第 49 卷 第 3 期
1991年 8 月

气 象 学 报
ACTA METEOROLOGICA SINICA

Vol. 49, No. 3
Aug., 1991

纬向气流对地形 Rossby 波的影响*

赵 平
(成都气象学院)

孙淑清
(中国科学院大气物理研究所)

提 要

本文在半地转近似[1]下，采用相平面方法[2]讨论了纬向基本气流对线性和非线性地形 Rossby 波的稳定性及解的性质的影响。结果指出：线性和非线性稳定性判据形式一样，纬向气流及其切变对稳定性有明显影响；在非线性近似下，可形成孤立波槽和孤立波脊。

一、引 言

地形对大气和海洋中的大尺度运动有重要影响。人们已经研究了许多地形造成的爬流和绕流对Rossby波的影响。Kasahara[3]指出，在西风带中，地形能产生定常波型扰动，而在东风带中只能激发出衰减型的扰动。张暑华和朱抱真[4]用线性准地转模式讨论了地形坡度对大气长波的不稳定作用。吕克利[5]用 WKB 方法讨论了地形作用下的准地转线性Rossby波的波作用量和能量，发现地形的南北坡和东西坡对 Rossby 波及其能量传播的影响不同。刘式适等[6]利用一个受地形强迫作用的半地转正压模式讨论了非线性Rossby 波的稳定度和解，发现非线性 Rossby 波可用 KdV 方程描述。

本文在包含地形影响的浅水波方程中，采用半地转近似[1]，用相平面方法[2]讨论了纬向气流水平切变对地形Rossby波稳定性的影响，并讨论了所对应解的性质。

二、基 本 方 程

考虑地形影响后，描述大气运动的非线性浅水波方程组为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=fv-\frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-fu-\frac{\partial \phi}{\partial y} \tag{2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+u\frac{\partial \phi}{\partial x}+v\frac{\partial \phi}{\partial y}+(\phi-\phi_B)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\left(u\frac{\partial \phi_B}{\partial x}+v\frac{\partial \phi_B}{\partial y}\right)=0 \tag{3}$$

其中 $\phi=gh$, h 为流体深度；$\phi_B=gh_B$, h_B 为地形高度，我们只考虑地形南北坡度的影响，即 $h_B=h_B(y)$，并取 $\frac{d\phi_B}{dy}$ 为常数；其它符号与常用符号一致。我们仅考虑北半球情况，$f>0$。

把气象要素分解为基本态要素和扰动态要素，即令

$$\begin{cases} u(x,\ y,\ t)=\bar{u}(y)+u'(x,\ y,\ t) \\ v(x,\ y,\ t)=v'(x,\ y,\ t) \\ \phi(x,\ y,\ t)=\bar{\phi}(y)+\phi'(x,\ y,\ t) \end{cases} \tag{4}$$

* 本文于 1989 年 8 月 5 日收到，1990 年 3 月 26 日收到修改稿。

其中带“－”和“′”的量依次表示基本态要素和扰动态要素，且取

$\bar{u}=-\frac{1}{f_0}\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial y}$，及 $\bar{u}>0$（对 $\bar{u}<0$ 可类似讨论）。

把(4)代入(1)—(3)式，并略去上标“′”，得到

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{d\bar{u}}{dy}=fv-\frac{\partial\phi}{\partial y} \tag{5}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial v}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-fu-\frac{\partial\phi}{\partial y} \tag{6}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial\phi}{\partial x}+u\frac{\partial\phi}{\partial x}+v\frac{\partial\phi}{\partial y}+v\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial y}+(\bar{\phi}+\phi)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)-v\frac{d\phi_B}{dy}=0 \tag{7}$$

其中我们取了 $\bar{\phi}-\phi_B\approx\bar{\phi}$。并且在下面的讨论中我们认为 $\frac{d\bar{u}}{dy}\equiv$ 常数。

由于我们只考虑地形Rossby波，即认为在地形激发出的波动初期地形作用远大于 β $\left(\beta=\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ 效应，因而可以取 $\beta=0$。由(5)和(6)式得到涡度方程为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\left[f_0-\frac{d\bar{u}}{dy}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0 \tag{8}$$

在半地转近似下[1]，(7)和(8)两式可变为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v_g}{\partial x}-\frac{\partial u_g}{\partial y}\right)+\left[f_0-\frac{d\bar{u}}{dy}+\left(\frac{\partial v_g}{\partial x}-\frac{\partial u_g}{\partial y}\right)\right]\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+u\frac{\partial\phi}{\partial x}+v\frac{\partial\phi}{\partial y}+(c_0^2+\phi)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)-v_g\frac{d\phi_B}{dy}=0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\approx\frac{\partial v_g}{\partial x}-\frac{\partial u_g}{\partial y} \tag{11}$$

