

非线性正压 Rossby 波的精确解*

王玉清

(上海市气象科学研究所)

提 要

本文从半地转近似下的正压大气运动方程组出发,导出了非线性正压Rossby波所精确满足的KdV方程,求得了椭圆余弦波解和孤立波解,并讨论了非线性波动的波速公式及其振幅与其它波参数间的关系。同时指出,在对大气模式进行数学简化时必须尽可能保证原模式所具有的一些守恒关系,否则有可能使原问题的解受到歪曲。

一、引 言

大气中的非线性 Rossby 波一直是气象学界所关心和重视的问题,最近二十多年来,在这方面已取得了很多研究成果。其研究方法大致有两种,一种是“多尺度扰动法”,如 Long^[1]、Benney^[2]、Redekopp^[3]、Hukuda^[4]、巢纪平^[5]等;另一种是所谓的“相图分析法”,如刘式达和刘式适^[6-8]、何猛省^[9]、黄思训^[10]等。相比之下,后一种方法比较简单,然而,当采用这种方法求解非线性准地转位涡方程时,其非线性效应难以体现,在早期的工作中,不得已只保留了部分非线性项^[6-10]。作者在研究非线性斜压 Rossby 波时则采用半地转近似避开了这一困难,并求得了非线性斜压 Rossby 波的近似解^[11],刘式适和刘式达^[12]对此作了更详细的讨论,指出半地转假定(或称地转动量假定)既滤去了快速波,又保留了 Rossby 波的非线性特色。然而,在先前的多数工作中,均设法将控制方程近似地化为 KdV 方程后求解,一般可得到椭圆余弦波解,在极限情况下可求得孤立波解,特别是在平衡点附近对非线性项作 Taylor 级数展开时,孤立波解往往是 Taylor 展开的临界发散点,对此曾有过不少争议,黄思训和张铭^[13]甚至得出了在无外源强迫时, Rossby 孤立波不能产生的结论,他们讨论了在特定外源影响下正压无辐散大气中的非线性 Rossby 椭圆余弦波,并在一定条件下导出了一支有别于 KdV 方程孤立波解的非线性 Rossby 孤立波。

为了探讨守恒系统中(无外源影响)非线性 Rossby 波的性质,本文从完全的正压大气位涡守恒方程出发,采用半地转假定,导出了非线性正压 Rossby 波所精确满足的 KdV 方程,并讨论了解的性质,求得了椭圆余弦波解和孤立波解,同时,我们还将本文的处理与一些先前的工作进行了比较,获得了一些新的认识。

二、数 学 模 式

描写正压大气运动的原始方程组可写为

* 本文于 1989 年 8 月 19 日收到, 1989 年 12 月 2 日收到修改稿。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f v = - \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + f u = - \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + (c_0^2 + \phi) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中 u, v 分别为 x 和 y 方向的速度分量, t 为时间, f 为 Coriolis 参数, $c_0^2 = gH$, $\phi = gh$, H, h 分别是未扰动时流体的深度和扰动偏差, 且 $h < H$, g 是重力加速度。

由(1)式中的前两式可得涡度方程为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \xi + \beta v + (f + \xi) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (2)$$

其中 $\beta = \frac{df}{dy}$ 为 Rossby 参数, $\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ 为相对涡度。

由(2)式和(1)式中的第三式可得到正压大气的位涡守恒关系, 即

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\xi + f}{c_0^2 + \phi} \right) = 0 \quad (3)$$

式中的守恒量 $(\xi + f)/(c_0^2 + \phi)$ 即为通常所定义的正压大气中的位涡度。(3)式表明, 在完全的正压涡度方程中, 不论相对涡度 ξ 取何种近似(如准无辐散近似或准地转近似等), 均不会破坏模式大气的位涡守恒性质。

由于(1)式或(3)式中包含了两类基本波动, 即惯性重力外波和 Rossby 波, 为了突出研究非线性 Rossby 波的特征, 我们应用半地转假定^[11,12,14], 即认为被平流的量具有地转平衡的特征, 但平流的量是非地转的。这样在(2)式中, 除平流的量和散度项外, 我们均采用地转近似, 同时引入 β 平面近似, 则可得半地转假定下正压大气运动的基本方程组为

