22] Warn, T., and H. Warn, On the development of a Rossby wave critical level, *J. Atmos. Sci.*, **33**, 2021-2025, 1976.
- [23] Warn, T., and H. Warn, The evolution of a nonlinear critical level, *Studies Appl. Mech.*, **59**, 37-71, 1978.

ADVANCE IN STUDIES OF CRITICAL LAYERS OF WAVES IN SHEAR FLOW

Tan Benkui* Wu Rongsheng

(Department of Atmospheric Sciences, Nanjing University, 210008)

Abstract

The critical layers of waves in parallel shear flow are generally classified into three kinds: viscosity critical layer, nonlinear critical layer, and non-steady critical layer. The theories on the three kinds of critical layers and their recent developments are reviewed in detail in this paper.

* Present affiliation, Department of Geophysics, Peking University.