

Ertel 位涡和非线性对称不稳定性问题*

罗德海

(成都气象学院气象科学技术研究所)

谭本馊

(南京大学大气科学系)

提 要

本文应用 Lagrange 质点理论对大气中对称运动方程进行了简化,在此基础上进一步利用分岔和突变理论分析了环境地转风为非线性分布的情况下, Ertel 位涡在非线性对称不稳定中的作用,并得到了一些有意义的结果。

一、引 言

大家知道,对称不稳定是激发大气中一些中尺度天气系统的一个重要机制。关于对称不稳定问题的研究已进行了不少工作,特别是 70 年代以后。70 年代初期 Hoskins^[1] (1974)首先讨论了 Ertel 位涡在线性对称不稳定中的作用,指出当 Ertel 位涡为负值时,大气中会产生对称不稳定。随后 Bennetts 和 Hoskins^[2] (1979), Emanuel^[3-4] (1979, 1982) 又对大气中的对称不稳定的概念作了进一步的发展,得到了一些新结果,1983 年 Emanuel^[5]提出了对称不稳定的 Lagrange 质点理论,研究了空气质点达到饱和后的对称不稳定问题,在他的研究,他仅考虑了环境地转风为线性分布的情况。本文在他工作的基础上进一步考查了环境地转风为非线性分布的情况下 Ertel 位涡在非线性对称不稳定中的作用。

二、运 动 方 程

在不考虑摩擦作用的情况下,大气运动方程为

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{dv}{dt} + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{dw}{dt} = g \frac{\theta - \bar{\theta}}{\bar{\theta}} \end{cases} \quad (1)$$

其中 u, v, w 分别为 x, y, z 方向上的速度分量, p 为气压, ρ 为大气密度, g 为重力加速度, θ 为空气质点的位温, $\bar{\theta}$ 为环境大气的位温, f 为柯氏参数且为常数。方程(1)是用 Lagrange 质点理论描述的大气运动方程,这个方程与 Emanuel (1983) 所使用的方程一

* 本文于 1989 年 10 月 14 日收到, 1990 年 2 月 16 日收到修改稿。

样。

假设大气中的气压梯度力只随南北变化, 并满足地转风关系, 这种假定 Emanuel^[5] (1983) 曾证明是合理的, 这时用 Lagrange 质点理论描述的空气质点运动方程可变为

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - fv = 0 \\ \frac{dv}{dt} + f(u - u_g) = 0 \\ \frac{dw}{dt} = g \frac{\theta - \bar{\theta}}{\bar{\theta}} \end{cases} \quad (2)$$

其中 u_g 为环境地转风的纬向风速。

在本文中, 由于我们研究的是对称运动, 因此我们可假定运动与 x 无关。设初始时间, 空气质点在 $y = y_0, z = z_0$ 处, 其速度与环境地转风 u_g 相同, 但因为空气质点受到扰动, 而向北移动了 $\delta y (\delta y = y - y_0)$ 的距离, 在垂直方向上也移动了 $\delta z = z - z_0$ 的距离。这时 (y, z) 处的空气质点纬向速度为

$$u = \bar{u}_0 + f \delta y \quad (3)$$

其中 $\bar{u}_0$ 为初始时间质点的运动速度。

在大气中设空气质点在初始时刻 (y_0, z_0) 处, 空气质点位温 θ 与环境位温 $\bar{\theta}_0$ 相同, 而在 t 时刻 (y, z) 处, 环境位温 $\bar{\theta}$ 的分布为 $\bar{\theta} = \bar{\theta}_0 + \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \delta z$ (它相当于环境位温在 y, z 方向上成线性分布), $\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y}, \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}$ 为 $y = y_0, z = z_0$ 处的值。由于空气质点处于干绝热状态, 因而可以认为空气质点的位温在运动过程中是守恒的, 这时对于任何时刻 t , 有 $\bar{\theta} = \bar{\theta}_0$ 。另外在 $y_0 + \delta y$ 处, 我们可设环境地转风 u_g 为

$$u_g = u_0 + \frac{\partial u_g}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u_g}{\partial z} \delta z + \frac{\partial^2 u_g}{\partial y \partial z} \delta y \delta z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_g}{\partial y^2} \delta y^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u_g}{\partial y^3} \delta y^3 \quad (4)$$