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{1}{f_0} \nabla^2 \phi + \beta \frac{1}{f_0} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \left(f_0 + \frac{1}{f_0} \nabla^2 \phi \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \phi + (c_0^2 + \phi) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \\ f_0 \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \nabla^2 \phi \end{cases} \quad (4)$$

与文献[12]类似, 上式中的第三式是为了保证方程组闭合而引入的近似, 即 (u, v) 的涡度等于 $f_0^{-1} \nabla^2 \phi$ 。

由(4)式可以看出, 只要在第一式中的 $\beta \frac{1}{f_0} \frac{\partial \phi}{\partial x}$ 用 βv 代替, 并去掉 β 平面近似的假定, 则由(4)式中的前两式即可得到位涡(指地转位涡)是守恒的, 但在讨论非地转分量不是很强的 Rossby 波时, 我们可认为(4)式近似满足位涡守恒关系。与文献[12]中的方程组(15)相比, 在(4)式的涡度方程(第一式)中我们保留了相对涡度在散度项中的贡献, 即 $\frac{1}{f_0} \nabla^2 \phi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$, 尽管该项在中高纬度的大尺度运动中比涡度方程中的其它项小一个量级, 但在低纬大气运动中尤其是行星尺度的大气运动中该项却与其它项具有相同的量

级¹⁾, 另一方面, 即使是讨论中高纬度的大尺度波动, 如果波动的振幅较大(如出现强的阻塞高压等孤立波流型)时, 该项的作用将与涡度方程中的其它项同样重要。此外, 还有一个重要方面就是若在涡度方程中略去该项, 则位涡守恒关系(3)式将有所变形, 如文献[12]中的(15)式有如下的守恒关系:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)[\xi_\epsilon + \beta y - f_0 \ln(c_0^2 + \phi)] = 0 \quad (5)$$

其中 $\xi_\epsilon = \frac{1}{f_0} \nabla^2 \phi$ 为地转涡度。可见, 上式与(3)式在形式上已存在较大差异, 它并不能完全表征原模式大气所具有的位涡守恒性质。本文的讨论将建立在(4)式的基础上, (4)式即我们研究非线性正压 Rossby 波的基本数学模式。

三、KdV 方程的导出

设方程组(4)的波动解为

$$u = U(\theta), v = V(\theta), \phi = \Phi(\theta), \theta = kx + ly - \sigma t \quad (6)$$

其中 θ 为位相函数, k, l 分别是 x 和 y 方向的波数, σ 为圆频率。

将(6)式代入(4)式得

$$K_h^2(kU + lV - \sigma)\Phi''' + \beta k\Phi' + (f_0^2 + K_h^2\Phi'')(kU' + lV') = 0 \quad (7)$$

$$(kU + lV - \sigma)\Phi' + (c_0^2 + \Phi)(kU' + lV') = 0 \quad (8)$$

$$f_0(kV' - lU') = K_h^2\Phi'' \quad (9)$$

式中“'”表示对 θ 的微商, 而 $K_h^2 = k^2 + l^2$ 。

(8)、(9)两式分别对 θ 积分一次, 取积分常数为零(相当于当 $U = V = 0$ 时 $\Phi = 0$)得到

$$kU + lV = \frac{\sigma\Phi}{c_0^2 + \Phi} \quad (10)$$

$$f_0(kV - lU) = K_h^2\Phi' \quad (11)$$

将(7)式改写为

$$K_h^2[(kU + lV)\Phi']' - \sigma K_h^2\Phi''' + \beta k\Phi' + f_0^2(kU + lV)' = 0$$

上式对 θ 积分一次, 取积分常数为零(相当于当 $U = V = 0$ 时, $\Phi = 0, \Phi' = 0$)得到

$$K_h^2(kU + lV - \sigma)\Phi'' + \beta k\Phi + f_0^2(kU + lV) = 0 \quad (12)$$

将(10)式代入上式得

$$\Phi'' = \frac{\beta k}{\sigma K_h^2 c_0^2} \Phi^2 + \frac{(\beta k + \sigma \mu^2)}{\sigma K_h^2} \Phi \quad (13)$$

