

## 正压大气中的代数 Rossby 孤立波\*

罗 德 海

(成都气象学院气象研究所)

### 提 要

本文研究了基本气流具有线性弱切变的非线性 Rossby 波, 得到了一个非线性发展方程为 Kubota 方程, 在一定的条件下, 可变为 Benjamin-Ono 方程, 并指出当代数 Rossby 孤立波的振幅越大时, 代数 Rossby 孤立波的传播速度越小, 基流切变越强, 代数 Rossby 孤立波越慢, 同时我们还指出在代数 Rossby 孤立波的振幅满足一定的条件下, 代数 Rossby 孤立波才随纬度的增高( $\beta$ 减小)而减慢。并且代数 Rossby 孤立波的结构与大气中的偶极子阻塞是一致的。

### 一、引 言

大气中的孤立波一直是大气动力学家所关心和注意的课题, Long<sup>[1]</sup>(1964) 最早研究了基本气流具有水平切变的 Rossby 孤立波, 随后 Benney<sup>[2]</sup>(1966) 又进行了研究, 但对于大气中的代数 Rossby 孤立波的研究则注意不够, Ono<sup>[3]</sup>(1981) 最早研究了大气中的代数 Rossby 孤立波, 但他研究的外区域是无穷区域, 也没有说明代数 Rossby 孤立波的应用, 本文放宽了他的条件, 推广了他的工作。另外我们还在 Ono 的条件下求出了代数 Rossby 孤立波, 并用于解释大气中所出现的偶极子阻塞。

### 二、模 式 方 程

在不考虑地形、摩擦作用的情况下, 无量纲的正压位涡守恒方程为

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + J(\psi, \nabla^2 \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

其中  $\beta = \beta_0 \frac{L^2}{U}$ ,  $\beta_0$  为 Rossby 参数,  $L$  为水平特征尺度。  $U$  为水平特征速度,  $\psi$  为无量纲的流函数,  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  为 Laplace 算子

令  $\psi = \bar{\psi}_0(y) + \psi'$ , 则方程(1)式可变为

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla^2 \psi' + J(\psi', \nabla^2 \psi') (\beta - \bar{u}'' ) \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$\text{其中 } \bar{u} = -\frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial y}, \quad \bar{u}'' = \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2}$$

在这里我们把中高纬度大气分成两部分, 一部分是区域  $[0, y_0]$ , 另一部分是区域  $[y_0, y_1]$ , 在区域  $[0, y_0]$  内基流有切变, 并且  $\beta$  效应很重要, 在区域  $[y_0, y_1]$  内, 基本气流是均匀的,  $\beta$  效应的作用较小可以略去, 因此在区域  $[0, y_0]$  内大尺度扰动方程为

\* 本文于 1988 年 12 月 23 日收到, 1989 年 5 月 30 日收到修改稿。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) \nabla^2 \psi' + J(\psi', \nabla^2 \psi') + (\beta - \bar{u}''') \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

在区域 $[y_0, y_1]$ 内,大尺度扰动方程为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) \nabla^2 \psi' + J(\psi', \nabla^2 \psi') = 0 \quad (4)$$

其边界条件为

$$\psi'_1(x, 0, t) = \psi'_0(x, y_1, t) = 0, \quad \psi'_1(x, y_0, t) = \psi'_0(x, y_0, t) \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \psi'_1}{\partial x \partial y} \right|_{y=y_0} = \left. \frac{\partial^2 \psi'_0}{\partial x \partial y} \right|_{y=y_0} \quad (6)$$

其中 $\psi'_1$ 表示区域 $[0, y_0]$ 内的扰动流函数, $\psi'_0$ 表示区域 $[y_0, y_1]$ 内的扰动流函数, $y=0$ 为刚性边界,而 $y=y_0$ 为移动性边界,但在 $y=y_0$ 处区域 $[0, y_0]$ 和区域 $[y_0, y_1]$ 内的扰动流函数应该是连续的,而且质量通量在 $y=y_0$ 处也是连续的,因此(5)和(6)式是成立的,并且区域 $[y_0, y_1]$ 内的扰动是通过区域 $[0, y_0]$ 内的扰动激发出来的,这种扰动是随着 $y$ 而衰减的。Ono(1981)研究了大气中的代数 Rossby 孤立波,在他的工作中取的边界是 $y_1 \rightarrow \infty$ ,在这里 $y_1 > y_0$ ,并不一定要求 $y_1 \rightarrow \infty$ ,可见本文的目的是推广以前的工作。

