

一个计算球面不规则多边形内 平均涡度、散度的方案*

蔡定军 郑宏翔

(江西省气象台)

到目前为止,气象上已出现许多种计算涡度、散度的方案。如三点法(三角形法)^[1]、有限差分法(网格法、又称 u, v 分量法)、有限元插值法^[2]、面积膨胀率法^[3]、球面上的三角形法^[4]、以及在三角形法上通过地球投影发展而成的计算大范围散度、涡度的方案^[5]。纵观这些方案,有两个问题没有很好地解决。一是球面上任意多边形内涡度、散度的计算,二是测站间风矢的连续性假设。除文献[4]外,上述方案都是在平面上计算涡、散度,有的方案计算周界长度或网格距时,虽然计算的也是地表弧长,但最终结果都是在球面拓展为平面的情况下得到的,这样做会给计算精度带来影响。文献[4]虽在球面上计算涡、散度,但计算区域只限于由三角测站构成的球面三角形。而在天气、气候分析和预报中,很多时候三角形并不能很好地满足我们对计算区域的要求。另外,当计算区域较大时,三测站间距离较长,给测站间风矢连续性假设带来困难。在测站间风矢连续性假设问题上,目前采用的都是线性假设,但线性假设又各不相同。文献[2]假设是 u, v 分量在三角形内均为线性变化;文献[3]认为:原测站上的质点在经过单位时间后移到新的位置仍然组成一个直边多边形;文献[4]采用的是外法向量或切向分量的算术平均值。当风矢在测站间呈非线性变化时,目前尚未有较好的计算方法。

本文提出的方案是一个在球面任意多边形上,既可以考虑风矢在测站间呈线性变化,又可以考虑风矢在测站间呈非线性变化的计算方案。本文提出的线性假设不同于前人的工作,认为:风速及“交角”(风向与计算周界的交角)在计算周界上分别呈线性变化,这个假设更适用于实际大气流场。文中叙述有计算流程形式,只要稍用计算机语言进行改写,即可在计算机上实现计算。

1. 公式推导

设要计算涡、散度的区域为地球表面上由 n 个测站所组成的 n 边形,各站点按逆时针取序为 P_1, P_2, \dots, P_n 。各测站对应的经度、纬度、风向、风速分别为 $\lambda_i, \varphi_i, d_i, f_i, i=1, 2, \dots, n$ 。

图 1, 不失一般性,记 $L_i = \overrightarrow{P_i P_{i+1}}, i=1, 2, \dots, n, P_{n+1} = P_1$

即 P_1, P 为 L_i 上任意一点, $l = \overrightarrow{P_i P}$ 。在 P 点记风速为 $f_i(l)$, l 与风矢交角(顺时针取,简称“交角”,后同)为 $\theta_i(l)$ 。这里,风矢方向为风向减 180° ,风向定义同观测规范。

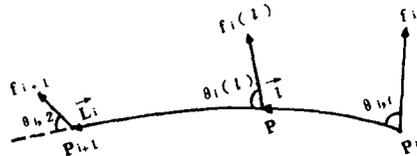


图 1 风矢、交角示意图

按涡度定义,在球面上被周界 $L (L = L_1 + L_2 + \dots + L_n)$ 包围的面积 S 上的平均涡度为

$$\xi = \frac{1}{S} \oint \mathbf{V} \cdot d\mathbf{L} \quad (1)$$

由于计算周界由 n 个测站连线组成,上式化为分段积分求和

* 本文于 1989 年 8 月 26 日收到,1990 年 1 月 3 日收到最后修改稿。

$$\xi = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n \int_{P_i}^{P_{i+1}} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} \tag{2}$$

设 $f_i(l)$ 、 $\theta_i(l)$ 为连续可积函数，代入上式得

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n \int_{L_i} f_i(l) \cos \theta_i(l) dl \\ &= \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n \xi_i \end{aligned} \tag{3}$$

