弱受迫作用下大气对流运动进入混沌的条件及分岔途径*

吴 勇** 欧阳首承

(四川涪陵地区气象局，648000) (成都气象学院，610041)

Guckenheimer 和 Holmes[1]针对弱受迫系统或如下的小参数受迫方程组

$$\dot{x}^i=f^i(x^1,\ x^2)+\varepsilon g^i(x^1,x^2,\lambda,t) \tag{1}$$

系统地介绍了研究混沌性的解析方法。式中"·"表示对时间求导数，上标 $i=1,2$；参数 $\lambda\in R^m$（R 表示实数域，m：维数）；$g^i(x^1,x^2,\lambda,t+1)=g^i(x^1,x^2,\lambda,t)$，为周期函数；$0<\varepsilon\ll 1$。式(1)突出了非线性作用，故为弱受迫的非线性系统。此系统如设(1)$\varepsilon=0$，有双曲鞍点，且形成分界线环的同宿（homoeclinic）轨道或异宿(heteroclinic)轨道，其内部充满(1)$\varepsilon=0$ 的周期解；记同宿或异宿轨道中某分支的方程为 $x_0^i=x_0^i(t)$，$i=1,2$。在一定条件下分析 Melnikov 函数

$$M_1(t_0,\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}\{g^1(x_0^1(t),x_0^2(t),\lambda,t+t_0)\cdot f^2(x_0^1(t),x_0^2(t))$$
$$-g^2(x_0^1(t),x_0^2(t),\lambda,t+t_0)\cdot f^1(x_0^1(t),x_0^2(t))\}\cdot\exp\{-\int_0^t\left[\frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x_0^1(t),\right.$$
$$\left.x_0^2(t))+\frac{\partial f^2}{\partial x^2}(x_0^1(t),x_0^2(t))\right]\mathrm{d}t\Big\} \tag{2}$$

若 $M_1(t_0,\lambda)$不依赖于 ε，且在参数 λ 所在空间的某区域内，$M_1(t_0,\lambda)$在零点附近振动，当 $M_1(t_0,\lambda)=0$ 时，

$$\frac{\partial}{\partial t_0}M_1(t_0,\lambda)\Big|_{t=t_0}\neq 0$$

故若 $0<\varepsilon\ll 1$ 时，式(1)存在横截同宿或异宿点，即式(1) 的解包含无穷多的不稳定周期轨道集，和不可数无穷多的有界非周期轨道集及稠轨线。这些轨线对初值极其敏感。本文利用此方法讨论了对流型[2]方程在弱受迫作用的情况，获得了有益的结果。

1．弱受迫的对流运动进入混沌的基本条件

大气温度 $\bar{T}(Z)$(环境)的非线性递减形式

$$\bar{T}=\bar{T}_0-\Gamma Z-\bar{H}Z^3 \tag{3}$$

$\Gamma=-\dfrac{\partial\bar{T}}{\partial Z}$为垂直减温率，$\bar{H}$为非线性层结强度。其对流模型为[2]

$$\ddot{Z}+N^2Z-bZ^3=a \tag{4}$$

* 本文于 1989 年 12 月 20 日收到初稿，1991年 2 月 9 日收到最后修改稿。

** 现在工作单位：四川涪陵地区国土局。

式中 $\ddot{Z}=\frac{d^2Z}{dt^2}$；$a=g(T_0-\overline{T}_0)/\overline{T}(Z)$；$T_0$，$\overline{T}_0$ 分别为气块、环境的起始温度，故 a 为加热强度参数；$b=\overline{\Pi}g/\overline{T}(Z)$为非线性层结的强度参数；$N$：Brunt-Väisälä 频率。

如将 a，b 的参数表达式作级数展开，并分别保留至 Z 的零次项，则 a，b 分别为

$$a=\frac{T_0-\overline{T}_0}{\overline{T}_0},\quad b=\frac{\overline{\Pi}g}{\overline{T}_0} \tag{5}$$

0设 b 为常参数；a 为弱周期形式

$$a=\varepsilon A\cos\omega t \tag{6}$$

$<\varepsilon\ll1$，A 为振幅或强度，且量级取为 $o(A)\sim1$，ω 为其频率。显然，式(4)为弱受迫的非线性系统。

其次，考虑耗散性的弱阻尼作用：

$$-\varepsilon\alpha\dot{Z} \tag{7}$$

式中 α 表示线性阻尼强度，量级$o(\alpha)\sim1$，于是式(4)变为

$$\ddot{Z}+N^2Z-bZ^3=-\varepsilon\alpha\dot{Z}+\varepsilon A\cos\omega t \tag{8}$$