### 三、非线性扰动方程的展开

在本文中,我们所使用的方程为无量纲的正压位涡方程,而且我们研究的是大尺度 Rossby 波,因此 Rossby 数 $\left(R_0 = \frac{U}{f_0 L}\right)$ 应远远小于1,因而我们可把 $R_0$ 当成小参数,即取 $\epsilon = R_0$

在区域 $[0, y_0]$ 内,按 Ono<sup>[3]</sup>的工作引入 Gardner-Morikawa 变换

$$\xi = \epsilon(x - ct), \quad \tau = \epsilon^2 t, \quad y = y \quad (7)$$

将 $\psi'$ 按下级数展开

$$\psi' = \epsilon \psi_1(x, y, t, \xi, \tau) + \epsilon^2 \psi_2 + \epsilon^3 \psi_3 + \dots \quad (8)$$

其中 $\psi_n$ ( $n=1, 2, 3$ )均为 $x, y, t, \xi, \tau$ 的函数

把(8)和(7)式代入方程(3)式有

$$O(\epsilon^2): (\bar{u} - c) \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial y^2 \partial \xi} + (\beta - \bar{u}''') \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} = 0 \quad (9)$$

$$O(\epsilon^3): (\bar{u} - c) \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial y^2 \partial \xi} + (\beta - \bar{u}''') \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} = -\frac{\partial^3 \psi_1}{\partial y^2 \partial \tau} - \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial y^3} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2 \partial \xi} \quad (10)$$

在区域 $[y_0, y_1]$ 内按 Ono 的工作可引入下列变换

$$X = x - ct, \quad \tau = \epsilon^2 t, \quad y = y \quad (11)$$

将 $\psi'$ 表示成如下级数

$$\psi' = \epsilon \Phi(X, \tau, t, y) \quad (12)$$

其中由于引入(11)式, $\psi'$ 中的 $x$ 已变为 $X$

再把(11)和(12)式代入方程(4)式有

$$\epsilon^3 \frac{\partial}{\partial \tau} \nabla^2 \Phi + \epsilon (\bar{u} - c) \frac{\partial}{\partial X} \nabla^2 \Phi + \epsilon^2 \frac{\partial \Phi}{\partial X} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \Phi - \epsilon^2 \frac{\partial \nabla^2 \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial X} = 0 \quad (13)$$

$$\text{其中 } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

于是我们可得

$$0(\varepsilon): \frac{\partial}{\partial X} \nabla^2 \Phi = 0 \quad (14)$$

在取积分常数为零的情况下有

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (15)$$

其边界条件为

$$\begin{cases} \text{当 } y=y_1, \Phi(X, y, \tau) = 0 \\ \text{当 } y=y_0, \Phi(X, y, \tau) = V_0(X, \tau) \end{cases} \quad (16)$$

其中  $V_0$  为  $\Phi$  在  $y=y_0$  处的值, 对于 Laplace 方程(15)式并结合边界条件有解

$$\Phi(X, y, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(V_0) \frac{\sinh k(y_1 - y)}{\sinh k(y_1 - y_0)} e^{ikx} dk \quad (17)$$

其中  $F(V_0)$  为  $V_0$  的 Fourier 变换, (17)式对  $y$  微分有

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(V_0) k \frac{\cosh k(y_1 - y)}{\sinh k(y_1 - y_0)} e^{ikx} dk \quad (18)$$

因此在  $y=y_0$  处有

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{y=y_0} = -\frac{\varepsilon}{2(y_1 - y_0)\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{-\infty}^{\infty} V_0 \coth \frac{\pi}{2(y_1 - y_0)\varepsilon} (\xi - \xi') d\xi' \quad (19)$$