其中

1) 陈秋士、黄伟, 热带行星尺度的非绝热广义地转风平衡及其初步的数值模拟, 第四次全国数值预报会议论文报告, 1986 年, 厦门。

$$\mu = \frac{f_0}{c_0} \quad (14)$$

μ^{-1} 是正压大气的 Rossby 变形半径。

(13) 式对 θ 微分一次得

$$\Phi''' = \frac{2\beta k}{\sigma K_h^2 c_0^2} \Phi \Phi' + \frac{\beta k + \mu^2 \sigma}{\sigma K_h^2} \Phi' \quad (13')$$

这就是 KdV 方程所对应的常微分方程, 从上面的推导过程可见, 方程(13)或(13')是方程组(4)所包含的非线性正压 Rossby 波所精确满足的方程, 即在我们的模式中非线性正压 Rossby 波精确满足非线性 KdV 方程。

将方程(13)与文献[12]中采用 Taylor 级数展开后所得到的相应方程(26)(具有(5)式的守恒关系)相比, 方程右端非线性(二次)项的系数存在一定差异, 文献[12]中为 $\frac{\beta k - \sigma \mu^2}{2 \sigma K_h^2 c_0^2}$, 而本文则为 $\frac{\beta k}{\sigma K_h^2 c_0^2}$ 。若令

$$D = \frac{\beta k}{\sigma K_h^2 c_0^2} - \frac{\beta k - \sigma \mu^2}{2 \sigma K_h^2 c_0^2} = \frac{\beta k + \sigma \mu^2}{2 \sigma K_h^2 c_0^2}$$

显然, 当 $-\frac{\beta k}{\mu^2} < \sigma < 0$ 时有 $D < 0$, 并且在下节我们将会看到, 要使方程(13)存在有界的

非线性周期波(Rossby 波)解, 必须有 $-\frac{\beta k}{\mu^2} < \sigma < 0$, 这说明对非线性正压 Rossby 波而

言, 有 $D < 0$, 即 $\frac{\beta k}{\sigma K_h^2 c_0^2} < \frac{\beta k - \sigma \mu^2}{2 \sigma K_h^2 c_0^2}$ 。因此, 对方程(13)和文献[12]中的(26)式而言, 要使 KdV 方程中的三项达到平衡, 对(13)式必须有更大的扰动振幅(Φ), 这说明方程(13)比文献[12]中的方程(26)表现出更强的非线性特征。

为后面讨论的方便, 我们在此首先对(13)式中所包含的小振幅(即 $\Phi \rightarrow 0$)波解进行一些讨论。为此, 略去(13)式中右端的 Φ^2 项, 则得线性化方程为

$$\Phi'' + \frac{\beta k + \sigma \mu^2}{-\sigma K_h^2} \Phi = 0 \quad (15)$$

上式表征波动要求 $\frac{\beta k + \sigma \mu^2}{-\sigma K_h^2} = 1$, 则求得

$$\sigma = -\frac{\beta k}{K_h^2 + \mu^2} \quad (16)$$

这就是线性 Rossby 波的圆频率。相应的波速为

$$c = \frac{\sigma}{k} = -\frac{\beta}{K_h^2 + \mu^2} \quad (17)$$

由(16)和(17)两式可见, 线性 Rossby 波的圆频率和相速分别满足

$$-\frac{\beta k}{\mu^2} < \sigma < 0 \quad (18)$$

和

$$-\frac{\beta}{\mu^2} < c < 0 \quad (19)$$

即 Rossby 波相对于基本气流(若存在的话)总是西退的, 但其西退速度有上界 β/μ^2 。

四、KdV 方程的有界周期波解

将(13)式两边乘以 $2\Phi'$, 并对 θ 积分一次得

$$(\Phi')^2 = \frac{2\beta k}{3\sigma K_h^2 c_0^2} F(\Phi) \quad (20)$$

其中

$$F(\Phi) \equiv \Phi^3 + \frac{3c_0^2(\beta k + \sigma\mu^2)}{2\beta k} \Phi^2 + A \quad (21)$$