其中由于地转风和实际风差别不是很大，同时也为了使问题求解方便，在(10)式中已取了 $v_g\frac{d\phi_B}{dy}\approx v\frac{d\phi_B}{dy}$ 的近似；$c_0^2=\bar{\phi}$；$u_g=-\frac{1}{f_0}\frac{\partial\phi}{\partial y}$；$v_g=\frac{1}{f_0}\frac{\partial\phi}{\partial x}$。

现在我们用相平面方法求解(9)—(11)式。

令

$$\begin{cases}u(x,\ y,\ t)=U(\theta)\\ v(x,\ y,\ t)=U(\theta)\\ \phi(x,\ x,\ t)=\Phi(\theta)\end{cases} \tag{12}$$

其中 $\theta=kx+ly-\sigma t$；k，l 分别为 x，y 方向的波数；σ 为频率。

把(12)式代入(9)—(11)式，有

$$K_h^2(-\sigma+k\bar{u}+kU+lV)\Phi'''+\left[f_0\left(f_0-\frac{d\bar{u}}{dy}\right)+K_h^2\Phi''\right](kU+lV)'=0 \tag{13}$$

$$(-\sigma+kU+lV)\Phi'+(c_0^2+\Phi)(kU+lV)'-\frac{k}{f_0}\frac{d\phi_B}{dy}\Phi'=0 \tag{14}$$

$$(kV-lU)'=\frac{K_h^2}{f_0}\Phi'' \tag{15}$$

其中 $k_h^2=k^2+l^2$,右上角标"$'$"表示对 θ 求导数。

如果我们考虑的 y 变化区间$[-L,L]$不太大,以保证基本状态参数 $c_0^2,\bar{u}$ 和$\dfrac{d\bar{u}}{dy}$等在该区间内的变化很小,因此在对 θ 积分和微分时可以把这些参数看作常数。这样,将(13)—(15)三式对 θ 积分,且取积分常数为零,得到

$$kU+lV=\frac{K_h^2(\sigma-k\bar{u})\Phi''}{K_h^2\Phi''+f_0\left(f_0-\dfrac{d\bar{u}}{dy}\right)} \tag{16}$$

$$kU+lV=\frac{\left(\sigma+\dfrac{k}{f_0}\dfrac{d\phi_B}{dy}\right)\Phi}{\Phi+c_0^2} \tag{17}$$

$$kV-lU=\frac{K_h^2}{f_0}\Phi' \tag{18}$$

由(16)和(17)两式得到

$$\Phi''=F(\Phi) \tag{19}$$

其中

$$F(\Phi)=\frac{f_0\left(f_0-\dfrac{d\bar{u}}{dy}\right)\left(c_x+\dfrac{1}{f_0}\dfrac{d\phi_B}{dy}\right)\Phi}{K_h^2c_0^2(c_x-\bar{u})-K_h^2\left(\bar{u}+\dfrac{1}{f_0}\dfrac{d\phi_B}{dy}\right)\Phi}$$

$$c_x=\frac{\sigma}{k}$$

显然,(19)式为非线性方程。如果从(19)式中解出 Φ,则可进一步从(17)和(18)两式求出 U 和 V,使问题得到解决。

三、纬向气流对地形Rossby波稳定性的影响

由于(19)式是一个很复杂的非线性方程,求其精确解比较困难,因此我们只求其近似解。

令 $\Psi=\Phi'$,把(19)式改写为一阶微分方程组

$$\Phi'=\Psi,\quad \Psi'=F(\Phi) \tag{20}$$

容易看到,方程组(20)具有平衡点 $A:(\Phi,\Psi)=(0,0)$。把 $F(\Phi)$ 在平衡点 A 附近进行泰勒展开,即

$$F(\Phi)=a_1\Phi+a_2\Phi^2+\cdots \tag{21}$$

其中

$$a_1=\frac{f_0\left(f_0-\dfrac{d\bar{u}}{dy}\right)\left(c_x+\dfrac{1}{f_0}\dfrac{d\phi_B}{dy}\right)}{K_h^2c_0^2(c_x-\bar{u})}$$

$$a_2=\frac{\bar{u}+\dfrac{1}{f_0}\dfrac{d\phi_B}{dy}}{c_0^2(c_x-\bar{u})}a_1$$

如果在(21)式仅保留右边第一项,(20)式简化为

$$\Phi'=\Psi,\quad \Psi'=a_1\Phi \tag{22}$$

这是地形 Rossby 波的线性情况。如果在(21)式保留右边第一、第二两项，则(21)式变为

$$\Phi'=\Psi,\ \Psi'=a_1\Phi+a_2\Phi^2 \tag{23}$$

这是地形 Rossby 波的非线性近似情况。

1. 线性稳定性

由常微分方程定性理论[7]，可以求得(22)式的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ a_1 & \lambda \end{vmatrix}=0$$