式中 $\xi_i = \int_{L_i} f_i(l) \cos \theta_i(l) dl$ (3)'

按散度定义，在球面上被周界 L 包围的面积 S 上的平均散度为

$$D = \frac{1}{S} \oint (\mathbf{V} \times d\mathbf{L}) \cdot \mathbf{k} \tag{4}$$

式中 \mathbf{k} 为铅直方向上的单位矢量

仿涡度公式推导得

$$D = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n D_i \tag{5}$$

式中 $D_i = \int_{L_i} f_i(l) \sin \theta_i(l) dl$ (5)'

(5)' 式实质是气流在 L_i 上的水平通量。

图 2，根据球面三角形余弦定理，有

$$\begin{aligned} L_i &= \widehat{P_i P_{i+1}} \\ &= \frac{\pi}{180} R \arccos[\sin \varphi_i \sin \varphi_{i+1} + \cos \varphi_i \cos \varphi_{i+1} \cos(\lambda_{i+1} - \lambda_i)] \end{aligned} \tag{6}$$

式中 $R = R_0(1 - f \sin^2 \bar{\varphi})$ ， $R_0 = 6378160$ m——地球赤道半径， $f = 0.00335282$ ——地球偏率， $\bar{\varphi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi_i$ ——计算区域平均纬度，类似(6) 式可计算得到 $\widehat{P_1 P_i}$ ， $\widehat{P_1 P_{i+1}}$ 。

记 $\widehat{P_i P_{i+1}}^\circ = \frac{180}{\pi R} \widehat{P_i P_{i+1}}$ ，余类推。

在球面三角形 $P_1 P_i P_{i+1}$ 中，

记

$$a = \frac{1}{2} (\widehat{P_1 P_i}^\circ + \widehat{P_1 P_{i+1}}^\circ + \widehat{P_i P_{i+1}}^\circ) \tag{7}$$

$$m = \sqrt{\frac{\sin(a - \widehat{P_1 P_i}^\circ) \sin(a - \widehat{P_1 P_{i+1}}^\circ) \sin(a - \widehat{P_i P_{i+1}}^\circ)}{\sin a}} \tag{8}$$

则通过半角函数公式有

$$\angle P_1 P_i P_{i+1} = 2 \operatorname{arctg} \frac{m}{\sin(a - \widehat{P_i P_{i+1}}^\circ)} \tag{9}$$

类似可计算得到 $\angle P_i P_{i+1} P_1$ ， $\angle P_{i+1} P_1 P_i$ 。

记球面三角形 $P_1 P_i P_{i+1}$ 面积为 S_i ，则

$$S_i = \frac{\pi}{180} (\angle P_1 P_i P_{i+1} + \angle P_i P_{i+1} P_1 + \angle P_{i+1} P_1 P_i - 180) R^2 \tag{10}$$

计算区域总面积为

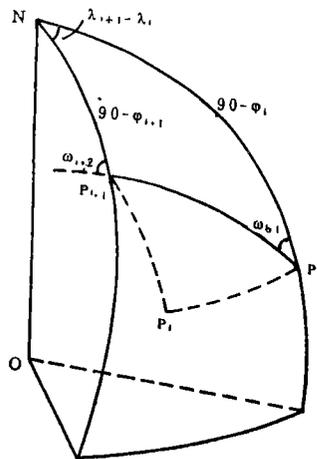


图 2 球面示意图

$$S = \sum_{i=2}^{n-1} S_i \quad (11)$$

2. 线性计算方案

当风矢在计算周界上起伏变化不是很大时,为简化计算,作风矢线性连续变化假设如下:

$$f_i(l) = \frac{l}{L_i}(f_{i+1} - f_i) + f_i \quad (12)$$

$$\theta_i(l) = \frac{l}{L_i}(\theta_{i,2} - \theta_{i,1}) + \theta_{i,1} \quad (13)$$