式(8)是弱受迫的对流形式的非自治系统，亦即非线性的确定性系统。下面讨论其进入混沌的条件。

令$(8)_\varepsilon=0$，即不考虑弱受迫作用，据 Melnikov-Holmes 方法，可求其异宿轨道，即

$$\ddot{Z}=-N^2Z+bZ^3 \tag{9}$$

取

$$\dot{Z}=W$$

则有

$$\begin{cases}\dot{Z}=W\\ \dot{W}=-N^2Z+bZ^3\end{cases} \tag{10}$$

式(10)的初积分为

$$\frac{1}{2}(W^2+N^2Z^2)-\frac{1}{4}bZ^4=h \tag{11}$$

$h=const.$，若 $N^2>0$，$b>0$，则式(9)具有一个稳定的中心型奇点 $O(0,0)$，及不稳定的双曲鞍点 $A\left(\frac{N}{\sqrt{b}},0\right)$，$B\left(-\frac{N}{\sqrt{b}},0\right)$，当

$$0<h<\frac{N^4}{4b}$$

式(11)表征的轨道是围绕中心的一族闭轨道的分支，且当

$$h=\frac{N^4}{4b}$$

时，式(11)是通过 A，B 两点的异宿轨道，其上、下支为

$$\begin{cases}Z_0(t)=\pm\frac{N}{\sqrt{b}}\mathrm{th}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}Nt\right)\\ W_0(t)=\pm\frac{N^2}{\sqrt{2b}}\mathrm{sech}^2\left(\sqrt{\frac{1}{2}}Nt\right)\end{cases} \tag{12}$$

取上半平面的异宿轨道，即式(12)的正号部分。现考虑受迫作用，则对应式(12)构造式(2)的Melnikov函数[3]，有

$$M_1(t_0,\lambda)=-\int_{-\infty}^{+\infty}W_0(t)[-\alpha W_0(t)+A\cos\omega(t+t_0)]\mathrm{d}t$$

$$=-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{N^2}{\sqrt{2b}}\mathrm{sech}^2\left(\sqrt{\frac{1}{2}}Nt\right)\left\{-\alpha\frac{N^2}{\sqrt{2b}}\mathrm{sech}^2\left(\sqrt{\frac{1}{2}}Nt\right)\right.$$

$$+A\cos\omega(t+t_0)\}dt$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3b}\alpha N^3-\frac{\sqrt{2}\pi A\omega}{\sqrt{b}}\frac{\cos\omega t_0}{\mathrm{sh}\frac{\pi\omega}{\sqrt{2}N}} \tag{13}$$

这里，参数 λ 具体为 α，b，N，A，ω。利用式(13)可讨论其进入混沌的条件。令 $M_1(t_0,\lambda)=0$，或

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\alpha N^3}{b}=\frac{\sqrt{2}\pi A\omega}{\sqrt{b}}\frac{\cos\omega t_0}{\mathrm{sh}\frac{\pi\omega}{\sqrt{2}N}}$$

即当参数 α，b，N，A，ω 满足不等式

$$\beta=\frac{3}{2}\pi\frac{\sqrt{b}A\omega}{\alpha N^3}\frac{1}{\mathrm{sh}\frac{\pi\omega}{\sqrt{2}N}}>1 \tag{14}$$

时，系统方进入混沌。式(14)表明除系统非线性外的外源影响是：当热源越大则利于系统进入混沌；耗散性阻尼作用则相反，当其作用加强时，系统可退出混沌。如给定 b，A，N，ω，则当

$$\alpha>\alpha_c=\frac{3}{2}\pi\frac{\sqrt{b}A\omega}{N^3}\frac{1}{\mathrm{sh}\frac{\pi\omega}{\sqrt{2}N}} \tag{15}$$

时，则系统退出混沌。α_c 即为所求得的临界线性阻尼系数。

若设 $\omega=0.08$，$N=0.06$，$\alpha=5$，$b=0.01$，$A=1.5$，代入式(14)，计算得

$$\beta=5.38>1$$

式(14)得到满足。表明在周期热源频率和 Brunt-Väisälä 频率较小的条件下，较弱的非线性层结便可产生混沌。若气块作简谐振动，便会激发四周空气以谐波形式传播；若气块进入混沌，作非周期形式的无规则运动，就会激发周围空气以非周期的无规则运动方式向四周传播，边界层中热力乱流的产生可能与此有关。