其中 $\frac{\partial u_g}{\partial y}, \frac{\partial u_g}{\partial z}, \frac{\partial^2 u_g}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 u_g}{\partial y^2}, \frac{\partial^3 u_g}{\partial y^3}$ 都为 $y = y_0, z = z_0$ 处的值, 这里我们设环境地转风的分布有 Taylor 级数展开的形式, 并设环境地转风在 y 方向上呈非线性分布, 而在 z 方向呈线性分布。

(4) 式相当于地转风 u_g 在 y, z 方向上的分布, 对于真实大气在某种程度上是合理的, 在作者另一文^[6]中没有考虑 (4) 式右端第四项 $\frac{\partial^2 u_g}{\partial y \partial z}$ 的作用, 因而无法用 Ertel 位涡来

表示 (4) 式中的第四项和第五项。这里我们将进一步考虑 $\frac{\partial^2 u_g}{\partial y \partial z}$ 的作用, 讨论了 Ertel 位涡在非线性对称不稳定中的作用。另一方面, 这里我们还假定了环境地转风满足热成风关系, 同时对于对称运动, 静力平衡也是近似成立的, 于是方程 (2) 式可合写成一个方程

$$\frac{dv}{dt} + f \left[\bar{\xi}_a \delta y - \frac{\partial u_g}{\partial z} \delta z - \frac{\partial^2 u_g}{\partial y \partial z} \delta y \delta z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{\xi}_a}{\partial y^2} \delta y^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \bar{\xi}_a}{\partial y^3} \delta y^3 \right] = 0 \quad (5)$$

其中 $\delta z = - \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \delta y / \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}$, $\bar{\xi}_a = f - \frac{\partial u_g}{\partial y}$, δz 与 δy 的关系是由静力平衡关系所得

到的,并且本文也使用了 f 平面近似。

方程(5)与作者另一文^[8]中的对称运动方程类似,不过在那里 $\frac{\partial^2 u_g}{\partial y \partial z}$ 并不存在,本文在考虑 $\frac{\partial^2 u_g}{\partial y \partial z} \neq 0$ 的情况下,将进一步讨论环境地转风在 y 方向上为二次型和三次型分布时的非线性对称运动的稳定问题。

三、非线性对称运动模型(I)——二次型分布

在大气中,一些中尺度天气系统如飑线等常产生在环境地转风具有强的水平和垂直切变的环境大气中,环境地转风的线性切变不仅起着很重要的作用,而且环境地转风的非线性切变也是一个很重要的因子。在这一节中,我们考虑环境地转风的分布为

$$u_g = u_0 + \frac{\partial u_g}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u_g}{\partial z} \delta z + \frac{\partial^2 u_g}{\partial y \partial z} \delta y \delta z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_g}{\partial y^2} \delta y^2 \quad (6)$$

(6)式被称为二次型分布,令 $Q = \delta y$,并利用热成风关系,方程(5)式可改写为

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + f \left[\left(\bar{\xi}_a - \frac{f}{R_i} \right) Q + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\xi}_a - \frac{f}{R_i} \right) Q^2 \right] = 0 \quad (7)$$

其中 $R_i = N^2 / \left(\frac{\partial u_g}{\partial z} \right)^2$ 为 Richardson 数, $N^2 = \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}$, 设 $s = \frac{\bar{\xi}_a}{f} - \frac{1}{R_i}$, 这时方程(7)式改写为

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + f \left[f s Q + \frac{f}{2} \frac{\partial s}{\partial y} Q^2 \right] = 0 \quad (8)$$

其中 s 被称为对称稳定性指数, $\frac{\partial s}{\partial y}$ 为 s 的经向变化。

按文献[5],引入新参数

$$q_e = (f \mathbf{k} + \nabla \times \mathbf{v}_g) \cdot \nabla \ln \bar{\theta} \quad (9)$$