是 Φ 的三次多项式, 其中 A 为积分常数。

由 $\frac{dF}{d\Phi} = 0$ 可解得

$$\Phi_{10} = 0 \quad \text{和} \quad \Phi_{20} = -\frac{c_0^2(\beta k + \sigma\mu^2)}{\beta k}$$

即 $F(\Phi)$ 在 Φ_{10} 和 Φ_{20} 处有极值。由非线性常微分方程的理论可知, 要使方程(20)存在有界的周期波解, $F(\Phi) = 0$ 必须有三个互异的实根, 对于我们这里所讨论的 $\Phi = 0$ 附近 $\sigma < 0$ 的 Rossby 波而言, 该条件相当于

$$\begin{aligned} F(\Phi_{10}) &= A < 0 \\ F(\Phi_{20}) &= \frac{1}{2} \left[\frac{c_0^2(\beta k + \sigma\mu^2)}{\beta k} \right]^3 + A > 0 \end{aligned}$$

即

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \left[\frac{c_0^2(\beta k + \sigma\mu^2)}{\beta k} \right]^3 < A < 0 \\ -\frac{\beta k}{\mu^2} < \sigma < 0 \end{cases} \quad (22)$$

满足条件(22)式的方程(20)的解可写为

$$\Phi(\theta) = \Phi_2 + (\Phi_1 - \Phi_2) cn^2 \sqrt{\frac{\beta k(\Phi_3 - \Phi_1)}{6\sigma K_h^2 c_0^2}} \theta \quad (23)$$

其中 $cn(\cdot)$ 为 Jacobi 椭圆余弦函数, $\Phi_i (i=1, 2, 3)$ 分别为 $F(\Phi) = 0$ 的三个不等的实根, 其分布如图 1 所示。 Φ_i 满足

$$\Phi_1 > 0, \Phi_3 < \Phi_2 < 0 \quad (24)$$

(23)式即为 Rossby 椭圆余弦波解, 它在 x 方向的波长为

$$L = \frac{2}{k} \sqrt{\frac{6\sigma K_h^2 c_0^2}{\beta k(\Phi_3 - \Phi_1)}} K(m) \quad (25)$$

其中 $K(m)$ 是第一类完全椭圆积分, 模数 m 满足

$$m^2 = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\Phi_1 - \Phi_3} \quad (26)$$

波的振幅为

$$\hat{\Phi} = \Phi_1 - \Phi_2 \quad (27)$$

此外, 由三次代数方程 $F(\Phi) = 0$ 的根与系数关系的韦达定理知

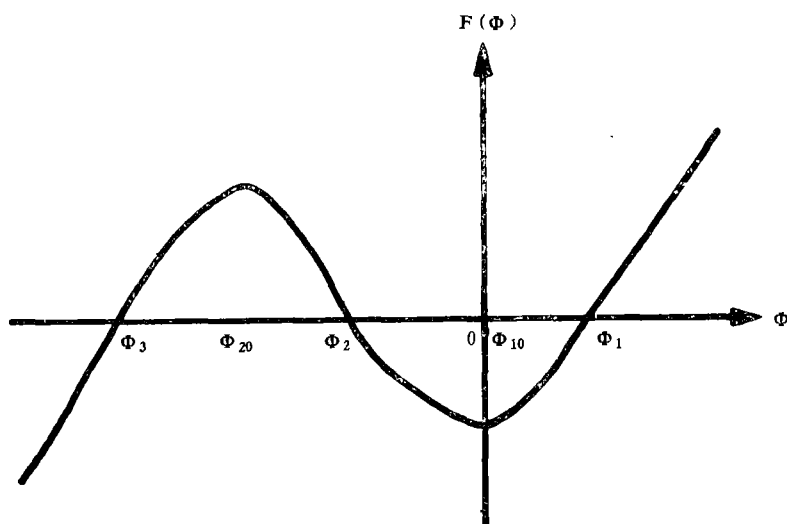


图 1 满足(22)式时 $F(\Phi)=0$ 的三个实根的分布示意图

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = -\frac{3c_0^2(\beta k + \sigma\mu^2)}{2\beta k} \quad (28)$$

