第50卷 第3期 气 象 学 报 Vol. 50, No. 3
1992 年 8 月 ACTA METEOROLOGICA SINICA Aug., 1992

正压大气中地转偏差引起的非线性 Rossby 波*

赵 瑞 星

(北京应用气象研究所，100081)

正压大气中的非线性波动的研究业已在 60 年代开始[1]，70 年代到 80 年代取得了丰硕的成果。在我国巢纪平等(1980)[2]首先讨论了旋转大气中的正压 Rossby 椭圆余弦波。之后刘式适、黄思训[3,4]等也做了大量的工作。特别是刘式适等，鉴于以前的工作多采用多尺度方法，比如约化摄动法，而这种方法中的 G-M 变换本身就意味着将要导出的结果。考虑到长波的弱非线性近似，将非线性项在平衡点附近展开为 Taylor 级数，求得了方程的非线性近似解。黄思训等认为应用展开法只能求得原方程的近似解，问题的解析解尚未找到。于是利用类似的模式导出了方程的解析解，且给出了存在非线性 Rossby 周期解和孤立波解的条件。在文献[3,4]的工作中所用的模式都采用了一些假设，略去了部分非线性项。采用这样的模式得到的波动很难说是原模式的波动。文献[5]认为这是一种不得已的办法。为克服上述不足，刘式适等[6]试图引用半地转（地转动量）近似解决这个问题。但由于种种原因，所得到的仍是近似解。本文应用类似的方法，讨论由地转偏差引起的非线性 Rossby 波，得到了它的解析解。

1. 控制方程

采用文献[5]中的正压模式且引入半地转（地转动量）近似。且将模式中的地转风分量和地转偏差分开，将地转风分量用位势高度场代替。并将这样处理后的模式化成涡度、散度方程形式。假设解为行波形式代入该模式可得到讨论地转偏差引起的非线性 Rossby 波的控制方程（方程中所用符号均类似文献[6]，下同）

$$\begin{cases}[(-\sigma+kU+lV)K^2\Phi'']'+f_0^2(kU+lV)'+\beta k\Phi'=0\\ f_0^2(lU'-kV')-\beta l\Phi'=0\\ [-\sigma\Phi+(kU+lV)\Phi]'+C_0^2(kU+lV)'=0\end{cases} \tag{1}$$

2. 周期解、孤立波解及其存在条件

1) 周期解和孤立波解

首先对方程(1)积分一次，且取积分常数为零(不为零的情况在下一节讨论)，可得到

$$\Phi''=\frac{\beta kc_0^2+\sigma f_0^2}{\sigma K^2c_0^2}\Phi+\frac{\beta k}{\sigma K^2c_0^2}\Phi^2 \tag{2}$$

和

$$\begin{cases}kU+lV=\dfrac{\sigma\Phi}{c_0^2+\Phi}\\ lU-kV=\dfrac{\beta l}{f_0^2}\Phi\end{cases} \tag{3}$$

显然，由式(2)的解可得到 U，V 的解。

由常微分方程知识知，在三次多项式

* 本文于1990年8月28日收到，1991年1月18日收到修改稿。

$$G(\Phi)=\Phi^3+a\Phi^2+\tilde{c} \tag{4}$$

其中　$a=\frac{3}{2}\frac{\beta k c_0^2+\sigma f_0^2}{\beta k}$，　$\tilde{c}=\frac{3}{2}\frac{\sigma K^2 c_0^2}{\beta k}c$，　c 为求解过程中得到的一个积分常数。

存在三个实根时，式(2) 的解为周期解

$$\Phi(\theta)=\Phi_2+(\Phi_1-\Phi_2)\mathrm{cn}^2\left(\sqrt{\frac{\beta k(\Phi_3-\Phi_1)}{6\sigma K^2 c_0^2}}\theta\right) \tag{5}$$

其中 Φ_1，Φ_2，Φ_3 为$G(\Phi)$的三个实根。当这三个实根中的两个相等时式(2)的解为孤立波解

$$\Phi(\theta)=\Phi_2-(\Phi_2-\Phi_1)\mathrm{sech}^2\left(\sqrt{\frac{2\beta k(\Phi_2-\Phi_1)}{12\sigma k^2 c_0^2}}\theta\right) \tag{6}$$