其中 q_e 为 Ertel 位涡, $\mathbf{k}$ 为垂直方向上的单位矢量, $\mathbf{v}_g = i u_g + o j$, 为地转风矢量, i, j 分别为 x, y 方向上的单位矢量, $\bar{\theta}$ 为环境大气温。

于是利用(9)式,方程(8)式可改写为

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + f \left[q_e \left(\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{-1} Q + \frac{1}{2} \frac{\partial q_e}{\partial y} \left(\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{-1} Q^2 \right] = 0 \quad (10)$$

其中 $f s = q_e \left(\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{-1}$

在大气中,当 Ertel 位涡不随经向变化时,即有 $\frac{\partial q_e}{\partial y} = 0$, 这时方程(10)式变为线性方程。在大气为均匀的 Ertel 位涡分布的情况下,从方程(10)式可知,大气中产生对称不稳定的条件为 $q_e < 0$, 也就是说对于线性对称不稳定, Ertel 位涡必须为负值,这与 Bennetts 和 Hoskins(1979), Emanuel(1982)所得到的对称不稳定判据是一致的。

当 Ertel 位涡存在经向变化时,有 $\frac{\partial q_e}{\partial y} \neq 0$, 这时方程(10)式为非线性方程,令 $\frac{dQ}{dt} = W$, 于是方程(10)式可改写为

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} = W \\ \frac{dW}{dt} = -fq_e \left(\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{-1} Q - \frac{f}{2} \frac{\partial q_e}{\partial y} \left(\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{-1} Q^2 = F(Q, W) \end{cases} \quad (11)$$

显然从(11)式可得方程(11)式的平衡点 $(Q, W) = (0, 0)$ 或 $\left(-2q_e / \frac{\partial q_e}{\partial y}, 0\right)$ 。

引入位势函数 V ,由(11)式则有

$$V = -\int F(Q, W) dQ = fq_e \left(\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{-1} \frac{Q^2}{2} + \frac{f}{6} \frac{\partial q_e}{\partial y} \left(\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{-1} Q^3 + c \quad (12)$$

其中 c 为积分常数,于是由(12)式,我们有

$$\frac{\partial V}{\partial Q} = fq_e \left(\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{-1} Q + \frac{f}{2} \frac{\partial q_e}{\partial y} \left(\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{-1} Q^2 \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial Q^2} = fq_e \left(\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{-1} + \frac{\partial q_e}{\partial y} f \left(\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{-1} Q \quad (14)$$

对于平衡点 $(0, 0)$,我们有 $\frac{\partial V}{\partial Q} = 0, \frac{\partial^2 V}{\partial Q^2} = fq_e \left(\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{-1}$ 。对于稳定层结大气 $\left(\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} > 0\right)$,当 Ertel 位涡为负值即 $q_e < 0$ 时, $\frac{\partial^2 V}{\partial Q^2} < 0$,这时平衡点 $(0, 0)$ 是不稳定的平衡点,对称运动是不稳定的。当 Ertel 位涡为正值即 $q_e > 0$ 时, $\frac{\partial^2 V}{\partial Q^2} > 0$,在这种情况下平衡点 $(0, 0)$ 是稳定的,这时的对称运动是稳定的。这个结论与线性的情况相同。

对于平衡点 $\left(-2q_e / \frac{\partial q_e}{\partial y}, 0\right)$,我们有 $\frac{\partial V}{\partial Q} = 0, \frac{\partial^2 V}{\partial Q^2} = -fq_e \left(\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{-1}$ 。同样对于稳定的层结 $\left(\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} > 0\right)$,当 Ertel 位涡为负即 $q_e < 0$ 时, $\frac{\partial^2 V}{\partial Q^2} > 0$,这时的平衡点 $\left(-2q_e / \frac{\partial q_e}{\partial y}, 0\right)$ 是稳定的平衡态,对称运动是稳定的。当 Ertel 位涡为正值即 $q_e > 0$ 时, $\frac{\partial^2 V}{\partial Q^2} < 0$,这时的平衡点 $\left(-2q_e / \frac{\partial q_e}{\partial y}, 0\right)$ 是不稳定的平衡点,对称运动是不稳定的。这时的结论与线性的情况相反。以上说明在 Ertel 位涡存在经向切变的情况下,即使 Ertel 位涡为正值时,大气中的非线性对称运动也会出现不稳定。