(19)式的求得过程可见文献[5]。

在本文中我们考虑  $y-y_0$  必须很大, 以致于使  $(y_1 - y_0)\varepsilon \geq 0(1)$  (但并不要求  $y_1 \rightarrow \infty$ ),

在这种情况下  $\frac{1}{\varepsilon(y_1 - y_0)} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{-\infty}^{\infty} V_0 \coth \frac{\pi}{2(y_1 - y_0)\varepsilon} (\xi - \xi') d\xi' = 0(1)$ , 因此有

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{y=y_0} = 0(\varepsilon), \text{ 于是我们还有 } \frac{1}{\varepsilon(y_1 - y_0)} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{-\infty}^{\infty} V_0 \coth \frac{\pi}{2(y_1 - y_0)} (\xi - \xi') d\xi' =$$

$$\frac{1}{2(y_1 - y_0)R_0} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{-\infty}^{\infty} V_0 \coth \frac{\pi}{2(y_1 - y_0)R_0} (\xi - \xi') d\xi', \text{ 在下面我们通过内外解的匹配可}$$

以得到一个非线性发展方程。

#### 四、非线性发展方程

设方程(9)式的解为

$$\psi_1 = A(\tau, \xi) \phi_1(y) \quad (20)$$

将(20)式代入方程(9)式有

$$\frac{d^2 \phi_1}{dy^2} + \frac{\beta - \bar{u}''}{\bar{u} - c} \phi_1 = 0 \quad (21)$$

在大气中为了考虑非线性作用, 我们必须进一步考虑基本气流的切变作用, 对于大气中的孤立波, 若不考虑基流的切变, 这种孤立波就不存在, 这是众所周知的, 并设西风气流的切变是弱切变(如远离急流南侧), 于是可设

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + \delta Q(y) \quad (22)$$

其中  $\bar{u}_0 \gg |\delta| > \varepsilon$ ,  $Q$  仅为  $y$  的函数

将(20)式代入方程(10)式, 并利用(21)式有

$$(\bar{u} - c) \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial y^2 \partial \xi} + (\beta - \bar{u}'') \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} = \frac{\beta - \bar{u}''}{\bar{u} - c} \phi_1 \frac{\partial A}{\partial \tau} + \left( \frac{\beta - \bar{u}''}{\bar{u} - c} \right)' \phi_1 A \frac{\partial A}{\partial \xi} \quad (23)$$

在方程(23)式的两边同乘 $\frac{\phi_1}{\bar{u}-c}$ ,然后减去(21)式乘 $\frac{\partial\psi_2}{\partial\xi}$ 可得

$$\phi_1 \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial y^2 \partial \xi} - \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} = \frac{\beta - \bar{u}''}{(\bar{u} - c)^2} \phi_1^2 \frac{\partial A}{\partial \tau} + \frac{1}{\bar{u} - c} \left( \frac{\beta - \bar{u}''}{\bar{u} - c} \right)' \phi_1 \frac{\partial A}{\partial \xi} \quad (24)$$

对于方程(24)式,在区域 $[0, y_0]$ 内进行积分,并利用边界条件 $\phi_1(0) = 0$ 有

$$\left( \phi_1 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y \partial \xi} - \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} \right) \Big|_{y=y_0} = \frac{\partial A}{\partial \tau} \int_0^{y_0} \frac{\beta - \bar{u}''}{(\bar{u} - c)^2} \phi_1^2 dy + A \frac{\partial A}{\partial \xi} \int_0^{y_0} \frac{\phi_1^2}{(\bar{u} - c)} \left( \frac{\beta - \bar{u}''}{\bar{u} - c} \right)' dy \quad (25)$$

在边界条件 $y = y_0$ 处有

$$(\epsilon \psi_1 + \epsilon^2 \psi_2 + \dots) \Big|_{y=y_0} = \epsilon \Phi \Big|_{y=y_0} \quad (26)$$

因此有

$$\Phi \Big|_{y=y_0} = \psi_1 \Big|_{y=y_0} = A(\tau, \xi) \phi_1(y) \Big|_{y=y_0} \quad (27)$$