$$\Phi_1\Phi_2 + \Phi_2\Phi_3 + \Phi_3\Phi_1 = 0 \quad (29)$$

若引入无量纲参数

$$r = \frac{\Phi_1}{\hat{\Phi}} \quad (30)$$

$0 < r < 1$ 。 r 表征了波峰处 $\Phi(\theta)$ 的值与波幅 $\hat{\Phi}$ 的比, 我们将它定义为椭圆余弦波的波形比。椭圆余弦波的图象及 r 的物理意义可参见图 2。

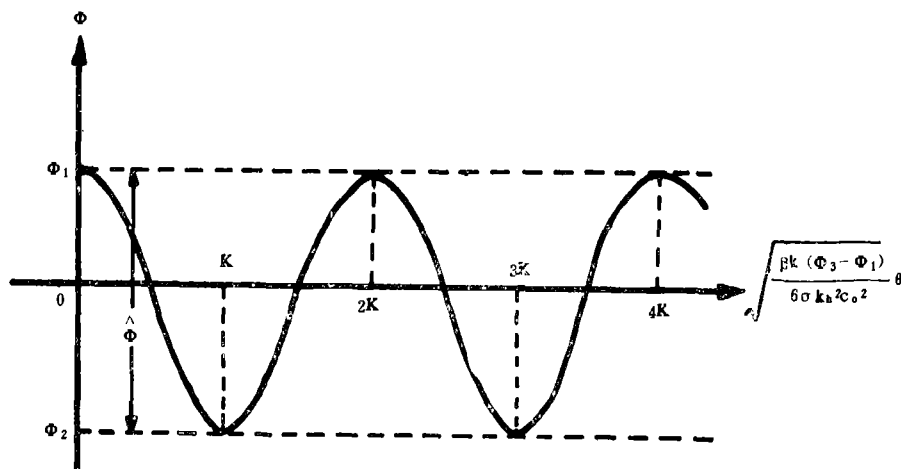


图 2 Rossby 椭圆余弦波图象的示意图

将(30)式代入(27)式得

$$\Phi_2 = -(1-r)\hat{\Phi} \quad (31)$$

又由(29)一(31)式得

$$\Phi_3 = -\frac{\Phi_1 \Phi_2}{\Phi_1 + \Phi_2} = \frac{r(1-r)}{2r-1} \hat{\Phi} \quad (32)$$

由(24)及(30)–(32)式我们可得到如下关系

$$\frac{1}{3} < r < \frac{1}{2} \quad (33)$$

上式表明, 对于有限振幅的 Rossby 椭圆余弦波, 其波形比 r 在 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ 区间内变化, 即波峰和波谷与平衡位置 ($\Phi=0$) 间的距离是不等的。我们知道, 对于线性波 (如正弦波和余弦波) 有波峰和波谷与平衡位置间的距离是相等的, 而对于非线性波 (如这里讨论的椭圆余弦波) 一般有波谷值 $|\Phi_2|$ 大于波峰值 Φ_1 , 这正是非线性波与线性波的不同所在。我们下面将会看到, 对于小振幅波动, 当 $\hat{\Phi} \rightarrow 0$, $r \rightarrow \frac{1}{2}$, 则椭圆余弦波将退化为线性波, 而当 $r \rightarrow \frac{1}{3}$ 时则可得 Rossby 孤立波解。由于孤立波是一种强非线性波, 因此, 我们认为波形比 r 可表征波动非线性的强弱, 一般当 r 小则表征非线性强, r 大则表征非线性弱。

将(30)–(32)式代入(28)式可得椭圆余弦波的相速公式为

$$c = \frac{\sigma}{k} = -\frac{\beta}{\mu^2} \left(1 - \frac{2}{3} \alpha(r) \frac{\hat{\Phi}}{c_0^2} \right) \quad (34)$$