四、非线性对称运动模型(II)——三次型分布

在上一节中,我们讨论了二次型地转风分布情况下的非线性对称运动的稳定性问题,这里我们将考虑环境地转风的分布为

$$u_g = u_o + \frac{\partial u_g}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u_g}{\partial z} \delta z + \frac{\partial^2 u_g}{\partial y \partial z} \delta z \delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_g}{\partial y^2} \delta y^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u_g}{\partial y^3} \delta y^3 \quad (15)$$

(15)式称为三次型分布,令 $Q = \delta y$,同样(5)式可改写为

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + f \left[q_e \left(\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{-1} Q + \frac{1}{2} \frac{\partial q_e}{\partial y} \left(\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{-1} Q^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial y^2} Q^3 \right] = 0 \quad (16)$$

(16)式就是我们要讨论的非线性对称运动方程。下面我们将分两种情况来讨论:

1. 环境 Ertel 位涡在经向方向上为均匀分布的情况,这时方程(16)式可改写为

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + f \left[q_e \left(\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{-1} Q + \frac{1}{6} \frac{\partial^2 \bar{\xi}_a}{\partial y^2} Q^3 \right] = 0 \quad (17)$$

令 $W = \frac{dQ}{dt}$, 这时方程(17)式可写为

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} = W \\ \frac{dW}{dt} = -f \left[q_e \left(\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{-1} Q + \frac{1}{6} \frac{\partial^2 \bar{\xi}_a}{\partial y^2} Q^3 \right] = F(Q, W) \end{cases} \quad (18)$$

方程(18)式是一个二次自治系统。

引入位势函数

$$V = - \int F(Q, W) dQ = f q_e \left(\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{-1} \frac{Q^2}{2} + \frac{f}{24} \frac{\partial^2 \bar{\xi}_a}{\partial y^2} Q^4 + c \quad (19)$$

其中 c 为积分常数。

1) $\frac{\partial^2 \bar{\xi}_a}{\partial y^2} > 0$ 的情况

当 $q_e > 0$ (线性对称稳定) 时, 这时方程(18)式只有一个平衡点即 $(Q, W) = (0, 0)$, 于是在平衡点 $(0, 0)$ 处有 $\frac{\partial V}{\partial Q} = 0, \frac{\partial^2 V}{\partial Q^2} > 0$, 可见平衡点 $(0, 0)$ 是稳定的, 当 $q_e < 0$ (线性对称不稳定) 时, 这时方程(18)式有三个平衡点, $(Q, W) = (0, 0)$ 或 $\left(0, \pm \sqrt{-6q_e \left(\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{-1} / \frac{\partial^2 \bar{\xi}_a}{\partial y^2}} \right)$, 平衡点 $(0, 0)$ 是位势函数的极大值点 $\left(\frac{\partial V}{\partial Q} = 0, \frac{\partial^2 V}{\partial Q^2} < 0 \right)$, 是不稳定的, 而平衡点 $\left(0, \pm \sqrt{-6q_e \left(\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{-1} / \frac{\partial^2 \bar{\xi}_a}{\partial y^2}} \right)$ 是位势函数的极小值点 $\left(\frac{\partial V}{\partial Q} = 0, \frac{\partial^2 V}{\partial Q^2} > 0 \right)$, 是稳定的, 其平衡态曲线如图 1 所示。

可见从上面的讨论可知, 在 $\frac{\partial^2 \bar{\xi}_a}{\partial y^2} > 0$ 的情况下, 对于非线性对称运动, 当 Ertel 位涡从正值变为负值时, 大气中的对称运动可以产生超临界分岔。