2. 奇阶次谐分叉及进入混沌的途径

Duffing 方程(8)，当 b 较小时，且 $\omega=N^2+\varepsilon\omega_1$，存在两个尖点突变[4]

$$(-b,\ \varepsilon\omega)=\pm\left(\frac{32}{27}\sqrt{3}\frac{\varepsilon\alpha^3N^3}{A^2},\ \sqrt{3}\varepsilon\alpha N\right)$$

若引入变换，$t=\frac{\tilde{t}}{N}$，$Z=\frac{N}{\sqrt{b}}\tilde{Z}$

则可变为标准 Duffing 方程

$$\ddot{\tilde{Z}}+\tilde{Z}-\tilde{Z}^3=-\varepsilon\tilde{\alpha}\dot{\tilde{Z}}+\varepsilon\tilde{A}\cos\tilde{\omega}\tilde{t} \tag{16}$$

式中，$\tilde{\alpha}=\frac{\alpha}{N}$，$\tilde{A}=\frac{\sqrt{b}}{N^3}A$，$\tilde{\omega}=\frac{\omega}{N}$。同理，可求得式(16)进入混沌的条件为

$$\frac{2}{3\pi\tilde{\omega}}\mathrm{sh}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\pi\tilde{\omega}\right)<\tilde{A}/\tilde{\alpha} \tag{17}$$

设进入混沌的门槛值为

$$R_\infty=\frac{2}{3\pi\tilde{\omega}}\mathrm{sh}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\pi\tilde{\omega}\right) \tag{18}$$

故当初积分常数 $h=h_k=k^2/(1+k^2)^2<\frac{1}{4}$ 时，围绕中心点 O(0,0)的轨道是

$$\begin{cases} \widetilde{Z}_k=\dfrac{\sqrt{2}k}{\sqrt{1+k^2}}\,\mathrm{sn}\left(\dfrac{t}{\sqrt{1+k^2}},k\right) \\ \widetilde{W}_k=\dfrac{\sqrt{2}k}{1+k^2}\,\mathrm{cn}\left(\dfrac{t}{\sqrt{1+k^2}},k\right)\mathrm{dn}\left(\dfrac{t}{\sqrt{1+k^2}},k\right) \end{cases} \tag{19}$$

式中，k 为周期轨道参数，$0<k<1$，sn，cn，dn 为 *Jacobi* 椭圆函数。sn，cn 周期为 $T=T(k)=4\sqrt{1+k^2}K(k)$，dn 周期为 $T=T(k)=2\sqrt{1+k^2}K(k)$。式(19)的 Melnikov 函数为

$$\begin{aligned} M_T(t_0,\tilde{\lambda})&=\int_0^T[-\tilde{\alpha}W_k(t)+\tilde{A}\cos\tilde{\omega}(t+t_0)]W_k(t)\mathrm{d}t \\ &=-\frac{2\tilde{\alpha}k^2}{(1+k^2)^2}\int_0^T cn^2\left(\frac{t}{\sqrt{1+k^2}},k\right)dn^2\left(\frac{t}{\sqrt{1+k^2}},k\right)dt \\ &\quad+\frac{\sqrt{2}\tilde{A}k}{1+k^2}\int_0^T cn\left(\frac{t}{\sqrt{1+k^2}},k\right)dn\left(\frac{t}{\sqrt{1+k^2}},k\right) \\ &\quad\cos\tilde{\omega}t_0\cos\tilde{\omega}t\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{20}$$

这里 $\tilde{\lambda}$ 具体指 $\tilde{A}$，$\tilde{\alpha}$，$\tilde{\omega}$。取式(19)的周期为受迫周期的整数倍

$$T(k)=2\pi m/\tilde{\omega} \tag{21}$$

m 为正整数，则式(20)经演算得到

$$M_m(t_0,\ \tilde{\lambda})=-\tilde{\alpha}p_1(m)+\tilde{A}p_2(m)\cos\tilde{\omega}t_0$$

式中

$$p_1(m)=\frac{8}{3(1+k^2)^{3/2}}[(k^2-1)K(k)+(k^2+1)E(k)]$$

$$p_2(m)\begin{cases}=0,\ m\text{ 为偶数} \\ =2\sqrt{2}\pi\tilde{\omega}/\mathrm{sh}\dfrac{\pi mK(\sqrt{1-k^2})}{2K(k)},\ m\text{ 为奇数}\end{cases}$$