从(27)式显然我们可取

$$\phi_1(y) \Big|_{y=y_0} = -1, \quad V(X, \tau) = -A(\tau, \xi) \quad (28)$$

于是在 $y = y_0$ 处有

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{y=y_0} = \frac{\epsilon}{2(y_1 - y_0)R_0} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\tau, \xi') \coth \frac{\pi}{2(y_1 - y_0)R_0} (\xi - \xi') d\xi' \quad (29)$$

将(29)式代入边界条件(6)式有

$$\epsilon^2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y \partial \xi} \Big|_{y=y_0} + \epsilon^3 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y \partial \xi} \Big|_{y=y_0} = \epsilon^3 \frac{1}{2(y_1 - y_0)R_0} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} A(\tau, \xi') \cdot \coth \frac{\pi}{2(y_1 - y_0)R_0} (\xi - \xi') d\xi' \quad (30)$$

因而从(30)式我们有

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y \partial \xi} \Big|_{y=y_0} = 0 \\ \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y \partial \xi} \Big|_{y=y_0} = \frac{1}{2(y_1 - y_0)R_0} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} A(\tau, \xi') \coth \frac{\pi(\xi - \xi')}{2(y_1 - y_0)R_0} d\xi' \end{cases} \quad (31)$$

把(31)和(28)式代入方程(25)式有

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} \int_0^{y_0} \frac{\beta - \bar{u}''}{(\bar{u} - c)^2} \phi_1^2 dy + A \frac{\partial A}{\partial \xi} \int_0^{y_0} \frac{\phi_1^2}{\bar{u} - c} \left( \frac{\beta - \bar{u}''}{\bar{u} - c} \right)' dy + \frac{1}{2(y_1 - y_0)R_0} \times \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} A(\tau, \xi') \coth \frac{\pi}{2(y_1 - y_0)R_0} (\xi - \xi') d\xi' = 0 \quad (32)$$

方程(32)式可改写为

$$I \frac{\partial A}{\partial \tau} + I_1 A \frac{\partial A}{\partial \xi} + \frac{1}{2(y_1 - y_0)R_0} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} A(\tau, \xi') \coth \frac{\pi}{2(y_1 - y_0)R_0} (\xi - \xi') d\xi' = 0 \quad (33)$$

$$\text{其中 } I = \int_0^{y_0} \frac{\beta - \bar{u}''}{(\bar{u} - c)^2} \phi_1^2 dy, \quad I_1 = \int_0^{y_0} \frac{\phi_1^2}{\bar{u} - c} \left( \frac{\beta - \bar{u}''}{\bar{u} - c} \right)' dy$$

(33)式就是我们所得到的关于非线性 Rossby 波所满足的非线性发展方程,它首先由 Kubota<sup>[4]</sup>等人在研究两层分层流时所得到的发展方程,这种方程随后被周清甫所推广<sup>[5]</sup>,作者<sup>[6]</sup>在研究大气中的非线性惯性重力内波时得到了这种方程的一种特殊形式即 Benjamin-Ono 方程,可见本文这里的工作是 Ono 工作的推广。

## 五、本征值问题

利用(21)和(28)式,我们有下列本征值问题

$$\begin{cases} \frac{d^2\phi_1}{dy^2} + \frac{\beta - \bar{u}''}{\bar{u} - c} \phi_1 = 0 \\ \phi_1(0) = 0, \phi_1|_{y=y_0} = -1 \end{cases} \quad (34)$$

再将  $\phi_1, c$  分别按  $\delta$  级数展开有

$$\begin{cases} \phi_1 = \phi_{10} + \delta\phi_{11} + \dots \\ c = c_0 + \delta c_1 + \dots \end{cases} \quad (35)$$

把  $Q$  和(35)式代入方程(34)式并结合边界条件我们可得本征值和本征函数近似为

$$\begin{cases} c = \bar{u}_0 - \frac{\beta}{m^2} + 0(\delta) \\ \phi_1 = -\sin my + 0(\delta) \end{cases} \quad (36)$$

$$\text{其中 } m = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi/y_0, n = 0, \pm 1 \dots$$