其特征根为

$$\lambda=\pm\sqrt{a_1} \tag{24}$$

由此可得到

$$\text{平衡点 }A\text{ 为}\begin{cases}\text{鞍点(当 }a_1>0\text{ 时)}\\ \text{中心(当 }a_1<0\text{ 时)}\end{cases} \tag{25}$$

由于大气中的大尺度运动一般满足 $c_x-\bar{u}<0$，因此(25)可改写为

$$\begin{cases}\text{当 }M_1+M_2+M_3<0\text{ 时，}A\text{ 点不稳定}\\ \text{当 }M_1+M_2+M_3>0\text{ 时，}A\text{ 点稳定}\end{cases} \tag{26}$$

其中

$$M_1=f_0\left(c_x+\frac{1}{f_0}\frac{d\phi_B}{dy}\right)$$

$$M_2=-c_x\frac{d\bar{u}}{dy}$$

$$M_3=-\frac{1}{f_0}\frac{d\bar{u}}{dy}\frac{d\phi_B}{dy}$$

如果不考虑基本气流作用，即令 $\bar{u}\equiv0$，则(25)式简化为

$$\begin{cases}\text{当}\dfrac{c_x+\dfrac{1}{f_0}\dfrac{d\phi_B}{dy}}{c_x}>0\text{ 时，}A\text{ 点不稳定}\\[2ex] \text{当}\dfrac{c_x+\dfrac{1}{f_0}\dfrac{d\phi_B}{dy}}{c_x}<0\text{ 时，}A\text{ 点稳定}\end{cases}$$

这个结果与文献[8]一致。

从(26)式可看出，在考虑纬向基流后，地形坡度、波动移动特征和纬向基流切变之间的相互影响使地形 Rossby 波的稳定性复杂化。表 1 和表 2 给出了在不同纬向基流情况下

表 1　M_2的作用

纬向基流 \ M_2 \ 相速度			$c_x>0$	$c_x<0$
I 型	⟶ → →	$\frac{d\bar{u}}{dy}>0$	<0	>0
II型	→ → ⟶	$\frac{d\bar{u}}{dy}<0$	>0	<0

表 2　M_3的作用

纬向基流 \ M_3 \ 地形坡度			北坡	南坡
I 型	⟶ → →	$\frac{d\bar{u}}{dy}>0$	>0	<0
II型	→ → ⟶	$\frac{d\bar{u}}{dy}<0$	<0	>0

M_2和M_3两项在波动稳定性中的作用(由于M_1项与文献[8]中的类似,因而此处不再讨论)。从表1中可看出,对不同的纬向气流南北分布,M_2项的作用不同,当纬向气流为I型分布时,M_2对东移的地形Rossby波起不稳定作用,而对西退的地形Rossby波起稳定作用;当纬向气流为II型分布时,M_2对东移波动起稳定作用,而对西退波动起不稳定作用。从表2中可看到,对不同的地形坡度及纬向气流分布,M_3的作用也不同,在地形北坡,对I型纬向气流分布M_3起稳定作用,而对II型纬向气流分布M_3起不稳定作用;在地形南坡,对I型纬向气流分布M_3起不稳定作用,而对II型纬向气流分布M_3起稳定作用。在实际大气中,容易看到:当中纬度西风带遇到东西走向地形时,绕过地形南北两侧,由于地表面粘性摩擦作用,常常在北坡出现I型分布的纬向气流,而在南坡出现II型分布的纬向气流,从而在南北两侧常常形成稳定的地形波动。

对于稳定的地形Rossby波,如果取$a_1=-1$,则可得到波动的频率方程和相速度公式

$$\sigma=\frac{kc_0^2K_h^2\bar{u}-k\left(f_0-\frac{d\bar{u}}{dy}\right)\frac{d\phi_B}{dy}}{c_0^2K_h^2+f_0\left(f_0-\frac{d\bar{u}}{dy}\right)} \tag{27}$$

$$c_x=\frac{c_0^2K_h^2\bar{u}-f_0\left(f_0-\frac{d\bar{u}}{dy}\right)\frac{d\phi_B}{dy}}{c_0^2K_h^2+f_0\left(f_0-\frac{d\bar{u}}{dy}\right)} \tag{28}$$