这种线性假设认为风速及“交角”分别在测站连线上呈线性变化。

一般来说, $\theta_i(l)$ 在 L_i 上作小于 180° 变化, 因此(13)式改写成

$$\theta_i(l) = \frac{l}{L_i} \Delta \theta_i + \theta_{i,1} \quad (14)$$

式中

$$\Delta \theta_i \begin{cases} = \theta_{i,2} - \theta_{i,1} & \text{当 } |\theta_{i,2} - \theta_{i,1}| \leq 180 \\ = \theta_{i,2} - \theta_{i,1} + 360 & \text{当 } \theta_{i,2} - \theta_{i,1} < -180 \\ = \theta_{i,2} - \theta_{i,1} - 360 & \text{当 } \theta_{i,2} - \theta_{i,1} > 180 \end{cases} \quad (15)$$

$\theta_{i,1}$, $\theta_{i,2}$ 的计算公式为

$$\theta_{i,1} = d_i - 180 + \omega_{i,1} \quad (16)$$

$$\theta_{i,2} = d_{i+1} - 180 + \omega_{i,2} \quad (17)$$

$\omega_{i,1}$, $\omega_{i,2}$ 的计算公式推导如下:

图 2, 在球面三角形 NP_iP_{i+1} 中

记
$$b = \frac{1}{2} (\widehat{P_i P_{i+1}} + 180 - \varphi_i - \varphi_{i+1}) \quad (18)$$

$$m' = \sqrt{\frac{\cos(b + \varphi_{i+1}) \cos(b + \varphi_i) \sin(b - \widehat{P_i P_{i+1}})}{\sin b}} \quad (19)$$

记 $\omega_{i,1}$, $\omega_{i,2}$ 分别为 L_i 在点 P_i, P_{i+1} 与经线 λ_i, λ_{i+1} 的交角(顺时针取)。经线方向从赤道指向极地, 通过球面三角半角函数公式有

$$\omega_{i,1} \begin{cases} = 360 - 2 \arctg \frac{-m'}{\cos(b + \varphi_{i+1})} & \text{当 } \lambda_{i+1} > \lambda_i \\ = 0 & \text{当 } \lambda_{i+1} = \lambda_i \text{ 且 } \varphi_{i+1} > \varphi_i \\ = 180 & \text{当 } \lambda_{i+1} = \lambda_i \text{ 且 } \varphi_{i+1} < \varphi_i \\ = 2 \arctg \frac{-m'}{\cos(b + \varphi_{i+1})} & \text{当 } \lambda_{i+1} < \lambda_i \end{cases} \quad (20)$$

$$\omega_{i,2} \begin{cases} = 180 + 2 \arctg \frac{-m'}{\cos(b + \varphi_i)} & \text{当 } \lambda_{i+1} > \lambda_i \\ = 0 & \text{当 } \lambda_{i+1} = \lambda_i \text{ 且 } \varphi_{i+1} > \varphi_i \\ = 180 & \text{当 } \lambda_{i+1} = \lambda_i \text{ 且 } \varphi_{i+1} < \varphi_i \\ = 180 - 2 \arctg \frac{-m'}{\cos(b + \varphi_i)} & \text{当 } \lambda_{i+1} < \lambda_i \end{cases} \quad (21)$$

将(12)、(14)代入(3)'、(5)'式,通过分部积分,得到风矢在计算周界上呈线性假设时,涡、散度贡献

$$\xi_i \begin{cases} = \frac{L_i}{\Delta\theta_i} \left[f_{i+1} \sin\theta_{i,2} - f_i \sin\theta_{i,1} + \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta\theta_i} (\cos\theta_{i,2} - \cos\theta_{i,1}) \right] & \text{当 } \Delta\theta_i \neq 0 \\ = \frac{L_i}{2} (f_{i+1} + f_i) \cos\theta_{i,1} & \text{当 } \theta_i = 0 \end{cases} \quad (22)$$

$$D_i \begin{cases} = \frac{-L_i}{\Delta\theta_i} \left[f_{i+1} \cos\theta_{i,2} - f_i \cos\theta_{i,1} - \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta\theta_i} (\sin\theta_{i,2} - \sin\theta_{i,1}) \right] & \text{当 } \Delta\theta_i \neq 0 \\ = \frac{L_i}{2} (f_{i+1} + f_i) \sin\theta_{i,1} & \text{当 } \theta_i = 0 \end{cases} \quad (23)$$