在这里我们所取的基本气流切变为线性切变,于是我们可取  $Q(y) = y - y_0$ , 亦即基本气流为  $\bar{u} = \bar{u}_0 + \delta(y - y_0)$ , 将  $Q$  代入方程(33)式中的系数,我们可近似地确定

$$I = \frac{m^4 y_0}{2\beta}, \quad I_1 = -\frac{2\delta m^5}{3\beta^2} \quad (37)$$

(37)式是我们在取弱切变的基本气流为远离急流南侧分布的情况下得到的,因此  $\delta > 0$ , 这样我们便确定了 Kubota 方程的系数。

## 六、非线性发展方程的孤立波解

在方程(33)式中,利用  $\xi = \varepsilon X, \tau = \varepsilon^2 t$ , 并令  $M = \varepsilon A$ , 同时利用  $R_0 = \varepsilon$ , 则方程(33)式可变为

$$I \frac{\partial M}{\partial t} + I_1 M \frac{\partial M}{\partial X} + \frac{1}{2(y_1 - y_0)} \frac{\partial^2}{\partial X^2} \int_{-\infty}^{\infty} M(t, X') \coth \frac{\pi}{2(y_1 - y_0)} (X - X') dX' = 0 \quad (38)$$

当  $y_1 \rightarrow \infty$  时,方程(38)式可变为

$$I \frac{\partial M}{\partial t} + I_1 M \frac{\partial M}{\partial X} + \frac{1}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial X^2} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M(t, X')}{X - X'} dX' = 0 \quad (39)$$

(39)式就是 Benjamin-Ono 方程,这种方程首先由 Benjamin<sup>[7]</sup>, Davis 和 Acrivos<sup>[8]</sup>, Ono<sup>[3]</sup>等所得到,作者在研究大气中的非线性惯性重力波时,也得到了这种方程,并把它推广成 Benjamin-Ono-KdV 方程,对于方程(39)式,其代数孤立波解为

$$M = \frac{M_0 \lambda^2}{(X - c_A t)^2 + \lambda^2} \quad (40)$$

其中  $c_A = \frac{I_1}{4I} M_0, \lambda = \left| \frac{4}{I_1 M_0} \right|$ , 并且  $M_0$  为  $M$  在  $(X, t) = (0, 0)$  处的值

同时我们还可以得到代数 Rossby 孤立波的传播速度为

$$c = c_0 + c_A = \bar{u}_0 - \frac{\beta}{m^2} - \frac{\delta M_0 m}{3\beta y_0} \quad (41)$$

由于我们研究的是类似于急流南侧分布的代数 Rossby 孤立波,因此  $\delta > 0$ , 在这种情

况下,从(41)式可以看出,当代数 Rossby 孤立波的振幅越大时,代数 Rossby 孤立波的传播速度越小,当代数 Rossby 孤立波的振幅满足  $c=0$  时,大气中会出现定常的代数 Rossby 孤立波。当  $\delta$  越大,亦即基流切变越强,代数 Rossby 孤立波的传播速度越小。令  $Q_1 = \frac{\beta}{m^2}$ ,  $Q_2 = \frac{\delta M_0 m}{3 \beta y_0}$ , 则有  $\frac{dQ_1}{d(-\beta)} = -\frac{1}{m^2}$ ,  $\frac{dQ_2}{d(-\beta)} = \frac{\delta M_0 m}{3 \beta^2 y_0}$ , 从而有  $\frac{dQ_2}{d(-\beta)} > \frac{dQ_1}{d(-\beta)}$ , 并且只有当代数 Rossby 孤立波的振幅满足  $M_0 > \frac{3 \beta^2 y_0}{m^2 \delta}$  时,  $\left| \frac{dQ_2}{d(-\beta)} \right| > \left| \frac{dQ_1}{d(-\beta)} \right|$  才成立。在这种情况下,代数 Rossby 孤立波的传播速度才随纬度的增高 ( $\beta$  减小)而减小,在大气中阻塞系统很容易满足这些条件。另外(40)式实际上是一种 Lorentz 脉冲状的孤立波,这是非线性作用的结果,在大气中一些阻塞形势便有类似的结构。在本文中我们取参数  $L=7000 \text{ km}$ ,  $\beta=1.114 \times 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ ,  $\bar{u}_0=1$ ,  $\delta=0.4$ ,  $y_0=1$ , 这时基本气流的分布如图 1 所示。