2) $\frac{\partial^2 \bar{\xi}_a}{\partial y^2} < 0$ 的情况

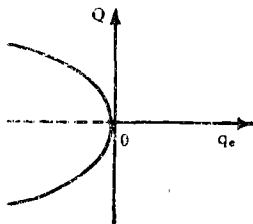
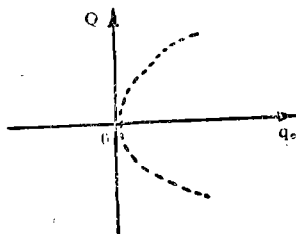
在 $\frac{\partial^2 \bar{\xi}_a}{\partial y^2} < 0$ 的情况下, 由(18)式可求得平衡点为

$$(Q, W) = (0, 0) \text{ 或 } \left(0, \pm \sqrt{-6q_e \left(\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{-1} / \frac{\partial^2 \bar{\xi}_a}{\partial y^2}} \right) \quad (q_e > 0) \quad (20)$$

$$(Q, W) = (0, 0) \quad (q_e < 0) \quad (21)$$

根据(19)式可知, 在 $q_e < 0$ 的情况下, 平衡点 $(0, 0)$ 是稳定的, 而

$$\left(0, \pm \sqrt{-6q_e \left(\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{-1} / \frac{\partial^2 \bar{\xi}_a}{\partial y^2}} \right)$$

图 1 $\frac{\partial^2 \bar{\xi}_a}{\partial y^2} > 0, \frac{\partial q_e}{\partial y} = 0$ 图 2 $\frac{\partial^2 \bar{\xi}_a}{\partial y^2} < 0, \frac{\partial q_e}{\partial y} = 0$

是不稳定的平衡点。在 $q_e > 0$ 的情况下, 平衡点 $(0, 0)$ 是稳定的, 在 $q_e < 0$ 的情况下, 平衡点 $(0, 0)$ 是稳定的, 其平衡态曲线如图 2 所示。

可见在 $\frac{\partial^2 \bar{\xi}_a}{\partial y^2} < 0$ 的情况下, 当 Ertel 位涡由正值变为负值时, 在大气中对称运动可以产生亚临界分岔。

2. Ertel 位涡在经向方向上为非均匀分布的情况, 即 $\frac{\partial q_e}{\partial y} \neq 0$

1) 当绝对涡度 $\bar{\xi}_a$ 满足 $\frac{\partial^2 \bar{\xi}_a}{\partial y^2} > 0$ 时, 作变换 $Q \rightarrow Q - \frac{\partial q_e}{\partial y} \left(\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{-1} / \frac{\partial^2 \bar{\xi}_a}{\partial y^2}$, 于是方程(16)式可变为

$$\begin{aligned} \ddot{Q} - f q_e \frac{\partial q_e}{\partial y} \left(\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{-2} / \frac{\partial^2 \bar{\xi}_a}{\partial y^2} + \frac{f}{3} \left(\frac{\partial q_e}{\partial y} \right)^3 \left(\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{-3} / \left(\frac{\partial^2 \bar{\xi}_a}{\partial y^2} \right)^2 + \\ \left[f q_e \left(\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{-1} - \frac{f}{2} \left(\frac{\partial q_e}{\partial y} \right)^2 \left(\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{-2} / \frac{\partial^2 \bar{\xi}_a}{\partial y^2} \right] Q + \frac{f}{6} \frac{\partial^2 \bar{\xi}_a}{\partial y^2} Q^3 = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

按照 Thom 的突变理论¹⁾可知在 $\frac{\partial^2 \bar{\xi}_a}{\partial y^2} > 0$ 的条件下, 当 Ertel 位涡满足

$$q_e < \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{-1} \left(\frac{\partial q_e}{\partial y} \right)^2 / \frac{\partial^2 \bar{\xi}_a}{\partial y^2} \quad (23)$$

时, 对称运动可以产生尖点(CUSP)突变。从(23)式可以看出, 对于 Ertel 位涡的小正值和负值区, 条件(23)式容易满足, 尖点突变也容易发生, 在大气中一般有 $\frac{\partial q_e}{\partial y} \neq 0$ 。并且 $\frac{\partial^2 \bar{\xi}_a}{\partial y^2} > 0$ 也有可能存在, 因而在实际大气中对称运动产生尖点突变是可能的。