将式(5) 或(6) 代入式(3) 可得到U，V的解。

2) 周期解和孤立波解出现的条件

方程(2) 存在周期解和孤立波解的条件是$G(\Phi)$存在三个实根和其中有两个相等。根据三次方程存在实根的判别式，可得 $G(\Phi)$存在三个实根的条件为

$$\begin{cases} a>0\text{ 时，}0\geqslant\tilde{c}\geqslant-\frac{4}{27}a^3 \\ a<0\text{ 时，}0\leqslant\tilde{c}\leqslant-\frac{4}{27}a^3 \end{cases} \tag{7}$$

利用三次方程根与系数的关系可将上述条件化成三次方程的系数和方程解的振幅 $\hat{\Phi}(\hat{\Phi}=\Phi_2-\Phi_1)$之间的关系[6]，即

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\Phi}\leqslant a\leqslant\hat{\Phi}\text{或}a\leqslant-\hat{\Phi} \tag{8}$$

如果令$M=a/\hat{\Phi}$，那么上述条件化为

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant M\leqslant 1\text{ 或}M\leqslant-1. \tag{9}$$

在文献[6]的讨论中只讨论了相当于$M\leqslant-1$的情况。上述条件中等号成立时是孤立波出现的条件。

3) 波长和波速公式

如果方程的解为周期解式(5)，那么由椭圆函数的性质知，解的波长为

$$L=\frac{2K(m)}{k}\sqrt{\frac{6\sigma K^2 c_0^2}{\beta k(\Phi_3-\Phi_1)}} \tag{10}$$

其中$K(m)$为第一类完全椭圆积分，m为模数，

$$m^2=\frac{\Phi_2-\Phi_1}{\Phi_3-\Phi_1} \tag{11}$$

显然

$$\lim_{\hat{\Phi}\to 0}K(m)=\lim_{m\to 0}K(m)=\frac{\pi}{2} \tag{12}$$

又由根与系数的关系式知 $\Phi_3(\hat{\Phi}=0)=-a$，所以有

$$\lim_{\hat{\Phi}\to 0}L=\frac{2\pi}{k}\sqrt{\frac{-\sigma K^2 c_0^2}{\beta k c_0^2+\sigma f_0^2}} \tag{13}$$

这正好是方程(2) 的线性波波长，即

$$\lim_{\hat{\Phi}\to 0}L=L_{线} \tag{14}$$

由根与系数的关系式我们可得非线性 Rossby 波的频散关系式

$$\sigma=-\frac{\beta k\left(1+\frac{2}{3}\alpha\hat{\Phi}\right)}{K^2c/\alpha^2\hat{\Phi}^2+f_0^2/c_0^2} \tag{15}$$

其中 $\alpha=(-3-2M\pm\sqrt{4M^2-3})/6$(参见文献[6])和 $\alpha\hat{\Phi}=\Phi_1$。由于 Φ_1 是 $G(\Phi)$的根,所以有$G(\Phi_1)=0$，由此可得到

$$\lim_{\hat{\Phi}\to 0} c/\alpha^2\hat{\Phi}^2=-\frac{\beta k+\sigma f_0^2/c_0^2}{\sigma K^2} \tag{16}$$

实际上这就是线性方程的特征值，可定义为 $n_{线}^2$ 所以有

$$\lim_{\hat{\Phi}\to 0}\sigma=-\frac{\beta k}{n_{线}^2K^2+f_0^2/c_0^2}=\sigma_{线} \tag{17}$$

从这里我们看到线性波是非线性波的退化形式。

3. 讨论和结论

1) 积分常数的影响

在前面的讨论中曾取方程(1) 积分一次后的方程的常数为零。如果不取为零，令其为 c_1 和 c_2，可得到类似式(2) 的方程

$$\Phi''=\frac{\beta kc_0^2+\sigma f_0^2}{\sigma K^2c_0^2-c_1K^2}\Phi+\frac{\beta k}{\sigma K^2c_0^2-c_1K^2}\Phi^2+\frac{f_0^2c_1-c_2}{\sigma K^2c_0^2-c_1K^2} \tag{2}'$$

如果我们作一次坐标平移变换

$$y=\Phi+\frac{b_1}{2}-\sqrt{b_1^2-4b_2}/2 \tag{18}$$

其中

$$b_1=(\beta kc_0^2+\sigma f_0^2)/\beta k$$
$$b_2=(f_0^2c_1-c_2)/(\sigma K^2c_0^2-c_1K^2)$$

那么，式(2) 变为

$$y''=\frac{\beta k}{\sigma K^2c_0^2-c_1K^2}(y^2+\sqrt{b_1^2-4b_2^2}\,y) \tag{19}$$