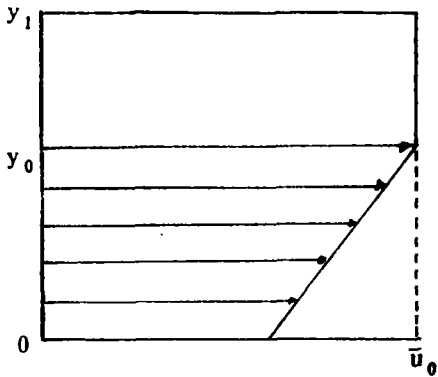


图 1 基本气流的分布  $\bar{u} = \bar{u}_0 + \delta(y - y_0)$   
( $\bar{u}_0=1$ ,  $\delta=0.4$ ,  $y_0=1$ ,  $y_1 \rightarrow \infty$ )

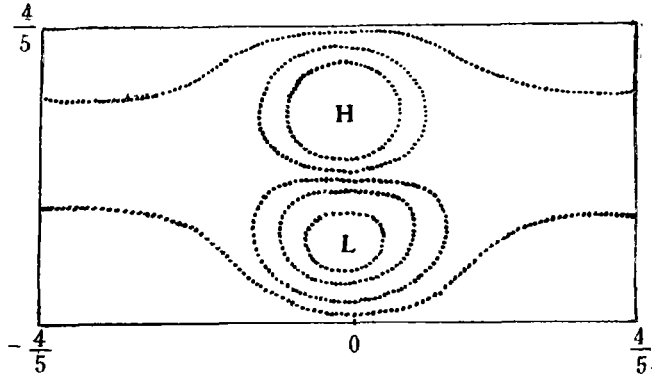


图 2 代数 Rossby 孤立波的流场  
( $\max \psi = 6$ ,  $\min \psi = -7$ ,  $\Delta \psi = 2$ ,  $c = 0$ )

于是在图 1 基本气流分布的情况下,大气中的代数 Rossby 孤立波的流场( $c=0$ )如图 2 所示。

从图 2 可以看出,在代数 Rossby 孤立波的流场中,出现了南低北高的偶极子结构,由于这种结构的存在可使大气中的西风气流发生分支,这种结构在大气中可称为偶极子阻塞。尽管 Ono(1981)对大气中的代数 Rossby 孤立波进行了研究,但他没有得到这种偶极子结构。在那里他对涡度方程进行处理时,在开始时用了  $y_1 \rightarrow \infty$  的条件,在本文中作者放宽了这一条件得到了一个推广的非线性发展方程即 Kubota 方程,并且作者在这里所取的基本气流也与 Ono 的研究不一样。对于方程(33)式,我们作变换

$$T = -2\tau, \quad \xi = \sqrt{2}\xi, \quad N = \frac{I_1 \sqrt{2}}{4I} A \tag{42}$$

于是方程(33)式可变为

$$2I \frac{\partial N}{\partial T} - 4IN \frac{\partial N}{\partial \xi} - \frac{1}{\sqrt{2}(y - y_0)E_1} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} N(T, \xi') \coth \frac{\pi}{2(y_1 - y_0) \sqrt{2} R_0} (\xi - \xi') d\xi' = 0 \quad (43)$$

在  $(y_1 - y_0) \sqrt{2} R_0 = 1$  的情况下, 方程(43)式的代数孤立波解<sup>[5]</sup>为

$$N = - \frac{\frac{1}{I} \lambda \sin \lambda}{\cos \lambda + \cosh \lambda \left( \xi + \frac{1}{I} T \lambda \cot \lambda \right)} \quad 0 \leq \lambda < \pi \quad (44)$$

其中  $\lambda$  是振幅参数。

利用(42)式, 方程(33)式的代数孤立波解为

$$A(\tau, \xi) = - \frac{\frac{2 \sqrt{2}}{I_1} \lambda \sin \lambda}{\cos \lambda + \cosh \lambda \left( \sqrt{2} \xi - \frac{2}{I} \tau \lambda \cot \lambda \right)} \quad (45)$$