其中

$$\alpha(r) = \frac{3r^2 - 3r + 1}{1 - 2r} \quad (35)$$

为波形比 r 的一非线性函数。由(33)式我们有

$$1 < \alpha(r) < +\infty \quad (36)$$

并且 $\alpha(r)$ 随 r 是单调增大的, 即非线性性越强 $\alpha(r)$ 则越小。

根据(22)、(34)及(36)三式可得

$$0 < \hat{\Phi} < \frac{3}{2} c_0^2 \quad (37)$$

上式表明, Rossby 椭圆余弦波是一种有限振幅的波动, 其振幅不大于 $\frac{3}{2} c_0^2$ 。在此范围内振幅越大波速越小 (注意当 $\alpha(r) \rightarrow +\infty$ 或 $r \rightarrow \frac{1}{2}$ 时有 $\hat{\Phi} \rightarrow 0$), 并且纬度越高, 波速亦越小。

另一方面, 取 $L = \frac{2\pi}{k}$ 代入(25)式, 并利用(30)–(34)式可得波速的另一表达式为

$$c = -\frac{\beta}{\mu^2 + \tilde{\alpha}(r) \left[\frac{2K(m)}{\pi} \right]^2 K_h^2} \quad (38)$$

其中

$$\tilde{\alpha}(r) = \frac{3r^2 - 3r + 1}{r(2 - 3r)} \quad (39)$$

(38)式与线性波的相速公式(17)非常相似,只不过式中包含了与振幅有关的因子($\tilde{\alpha}(r)$ 及 $K(m)$),这正是非线性波的特色。

对于小振幅波动, $\hat{\Phi} \rightarrow 0$,考虑到 $\Phi_1 > 0, \Phi_2 < 0$,必有 $\Phi_1 \rightarrow -\Phi_2 \rightarrow 0$,这样有 $r \rightarrow \frac{1}{2}$,相应的有 $m \rightarrow 0, K(m) \rightarrow \frac{\pi}{2}$,则波速公式(38)式退化为

$$c = -\frac{\beta}{K_h^2 + \mu^2} \quad (40)$$

这正是线性 Rossby 波的波速公式(17)(注意 $\tilde{\alpha}(\frac{1}{2})=1$),这说明线性 Rossby 波是 Rossby

椭圆余弦波振幅趋于零的一个特例,或是 $\hat{\Phi} \rightarrow 0$,波形比 $r \rightarrow \frac{1}{2}$ 的一种极限情况。

在另一种极限情况下,(20)式还可以存在孤立波解,为了找到具体的孤立波解,我们令

$$\text{当 } \theta \rightarrow \infty \text{ 时, } \Phi \rightarrow \Phi_\infty, \Phi' \rightarrow 0, \Phi'' \rightarrow 0 \quad (41)$$

则由(13)和(20)式求得

$$\Phi_\infty = -\frac{c_0^2(\beta k + \sigma \mu^2)}{\beta k}, \quad A = -\frac{1}{2} \left[\frac{c_0^2(\beta k + \sigma \mu^2)}{\beta k} \right]^3 \quad (42)$$

将上式代入(20)式得

$$(\Phi')^2 = \frac{2\beta k}{3\sigma K_h^2 c_0^2} \left(\Phi + \frac{c_0^2(\beta k + \sigma \mu^2)}{\beta k} \right)^2 \left(\Phi - \frac{c_0^2(\beta k + \sigma \mu^2)}{2\beta k} \right) \quad (43)$$

上式的解可写为

$$\Phi(\theta) = -\frac{2}{3}\hat{\Phi} + \hat{\Phi} \operatorname{sech}^2 \sqrt{-\frac{\beta k \hat{\Phi}}{6\sigma K_h^2 c_0^2}} \theta \quad (44)$$

其中

$$\hat{\Phi} = \frac{3c_0^2(\beta k + \sigma \mu^2)}{2\beta k} \quad (45)$$

为孤立波的振幅。

孤立波的波宽为

$$d = \frac{1}{k} \sqrt{-\frac{6\sigma K_h^2 c_0^2}{\beta k \hat{\Phi}}} \quad (46)$$