2) 当绝对涡度 $\bar{\xi}_a$ 满足 $\frac{\partial^2 \bar{\xi}_a}{\partial y^2} < 0$ 时, 作变换 $Q \rightarrow Q - \frac{\partial q_e}{\partial y} \left(\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{-1} / \frac{\partial^2 \bar{\xi}_a}{\partial y^2}$, 因此方程(16)式可改写为

$$\begin{aligned} \ddot{Q} + f q_e \left(\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{-2} \frac{\partial q_e}{\partial y} / \frac{\partial^2 \bar{\xi}_a}{\partial y^2} - \frac{f}{3} \left(\frac{\partial q_e}{\partial y} \right)^3 \left(\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{-3} / \left(\frac{\partial^2 \bar{\xi}_a}{\partial y^2} \right)^2 - \\ \left[f q_e \left(\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{-1} - \frac{f}{2} \left(\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{-2} / \frac{\partial^2 \bar{\xi}_a}{\partial y^2} \right] Q + \frac{f}{3} \frac{\partial^2 \bar{\xi}_a}{\partial y^2} Q^3 = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

根据 Thom 的突变理论可知, 在 $\frac{\partial^2 \bar{\xi}_a}{\partial y^2} < 0$ 的情况下, 大气中的对称运动不能产生尖

1) 刘式达, 非线性动力学和湍流, 北京大学地球物理系(油印本), 62—63, 1984。

点突变。这说明,对于大气中的对称运动要产生尖点突变,首先要求 $\frac{\partial^2 \bar{\xi}_a}{\partial y^2} > 0$ 。可见在大气中 $\frac{\partial^2 \bar{\xi}_a}{\partial y^2} > 0, \frac{\partial q_e}{\partial y} \neq 0, q_e \neq 0$ 是对称运动产生尖点突变的因子。

从上面的讨论可知,大气中对称运动的性质不仅取决于环境地转风的线性切变 $\frac{\partial u_g}{\partial y}$, $\frac{\partial u_g}{\partial z}$, 而且还取决于环境地转风的非线性切变 $\frac{\partial^2 u_g}{\partial y \partial z}$, $\frac{\partial^2 u_g}{\partial y^2}$ 和 $\frac{\partial^3 u_g}{\partial y^3}$ 等因子。Emanuel^[3] (1979)曾指出对称不稳定是大气中飚线发生的一种机制,因此探讨对称不稳定发生的可能性对于我们进一步认识飚线的发生机制是有帮助的。1982年丁一汇等人^[7]对我国飚线发生的条件进行了研究,指出了位势不稳定,高低空急流,暖湿舌的存在是大气中飚线发生的主要条件,他们也指出在稳定层结的情况下,大气中的飚线也可能发生,并且环境地转风的垂直切变越大,产生飚线的可能性就越大。另外许秦等人^[8] (1982)进一步指出环境地转风强的水平切变和垂直切变是有利于飚线发生的。这里我们把 Ertel 位涡 q_e 改写为 $q_e = -\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} f s = -\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} f \left(\frac{\bar{\xi}_a}{f} - \frac{1}{R_i} \right)$, 对于稳定层结 ($N^2 > 0$) (不稳定层结的结果是显然的), 当环境地转风的水平和垂直切变越强时, q_e 越小甚至变为负值, 因此 (23) 式越容易满足。在这种情况下, 对称运动越容易产生尖点 (CUSP) 突变。对于弱稳定层结, (23) 式也很容易满足。可见在大气中尖点突变产生的条件与飚线发生的条件是一致的。因此可以认为对称运动所产生的尖点突变可能是飚线发生的一种可能机制。另外对于弱切变的环境地转风, 当 (23) 式满足时, 对称运动也能够产生尖点突变。最近, 蔡则怡等人^[9] (1988) 对华北飚线的结构进行了分析研究, 指出对于弱切变的环境地转风, 大气中也能够产生飚线, 这说明飚线产生的条件是复杂的, 但通过分析和计算 (23) 式也可能为我们进一步认识飚线的发生条件提供依据, 因此我们认为对称运动所产生的尖点突变可能是飚线发生的一种机制。