(45)式就是 Kubota 方程的代数孤立波解, 这种孤立波的结构与 BO 方程的代数孤立波

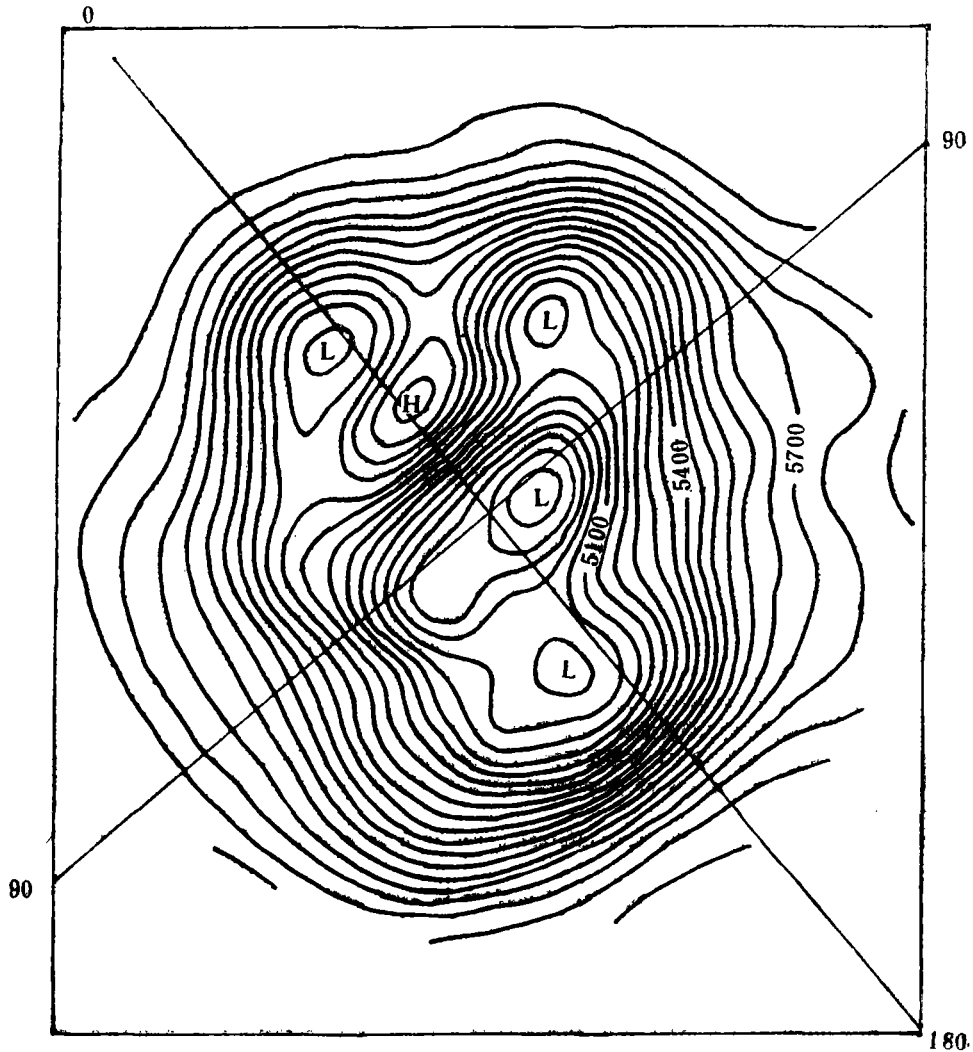


图 3 1987 年 1 月 11 日至 15 日的 500 hPa 的 5 天平均位势高度图

的结构是一致的。

### 七、代数 Rossby 孤立波与偶极子阻塞的比较

图 3 是日本气象厅发布的 5 天平均的位势高度图,它是 1987 年 1 月在  $10^{\circ}W-10^{\circ}E$  范围内所发生的一次阻塞过程。