从(27)和(28)式可看到,基本气流及其切变对波动频率和传播速度有影响。

2. 非线性稳定性

现在我们来分析非线性方程(23)式的稳定性条件。当$a_1>0$时用(23)式的线性近似方程判断出(23)式在平衡点A附近不稳定[7]。而当$a_1<0$时,不能再用线性近似方程判断,因而我们用李雅普诺夫函数来判定[7]。设李雅普诺夫函数为

$$L(\Psi,\ \Phi)=-a[\Psi^2+f(\Phi)]^2$$

其中$f(\Phi)=-a_1\Phi^2-\frac{2}{3}a_2\Phi^3$。显然$L(\Psi,\Phi)$是$\Psi$和$\Phi$的连续函数;当点$(\Psi,\Phi)$不是平衡点$A$时$L(\Psi,\Phi)>0$,而$(\Psi,\Phi)$点是$A$点时有$L(\Psi,\Phi)=L(0,0)=0$;并且由复合函数求导得

$$\frac{dL(\Psi,\ \Phi)}{d\theta}=-2a[\Psi^2+f(\Phi)]\left[2\bar{\psi}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}+f'_\phi(\Phi)\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right]$$

再将(23)代入上式有

$$\begin{aligned}\frac{dL(\Psi,\ \Phi)}{d\theta}&\equiv-2a[\Psi^2+f(\Phi)][2\,\Phi'\,(a_1\Phi+a_2\Phi^2)\\&\quad+(-2\,a_1\Phi-2\,a_2\Phi^2)\Phi']\\&\equiv 0\end{aligned}$$

因此平衡点A稳定。可见,在平衡点A附近非线性方程(23)和线性方程(22)具有相同形式的稳定性条件,只是在非线性时,要用非线性波动的相速度代入(25)或(26)式。

四、非线性地形Rossby波的解

将(23)式表示为二阶常微分方程,即

$$\Phi''=a_1\Phi+a_2\Phi^2 \tag{29}$$

把上式对 θ 求一次导数，得

$$\Phi'''=2a_2\Phi\Phi'-a_1\Phi'=0$$

上式为 KdV 方程的另一种表达式，其解可用椭圆余弦波表示，在一定条件下其解可退化为线性正弦波或孤立波。下面我们讨论几种特解形式。

当非线性地形 Rossby 波不稳定时，即 $a_1>0$，(29)式具有如下形式的孤立波特解

$$\Phi=\tilde{A}\,\mathrm{Sech}^2\left(\frac{\sqrt{a_1}}{2}\theta\right) \tag{30}$$

而当非线性波动稳定时，$a_1<0$，(29)式具有下面特解

$$\Phi=-\tilde{A}\,\mathrm{Sech}^2\left(\frac{\sqrt{-a_1}}{2}\theta\right)+\frac{2}{3}\tilde{A} \tag{31}$$

其中 $\tilde{A}=-\dfrac{3}{2}\dfrac{a_1}{a_2}$。从(30)和(31)两式可看到，非线性地形 Rossby 波的振幅为有限值，由于 $\tilde{A}$ 可表示为

$$\tilde{A}=-\frac{3c_0^2(c_x-\bar{u})}{2\left(\bar{u}+\dfrac{1}{f_0}\dfrac{d\phi_B}{dy}\right)}$$

说明 $\tilde{A}$ 与纬向气流水平切变无关，即基本气流的切变不影响地形 Rossby 孤立波的振幅。另由孤立波解的性质可知，当基本流水平切变较大时，$|a_1|$ 也比较大，因而孤立波宽度较小；反之，当基本流切变比较小时，a_1 也比较小，因而孤立波宽度比较大。

将(30)式和(31)式分别代入 (11)式，可求出非线性地形 Rossby 波的地转风涡度均为

$$\zeta_g=\frac{3K_h^2a_1}{4f_0}\,\frac{c_x-\bar{u}}{\bar{u}+\dfrac{1}{f_0}\dfrac{d\phi_B}{dy}}\,\mathrm{Sech}^2\left(\frac{\sqrt{|a_1|}}{2}\theta\right)\left[3\,\mathrm{Sech}^2\left(\frac{\sqrt{|a_1|}}{2}\theta\right)-2\right] \tag{32}$$