其中 m 与 k 通过式(21)联系起来。$E(k)$为第二类完全椭圆积分，当

$$p_1(m)/p_2(m)<\tilde{A}/\tilde{\alpha} \tag{22}$$

时，系统即出现 m 阶次谐轨道。定义 m 阶次谐轨道的门槛值为

$$R_m(\tilde{\omega})=\frac{2\sqrt{2}[(k-1)K(k),+(k^2+1)E(k)]}{3\pi\tilde{\omega}(1+k^2)^{3/2}}\mathrm{sh}\frac{\pi mK(\sqrt{1-k^2})}{2K(k)} \tag{23}$$

根据文献[5]，当 $k<1$ 时，$K(k)$，$E(k)$的展开式为

$$K(k)=\frac{\pi}{2}\left\{1+\frac{k^2}{4}+\frac{9}{64}k^4+\cdots\right\}$$

$$E(k)=\frac{\pi}{2}\left\{1-\frac{k^2}{4}-\frac{3}{64}k^4-\cdots\right\}$$

可以证明，当 k 接近于 1 时，下式

$$R_m(\tilde{\omega})<R_\infty(\tilde{\omega}) \tag{24}$$

成立。若注意 $4\sqrt{1+k^2}K(k)=2\pi m/\tilde{\omega}$，可证明

$$R_m(\tilde{\omega})\xrightarrow{k\to1}R_\infty(\tilde{\omega}) \tag{25}$$

式(24)、(25)表明，当 $k\to1$，$m\to\infty$，m 阶次谐轨道门槛值趋于混沌门槛值。故当 $\tilde{\omega}$ 固定，$\tilde{A}/\tilde{\alpha}$ 逐渐变大时，$m\to\infty$系统能经过无限次奇阶次谐分叉而达到混沌门槛值。

显然，$\tilde{\omega}$ 取不同值时，当参数 $\tilde{A}/\tilde{\alpha}$ 逐渐增大时，系统进入混沌的途径是不同的。

若取 $\tilde{\omega}=2.6667$，所求得的各次谐及混沌门槛值如表 1 所示。不难看出有

$$R_3<R_5<R_7<R_9<R_{11}\cdots<R_\infty$$

表 1　不同次谐的混沌门槛值

m	3	5	7	9	11	…	∞
k	0.3987	0.8813	0.9767	0.9955	0.9991	…	1
R_m	14.7052	14.8098	14.9147	14.9159	14.9271	…	15.1002

因此，当 $\tilde{\omega}=2.6667$ 时，系统进入混沌的路径为

$$3\to5\to7\to9\to11\to\cdots\to\infty(\text{混沌})$$

3. 结　　论

本文就非线性对流模型在弱受迫作用下讨论了其可进入混沌的基本条件和途径。文中主要是将受迫作用具体为加热和阻尼作用。其结果是

1) 在弱周期热力强迫和阻尼作用下的对流系统出现混沌解是有条件的；加热可导致系统进入混沌，而阻尼耗散则可以退出混沌。

2) 弱受迫作用下的对流系统会随加热增大和阻尼耗散的减弱按不同的 $\tilde{\omega}$ 值取不同的途径进入混沌，若给出具体的参数值，其轨道是可确定的。

参 考 文 献

[1] Guckenhelmer, J., and P. Holmes, Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields, Springer verlag, 1983.
[2] 刘式达、刘式适，大气中对流的分岔和突变模型，力学学报，**16**，1，10—18，1984。
[3] 李继彬等，几类非线性受迫振动系统的混沌性质，数学物理学报，**5**，2，195—204，1985。
[4] 章国材，大气中的对流模型，气象学报，**46**，2，171—179，1988。
[5] 王竹溪、郭敦仁，特殊函数概论，620—623，科学出版社，1979。

THE CONDITION OF THE INTROMITTED CHAOS AND THE BRANCHY ROAD OF THE ATMOSPHERIC CONVECTION UNDER A WEAK FORCED EFFECT

Wu Yong
(*Fuling Meteorological Bureau, Sichuan Province*, 648000)
Ouyang Shoucheng
(*Chengdu college of meteorology*, 610041)

Abstract

In this paper, by using the Melnikov-Holmes method the state of the atmospheric convection under a weak forced effect and its duffing equation are discussed. The results show that the intromitted chaos needs certain condition and the atmospheric convection can get to the threshold of entered into chaos through transfinite branch of odd order, and out from chaos under the effect of certain friction and dissipation.