3. 非线性计算方法

当风矢在测站间起伏变化很大时,为计算精确,应考虑风矢在计算周界上的非线性变化,这时,需要对水平风场作具体细致的分析,给定适当的曲线以适应风速及“交角”在周界上的变化,得到风矢在测站间的非线性变化函数 $f_i(l)$ 、 $\theta_i(l)$ 。当然,这两个函数代入(3)'、(5)'后必须是可积的。

如果 $f_i(l)$ 、 $\theta_i(l)$ 代入(3)'、(5)'后难以积分或积分形式繁杂,可采用差分计算方案。

将 L_i 分成 F 等份,各等分点上的风向、风速值分别为 d_i^j 、 f_i^j ($i=1,2,\dots,n$, $j=0,1,2,\dots,F$)。记 ω_i^j 为等 j 个点上 l 与经线交角,近似有

$$\omega_i^j = \frac{j}{F} (\omega_{i,2} - \omega_{i,1}) + \omega_{i,1} \quad (24)$$

由于 $\omega_{i,2}$ 与 $\omega_{i,1}$ 一般最大相差几度,因此,这种近似的精度是非常高的。这时, j 点“交角”

$$\theta_i^j = d_i^j + \omega_i^j - 180 \quad (25)$$

(3)'变成差分式为

$$\xi_i = \frac{L_i}{2F} \sum_{j=0}^{F-1} (f_i^j \cos\theta_i^j + f_i^{j+1} \cos\theta_i^{j+1}) \quad (26)$$

(5)'差分式为

$$D_i = \frac{L_i}{2F} \sum_{j=0}^{F-1} (f_i^j \sin\theta_i^j + f_i^{j+1} \sin\theta_i^{j+1}) \quad (27)$$

4. 各种方案的一些统计事实

我们对目前通常用的一些计算方案与本文介绍的线性方案进行了统计对比分析。

表1是一组相关系数表,相关因子为1972—1985年4月850 hPa高度上两个计算区域内的平均散度。这两个计算区域是: I—汉口、广州、衢县构成的球面三角形, II—汉口、长沙、郴州、广州、汕头、福州、衢县、安庆八站构成的球面八边形。这两个区域都较好地概括了江西全省范围。相关对象为平均雨量: \bar{R}_{max}^{10} —江西全省83个气象站中最大10站雨量平均。

由表1可以看出: (1)同区域各方案的相关系数相差不大,均为负值,与天气事实相符; (2)区域II的相关系数远高于区域I的相关系数。显然,计算周界上加密测站有利于提高计算精度。

表2是给定 \bar{R}_{max}^{10} 条件下的散度平均值。由表2可以看出: (1)平均散度值均为负值,且条件2的散度平均值小于条件1,符合天气事实; (2)相同区域相同条件下方案[0]的散度值要小于其它方案。由表1知,区域II的计算精度高于区域I。而区域I中方案[0]的散度值比其它方案的散度值更接近区域II的散度值。因此可以认为,方案[0]的计算精度高于方案[1][2][3][4]。换言之,本文介绍的线性理论在描述实际大气流场时比目前气象上通常用的方案[1][2][3][4]的线性假设要好一些。

5. 一个计算个例

1975年4月16日, $\bar{R}_{max}^{10} = 104$ mm。从08^h天气图上可以看出,在区域I的周界上,风向、风速均

表1 散度与雨量相关系数表*

区域	I 样本数376					II 样本数298			
	方案**	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[0]	[3]	[4]
雨量									
\bar{R}_{max}^{10}		-0.105	-0.091	-0.095	-0.095	-0.098	-0.376	-0.367	-0.378