显然，式(19)和式(2) 是完全类似的方程，式(19)中的$\sqrt{b_1^2-4b_2}$ 相当于式(4) 中的系数$\frac{2}{3}\alpha$。类似地我们可以得到式(19)存在周期解和孤立波解的条件为

$$\sqrt{3}/2\leqslant M\sqrt{1-16b_2/9a^2}\leqslant 1 \tag{20}$$

或

$$M\sqrt{1-16b_2/9a^2}\leqslant -1 \tag{21}$$

且要求 $b_2<9a^2/16$。

显然，$b_2>0$ 且满足式(21)时，使M的取值范围变大了；相反 $b_2<0$ 时，b_2 使M的取值范围缩小了，这是$M>0$ 的情况。当$M\leqslant -1$ 时，情况正好相反。M的取值范围增大意味着非线性波动易出现，缩小意味着非线性波动不易出现了。

另外积分常数不等于零(主要是$c_1\neq 0$)时积分常数取值的不同会使非线性周期解的波长发生变化。

2) 椭圆余弦函数不退化为三角函数的情况

非线性方程(2) 在满足周期解存在条件时，其解为椭圆余弦波。但此时所对应的线性方程不一定存在周期解。比如 $a>0$ 且 $\sigma>0$ 或 $a<0$ 且 $\sigma<0$ 所对应的线性方程的解为指数形式的解。因此，非线

性周期解退化为线性周期解是有条件的，其条件为

$$a>0 \text{ 且 } \sigma<0 \text{ 或 } a<0 \text{ 且 } \sigma>0 \tag{22}$$

由于 $a<0$ 一定有 $\sigma<0$，所以条件式(22)实际上是

$$a>0 \text{ 且 } \sigma<0 \text{ 即 } \sigma<0,\ |\sigma|<\frac{\beta k c_0^2}{f_0^2} \tag{23}$$

显然，这样的条件线性 Rossby 波

$$\sigma_{线}=-\beta k/(K^2+f_0^2/c_0^2) \tag{24}$$

是满足的。因此，只有满足线性 Rossby 波存在条件的非线性 Rossby 波才能线性退化为线性波动。

3) 小结

由上面的分析和讨论可知，在半地转（地转动量）近似的正压模式中，可以得到非线性 Rossby 波的解析解，而不是近似解。非线性周期解存在的条件是

$$\sqrt{3}/2\,\hat{\Phi}\leqslant a<\hat{\Phi} \text{ 或 } a<-\hat{\Phi} \tag{25}$$

孤立波存在的条件是

$$a=\pm\hat{\Phi} \tag{26}$$

如果定义 $M=a/\hat{\Phi}$，上述条件变为

$$\sqrt{3}/2\leqslant M<1 \text{ 或 } M<-1 \tag{25}'$$

$$M=\pm 1 \tag{26}'$$

如果考虑积分常数的影响上述条件略有变化。

不是所有的非线性 Rossby 波的周期解都可以线性退化为线性周期解，只有满足线性 Rossby 波存在条件的非线性周期解才可线性退化为线性周期解。

参 考 文 献

[1] Long, R. R., Solitary waves in the westeries, *J. Atmos. Sci.*, 21, 197—200, 1964.
[2] 巢纪平等，旋转大气中的椭圆余弦波，中国科学，7，696—704，1980。
[3] 刘式适等，正压模式中的非线性波动，大气科学，7，125—135，1983。
[4] 黄思训等，非线性波动，空军气象学院学报，1，12—24，1984。
[5] 刘式适等，半地转近似下的非线性波，气象学报，45，3，257—266，1987。
[6] 黄思训，大气中非线性波和孤立波，空军气象学院学报，2，13—28，1985。

THE NONLINEAR WAVES PRODUCED BY GEOSTROPHIC DEVIATION IN BAROTROPIC ATMOSPHERE

Zhao Ruixing

(*Beijing Institute of Applied Meteorology*, 100081)

Abstract

In this paper the nonlinear waves that are produced by geostrophic deviation in the barotropic atmosphere with the semi-geostrophic approximation (or geostrophic momentum approximation) are discussed. The analytical solution of this barotropic model is obtained. It is shown that the condition which brought elliptical function into existence is

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\Phi}\leqslant a<\hat{\Phi} \text{ or } a<-\hat{\Phi}$$

and the condition which brought solitary into existence is

$$a=\pm\hat{\Phi}$$

If we defined $M=a/\hat{\Phi}$, the above conditions changed into

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant M<1 \text{ or } M<-1$$

and

$$M=\pm 1.$$