如果考虑在孤立波峰值附近的情况，可以使

$$3\,\mathrm{Sech}^2\left(\frac{\sqrt{|a_1|}}{2}\theta\right)-2>0$$

因而 ζ_g 的符号由 $\dfrac{a_1(c_x-\bar{u})}{\bar{u}+\dfrac{1}{f_0}\dfrac{d\phi_B}{dy}}$ 确定。类似于前面，我们考虑 $c_x-\bar{u}<0$，且取

$$\bar{u}\sim 10\ \mathrm{m/s},\ g\sim 10\ \mathrm{m/s^2}$$

$$f_0\sim 10^{-4}\mathrm{s}^{-1}$$

当地形坡度很小时，如 $\dfrac{dh_B}{dy}\lesssim 0(10^{-5})$（气流绕流不明显），有 $\bar{u}+\dfrac{1}{f_0}\dfrac{d\phi_B}{dy}\approx\bar{u}$，则

$$\zeta_g\propto-\frac{a_1}{\bar{u}}$$

当波动不稳定时($a_1>0$)，在西风带中形成孤立波脊，而当波动稳定时 ($a_1<0$)，在西风带中形成孤立波槽。

当地形坡度比较大时，如 $\dfrac{dh_B}{dy}\gtrsim 0(10^{-3})$ （这时气流绕流明显），有 $\bar{u}+\dfrac{1}{f_0}\dfrac{d\phi_B}{dy}\approx\dfrac{1}{f_0}$

$\cdot \dfrac{d\phi_B}{dy}$，则

$$\zeta_g \propto -\frac{a_1}{\dfrac{d\phi_B}{dy}}$$

在地形北坡，对于不稳定波动形成孤立波槽，而对于稳定波动形成孤立波脊；在地形南坡，对于不稳定波动形成孤立波脊，而对于稳定波动形成孤立波槽。在实际大气中，由于青藏高原坡度很大，平均而言满足$\dfrac{dh_B}{dy}>0(10^{-3})$，由上面的结果，在地形北坡应经常出现稳定的地形高压脊，而在高原南坡应经常出现稳定的地形低压槽，这与实况比较一致。

当$\dfrac{dh_B}{dy}\sim 0(10^{-3})$时，$\bar{u}\sim\dfrac{1}{f_0}\dfrac{d\phi_B}{dy}$

在地形南坡，$\bar{u}+\dfrac{1}{f_0}\dfrac{d\phi_B}{dy}>0$，则

$$\zeta_g \propto -a_1$$

对于稳定波动形成孤立波槽，而对于不稳定波动形成孤立波脊。在北坡情况比较复杂，要由$\bar{u}$与$\dfrac{1}{f_0}\dfrac{d\phi_B}{dy}$的相对大小确定。

五、结　　论

在半地转近似下，可用相平面方法得到有地形影响和纬向基本气流作用的非线性方程。通过泰勒展开我们得到了描述地形 Rossby 波的线性和非线性近似方程，并讨论了波动的稳定性和波动解的性质。在线性和非线性情况下，波动稳定性判据形式一样，都与纬向基本气流及其水平切变有关。在非线性近似下，地形 Rossby 波可以用孤立波表示，其振幅与基本气流切变无关；在地形坡度及基本气流影响下，可形成孤立波槽或孤立波脊。

参 考 文 献

[1] 曾庆存，数值天气预报的数学物理基础，第九章，科学出版社，1979。

[2] 刘式适和刘式达，斜压 Rossby 波稳定性的线性和非线性问题，中国科学（B 辑），第 11 期，1055—1062，1986。

[3] Kasahara, A., The dynamical influence of orography on the large scale motion of the atmosphere, *J. Atmos.Sci.*, **23**, 3, 259—271, 1966.

[4] 张署华、朱抱真，青藏高原南北坡度和积云对流对大型扰动的作用，青藏高原气象科学实验论文集（二），245—252，科学出版社，1984。

[5] 吕克利，大地形和正压 Rossby 波的稳定性，气象学报，44，3，275—281，1986。

[6] 刘式适、谭本馗，地形作用下的非线性 Rossby 波，应用数学和力学，9，3，229—240，1988。

[7] 张锦炎，常微分方程几何理论与分支问题，第二章和第六章，北京大学出版社，1987。

[8] 赵平、孙淑清，线性和非线性地形罗斯贝波，大气科学（定稿待刊）。

EFFECT OF ZONAL FLOW ON TOPOGRAPHICALLY GENERATED ROSSBY WAVE

Zhao Ping
(Chengdu Institute of Meteorology)

Sun Shuqing
(Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica)

Abstract

The effects of zonal flow on the stability of linear and nonlinear orographic Rossby waves and their solutions by adopting the phase plane method under the semi-geostrophic approximation are discussed in this paper. It is shown that the criterion of nonlinear stability of the waves is the same as that of linear stability, and the effects of zonal flow and its shear on the wave stability are obvious; under the nonlinear approximation solitary wave troughs and solitary wave ridges are formed.