* 散度值为08^h时值,雨量时段为前一日20^h至当日20^h。

** 方案[0]为本文介绍的线性方案,方案[1]—[4]见文献[1]—[4]。

表2 给定 \bar{R}_{max}^{10} 条件下散度平均值(散度单位: $10^{-5}s^{-1}$,雨量单位:mm)

区域	I						II				
	方案	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	样本数	[0]	[3]	[4]	样本数
1 $\bar{R}_{max}^{10} \geq 10$		-0.53	-0.40	-0.40	-0.40	-0.41	236	-0.57	-0.48	-0.51	171
2 $\bar{R}_{max}^{10} \geq 50$		-0.62	-0.53	-0.54	-0.54	-0.55	58	-0.96	-0.80	-0.84	36

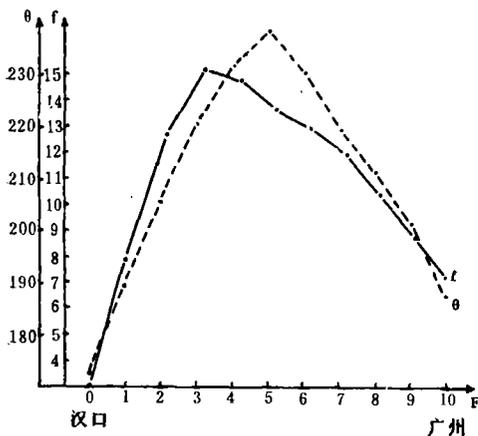


图3 1975年4月16日08时汉口—广州“夹角”与风速变化曲线

不同程度地存在着非线性变化。特别在汉口和广州之间(图3),存在着风速 ≥ 14 m/s的低空急流,而汉口风速为3 m/s,广州风速为7 m/s,不能反映急流的存在。另外,“夹角”在两端为 180° 左右,而在急流附近“夹角”为 240° 左右。在线性假设下,区域I方案[0]的散度值为 $1.14 \times 10^{-5} s^{-1}$,方案[1]—[4]的散度值在 $1.19 \times 10^{-5} s^{-1}$ — $1.25 \times 10^{-5} s^{-1}$ 之间。显然,这几个计算值与天气理论相违背。应作非线性计算。

取 $F=10$,通过等值线分析,得 $d_i, f_i (i=1, 2, 3, j=1, 2, \dots, 10)$,经差分方案计算得到风矢在非线形变化下区域I的散度值为 $-1.44 \times 10^{-5} s^{-1}$ 。参考区域II的散度值($-0.95 \times 10^{-5} s^{-1}$),我们认为这个值是可信的。

参 考 文 献

- [1] Bellamy, J. C., Objective calculation of divergence, vertical velocity and vorticity, *Bulletin of American Meteorological Society*, 30, 2, 1949.
- [2] 陈创买、郭英琼,气象常用参数和物理量查算表,气象出版社,1980。
- [3] 彭金泉、黄佩玲,计算任意多边形平均涡度、散度的一种方案,气象,12,1986。
- [4] 施永年,动力气候学中客观计算散度场和涡度场的一种新方案,气象学报,40,4,1982。
- [5] 廖洞贤等,一个直接用观测资料计算大范围散度、涡度和垂直速度的方案,气象学报,38,4,1980。

**A SCHEME FOR CALCULATING MEAN VORTICITY
AND DIVERGENCE IN IRREGULAR POLYGON
ON GLOBAL SURFACE**

Cai Dingjun Zheng Hongxiang
(*Jiangxi Meteorological Observatory*)

Abstract

In this paper, a new scheme for calculating mean vorticity and divergence in arbitrary irregular polygon on global surface is proposed. The results show that it is more accuracy than the other schemes.