五、结 论

本文在考虑环境地转风在垂直方向为线性切变而在水平方向上为非线性切变的情况下, 通过以上的分析和研究, 我们可以得到以下几点结论:

1. 在线性的情况下, 当 Ertel 位涡为负值时, 对称运动可产生不稳定, 这与 Bennetts 和 Hoskins (1979), Emanuel (1982) 等人的结论是一致的。
2. 在环境地转风为二次型分布的情况下, 即 Ertel 位涡为正值时, 大气中也可以出现对称不稳定。
3. 环境地转风为三次型分布的情况。

1) Ertel 位涡在经向方向上为均匀分布的情况: (1) 在绝对涡度 $\bar{\xi}_a$ 满足 $\frac{\partial^2 \bar{\xi}_a}{\partial y^2} > 0$ 的情况下, 当 Ertel 位涡从正值变为负值时, 大气中的对称运动可以产生超临界分岔。(2) 在绝对涡度 $\bar{\xi}_a$ 满足 $\frac{\partial^2 \bar{\xi}_a}{\partial y^2} < 0$ 情况下, 当 Ertel 位涡从正值变为负值时, 大气中的对称运

动可以产生亚临界分岔。

2) Ertel 位涡在经向方向上为非均匀分布的情况, 在绝对涡度 $\bar{\zeta}_a$ 满足 $\frac{\partial^2 \bar{\zeta}_a}{\partial y^2} > 0$ 的情况下, 当 Ertel 位涡满足 $q_e < \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{-1} \left(\frac{\partial q_e}{\partial y} \right)^2 / \frac{\partial^2 \bar{\zeta}_a}{\partial y^2}$ 时, 大气中的对称运动可以产生尖点突变, 也就是说在 $\frac{\partial^2 \bar{\zeta}_a}{\partial y^2} > 0$ 的情况下, 当 Ertel 位涡为小正值或为负值时, 大气中的对称运动可以产生尖点突变。

参 考 文 献

- [1] Hoskins, B. J., The role of potential vorticity in symmetric stability and instability, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **100**, 480-482, 1974.
- [2] Bennetts, D. A, and B. J, Hoskins, Conditional symmetric instability—A possible explanation for frontal rainbands, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **105**, 945-962, 1979.
- [3] Emanuel, K. A, Inertial instability and mesoscale convective systems, Part I: Linear theory of inertial instability in rotating viscous flow, *J. Atmos. Sci.*, **36**, 2425-2449, 1979.
- [4] Emanuel, K. A, Inertial instability and mesoscale convective systems, Part II: Symmetric CISK in a baroclinic flow, *J. Atmos. Sci.*, **39**, 1080-1097, 1982.
- [5] Emanuel, K. A, The Lagrangian parcel dynamics of moist symmetric instability, *J. Atmos. Sci.*, **40**, 2368-2376, 1983.
- [6] 罗德海, 大气中对称运动的非线性稳定性分析, *大气科学*, **14**, 1, 181-187, 1990.
- [7] 丁一汇等, 我国飑线发生条件的研究, *大气科学*, **6**, 1, 18-27, 1982.
- [8] 许秦等, 非静力平衡大气中的斜压惯性不稳定, *大气科学*, **6**, 4, 355-367, 1982.
- [9] 蔡则怡等, 华北飑线系统的结构与演变特征, *大气科学*, **12**, 2, 191-199, 1988.

ERTEL POTENTIAL VORTICITY AND NONLINEAR SYMMETRIC INSTABILITY PROBLEM IN THE ATMOSPHERE

Luo Dehai

(Chengdu Institute of Meteorology)

Tan Benkui

(Department of Atmospheric Sciences, Nanjing University)

Abstract

In this paper, the Lagrangian parcel theory was applied to simplify the symmetric motion equation in the atmosphere, on the base, bifurcation and catastrophe theories were used to discuss the role of Ertel potential vorticity in the symmetric instability under the condition of the environmental geostrophic wind with nonlinear shear distribution, and some new results were obtained.