从图 3 可以看出在 11 日到 15 日内在  $10^{\circ}W-10^{\circ}E$  区域内发生的一次阻塞过程,从图 3 可以看出在 11 日到 15 日内在  $10^{\circ}W-10^{\circ}E$  范围内出现了一个偶极子阻塞,很明显,偶极子阻塞大约在急流南侧,因此图 1 的基本气流可以描述图 3 的基本气流分布。McWilliams<sup>[9]</sup>(1980) 曾利用 equivalent Modon 来解释这种偶极子阻塞,随后 Malguzzi 和 Malanotte-Rizzoli<sup>[10-11]</sup>(1984,1987) 提出了偶极子阻塞的 KdV 型 Rossby 孤立波理论,图 2 是我们所得到的代数 Rossby 孤立波的流场,将图 2 与图 3 相比较可以看出,两者在结构上是一致的,可见我们可用大气中的代数 Rossby 孤立波来描述大气中的偶极子阻塞。

### 八、结 论

通过上面的讨论,我们可以得到如下结论:

1. 在具有弱切变基本气流类似于远离急流南侧的基本气流分布的情况下,我们得到了描述非线性 Rossby 波所满足的 Kubota 方程,在一定的条件下可变为 Benjamin-Ono 方程。

2. 对于代数 Rossby 孤立波,当波振幅越大时,代数 Rossby 孤立波越慢。在代数 Rossby 孤立波的振幅满足一定的条件下,代数 Rossby 孤立波的传播速度才随纬度的增高而减小。

3. 定常代数 Rossby 孤立波的结构类似于大气中所出现的偶极子阻塞。

致谢:作者非常感谢 MIT 的 Malanotte-Rizzoli 教授提供她的研究论文。

### 参 考 文 献

- [1] Long, R. R., Solitary waves in the westerlies, *J. Atmos. Sci.*, **21**, 197-200, 1964.
- [2] Benney, D. J., Long nonlinear waves in the fluid flows, *J. Math and phys.*, **45**, 42-63, 1966.
- [3] Ono, H., Algebraic, Rossby soliton, *J. Phys. Soc. Japan*, **50**, 2757-2759, 1981.
- [4] Kubota, T., et al., Propagation of weakly nonlinear internal waves in stratified fluid of finite depth, *A.I.A.A. J. Hydronautics*, **12**, 157-165, 1978.
- [5] 周清甫,有限水深分层流中的二阶孤立波,中国科学, A 辑,第 10 期,924-934,1984.
- [6] 罗德海,关于大气中的非线性 B-O 方程及其推广,中国科学, B 辑,第 10 期,1111-1122,1988.
- [7] Benjamin, T. B., Internal waves of permanent form in fluids of great depth, *J. Fluid Mech.*, **29**, 559-592, 1967.
- [8] Davis R. E., and A. Acrivos, Solitary internal waves in deep water, *J. Fluid Mech.*, **29**, 593-607, 1967.
- [9] McWilliams, J., An application of equivalent modons to atmospheric blocking, *Dyn. Atmos. Oceans*, **5**, 43-66, 1980.
- [10] Malguzzi, P., and P. Malanotte-Rizzoli, Nonlinear stationary Rossby waves on nonuniform zonal winds and atmospheric blocking, Part I: The analytical theory, *J. Atmos. Sci.*, **41**, 2620-2628, 1984.
- [11] Malanotte-Rizzoli, P., and P. Malguzzi, Coherent structures in a baroclinic atmosphere, part III: Block formation and eddy forcing, *J. Atmos. Sci.*, **44**, 2493-2505, 1987.



## ALGEBRAIC SOLITARY ROSSBY WAVE IN THE ATMOSPHERE

Luo Dehai

*(Chengdu Institute of Meteorology)*

### Abstract

In this paper, nonlinear Rossby waves for the linear weak shear basic flow are investigated to obtain nonlinear Kubota equation, under certain condition, the Kubota equation reduces to Benjamin-Ono equation. Furthermore, author finds that 1) the larger the amplitude of algebraic solitary Rossby wave and the shear of basic flow, the smaller the propagation speed of algebraic solitary Rossby wave, 2) when the amplitude of algebraic solitary Rossby wave satisfies a certain condition, the phase speed of algebraic solitary Rossby wave decreases with increasing of latitude, and 3) the horizontal structure of algebraic solitary Rossby wave is consistent with dipole blocking in the atmosphere.