由(45)式可得孤立波的波速公式为

$$c = -\frac{\beta}{\mu^2} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{\hat{\Phi}}{c_0^2} \right) \quad (47)$$

上式即为(34)式中 $\alpha(r)=1$ 的一种特殊情况,即为 $r=\frac{1}{3}$ 的情形,可见,在研究非线性波动时,引入波形比是方便的,并且也具有明确的物理意义,它与非线性的强弱成反比。

将(47)式代入(46)式得波宽的另一表达式

$$d = \frac{K_h}{k\mu} \sqrt{\frac{6c_0^2}{\hat{\Phi}} - 4} \quad (48)$$

上式表明,孤立波的振幅越大(但必须满足 $0 < \hat{\phi} < \frac{3}{2}c_0^2$),波宽则越窄,因而孤立波的波形就越陡。我们知道,一般而言非线性(尤其是非线性平流)作用使波形变陡,而线性频散作用是使波形变得平缓,只有当二者的作用达到平衡(指守恒系统)时才可形成非频散波,如椭圆余弦波和孤立波等。当波的振幅越大,一般非线性的作用亦越强,故波形亦即越陡,这与(48)式的结果是一致的。

由(47)和(48)两式还可以得到孤立波相速的另一表达式

$$c = -\frac{\beta}{\mu^2 + 4K_h^2/d^2k^2} \quad (49)$$

上式和(47)式表明,孤立波的振幅越大,波宽越窄,波形越陡,纬度越高,则波速越小。另一方面,比较(34)和(47)两式我们发现,对于相同的振幅,孤立波的波速是椭圆余弦波波速的极小值,这说明 Rossby 孤立波是非线性 Rossby 波中移动最慢的一种波动。当考虑基本气流的多普勒频移时,若要使大振幅的孤立波趋于静止,则只要适当小的基本西风气流即可。

此外,由(43)式可求得 Rossby 孤立波的极值点为

$$\Phi_m = \frac{c_0^2(\beta k + \sigma\mu^2)}{2\beta k} \quad (50)$$

将上式代入(13)式有

$$\Phi''|_{\Phi_m} = \frac{3c_0^2(\beta k + \sigma\mu^2)}{4\beta k\sigma K_h^2} < 0 \quad (51)$$

可见, Rossby 孤立波的波幅在 Φ_m 处有极大值,即 Rossby 孤立波是上凸的,这种孤立波类似于大气中的阻塞高压。由于实际大气中的阻塞高压移动十分缓慢或呈准静止,因此,由以上的分析可知,具有凸孤立 Rossby 波特征的阻塞高压多存在于较小的基本西风气流中,这与实际大气中阻塞高压多存在于低指数环流(即弱西风)阶段的天气事实是相吻合的。

五、讨 论

大气中存在 Rossby 椭圆余弦波和孤立波的事实已为许多学者的研究所证实,然而,在用“相图分析法”求解准地转的非线性 Rossby 波时,往往难以体现非线性的作用,为克服这一困难,本文采用半地转近似求解了非线性 Rossby 波,得到了 Rossby 椭圆余弦波解和孤立波解。伍荣生^[15]曾指出,在低频大气中存在一类与 Hoskins^[14]所研究过的半地转运动相似的运动(即具有半地转运动的特征),据此,他采用长波近似的摄动方法求得了非线性 Rossby 波解。本文的结果也表明,采用半地转近似可以较好地描述非线性的低频 Rossby 波。

本文从位涡守恒的正压大气运动方程组出发,在半地转近似下求得了非线性 Rossby 波所精确满足的 KdV 方程,而在先前的大多数类似的研究中,则均在近似条件下求得 KdV 方程,并且尤其在平衡点附近对非线性项作 Taylor 级数展开后很难得到 Rossby 孤立波解,我们的研究表明,在完全的半地转模式中,大气的位涡近似守恒,并证明了非线性 Rossby 波精确满足 KdV 方程,其孤立波是其中的一个特解。与先前的工作比较发现,

在对模式大气进行数学简化时,应尽可能保证原模式大气所具有的总体守恒性质,只有这样,才能得到物理上合理的解,否则有可能使原问题的解受到不同程度的歪曲。

此外,本文在讨论非线性波解时,引入了波形比的概念,并证明了波形比与波动非线性的强弱成反比,并证明了非线性正压 Rossby 波(包括椭圆余弦波和孤立波)是一种有限振幅的波动,其振幅不大于 $\frac{3}{2}c^2$,在此范围内纬度越高、振幅越大则波速越小。我们还证明了 Rossby 孤立波是一种凸孤立波,它类似于大气中的一类阻塞高压,孤立波的振幅越大则波越窄、波形越陡,由此说明了非线性效应与线性频散作用的相对重要性,并且对于大振幅的孤立波,若要使其准静止,则只要较小的基本西风气流即可,由此解释了阻塞高压多发生在中高纬度且存在于低指数环流阶段的天气事实。当然,阻塞高压的活动还与地形、海陆分布及非绝热加热等物理过程有关,本文的结果只说明了大气内部正压过程的动力特征。

参 考 文 献

- [1] Long, R.R., Solitary waves in the westerlies, *J. Atmos. Sci.*, **21**, 197-200, 1966.
- [2] Benney, D.M., Long nonlinear waves in fluid flows, *J. Math. and Phys.*, **45**, 52-63, 1966.
- [3] Redekopp, L.G., On solitary Rossby waves, *J. Fluid Mech.*, **82**, part 4, 725-745, 1977.
- [4] Hukuda, H., Solitary Rossby waves in a two-layer system, *Tellus*, **31**, 2, 161-169, 1979.
- [5] 巢纪平、黄瑞新, 旋转正压大气中的椭圆余弦波, 中国科学第 7 期, 696-705, 1980 年。
- [6] 刘式达、刘式适, 大气非线性波动方程的解, 气象学报, **40**, 3, 279-288, 1982。
- [7] 刘式达、刘式适, 大气中的非线性椭圆余弦波和孤立波, 中国科学, B 辑, 第 4 期, 372-384, 1982 年。
- [8] 刘式适、刘式达, 地球流体中的非线性波动, 中国科学, B 辑, 第 3 期, 1983 年。
- [9] 何猛省, 大气中的孤立波, 中国科学, B 辑, 第 1 期, 79-86, 1985 年。
- [10] 黄思训、吕荣庆, 非线性 Rossby 波, 力学学报, 第 3 期, 17, 1985 年。
- [11] Wang Yuqing (王玉清), A preliminary study of baroclinic nonlinear Rossby waves, Proceedings of International Summer Colloquium on Nonlinear Dynamics of the Atmosphere, Science Press, 392, 1986.
- [12] 刘式适、刘式达, 半地转近似下的非线性波, 气象学报, **45**, 3, 257-266, 1987。
- [13] 黄思训、张铭, 特定外源下的非线性 Rossby 椭圆余弦波和孤立波, 大气科学, **11**, 1, 58-70, 1987。
- [14] Hoskins, B.J., The geostrophic momentum approximation and semi-geostrophic equations, *J. Atmos. Sci.*, **32**, 233-242, 1975.
- [15] 伍荣生, 长波近似与大气中的非线性与线性 Rossby 波, 中国科学, B 辑, 第 12 期, 1985 年。

ON THE ACCURATE SOLUTIONS OF NONLINEAR BAROTROPIC ROSSBY WAVES

Wang Yuqing

(Shanghai Research Institute of Meteorological Science)

Abstract

In this paper, starting with the equation set of barotropic atmosphere with semi-geostrophic approximation, the KdV equation satisfied accurately by nonlinear Rossby waves is obtained. The solution are Rossby conical waves and solitary waves. The phase speed of waves and the relationships between the amplitude and the other parameters of waves are discussed. Additionally, it is pointed out that when the mathematical simplification was done for the atmospheric model, certain conservation law of the primitive model should be conformed as far as possible, otherwise, the solutions of the original problem would be distorted.