第49卷 第1期 气 象 学 报 Vol. 49 ,No. 1
1991年2月 ACTA METEOROLOGICA SINICA Feb., 1991

# 对称型波包发展与重力惯性波波包发展的相似性问题*

赵 瑞 星
（总参气象局）

利用波群分析方法讨论波包发展被用于大气中波动稳定性分析，得到了比 normal mode 方法更好的结果。曾庆存等[1]阐述了 Rossby 波和涡旋运动的稳定性与一些参数间的关系，巢纪平[2]，刘式适等[3]讨论了重力惯性内波的波作用量与稳定性，孙立潭等[4]讨论了中尺度对称型重力惯性波的波包发展问题，均说明了这一点。

对称型重力惯性波和惯性重力波属同一类波动，只是两者的空间结构和扰动的形成机制略有不同。前者的扰动是倾斜发展的，后者是垂直发展的。前者被认为是斜压不稳定，惯性不稳定和层结不稳定产生的扰动，而后者被认为仅是惯性和层结不稳定产生的扰动。许秦等[5]利用一个坐标旋转变换讨论了两者产生机制的相似性。本文试图应用相同的坐标变换法讨论两者波包发展的相似性问题。

## 1. 基 本 方 程 组

在准动量无辐散近似下，静态环境大气中，三维$(x,y,z)$惯性重力波的线性方程组可写成为：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-fv=-\dfrac{\partial p}{\partial x}\\[2mm]\dfrac{\partial v}{\partial t}+fu=-\dfrac{\partial p}{\partial y}\\[2mm]\dfrac{\partial w}{\partial t}=-\dfrac{\partial p}{\partial z}+\theta\\[2mm]\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0\\[2mm]\dfrac{\partial \theta}{\partial t}+N^2w=Q\end{cases}\tag{1}$$

其中$(u,v,w,\theta)=\bar{\rho}(u',v',w',\dfrac{g}{\theta_0}\theta')$，$p=p'$，$N=\dfrac{g}{\theta_0}\dfrac{\partial\bar{\theta}}{\partial z}$ 为空间函数，时间缓变函数，$Q$为非绝热加热函数，其余均为常用符号。

化为单变量方程为：

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+N^2\right)\nabla_h^2\right]w=\nabla_h^2Q-2\nabla_hN^2\cdot\nabla_hw$$

$$-(\nabla_h^2N^2)w\tag{2}$$

在准动量无辐散近似下，对称型扰动的线性方程组可写成为：

* 本文于1988年10月5日收到，1989年3月30日收到修改稿。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\bar{u}_z w-f_a v=0\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+fu+\dfrac{\partial p}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{\partial p}{\partial z}-\theta=0\\ \dfrac{\partial \theta}{\partial t}-M^2 v+N^2 w=Q\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0\end{cases} \tag{3}$$

其中$(u,v,w,\theta,p)$同前，$N^2$，$Q$ 同前，$f_a=f-\bar{u}_y$，$M^2=-\dfrac{g}{\theta_0}\dfrac{\partial\bar{\theta}}{\partial y}$，$N^2$，$f_a$ 和 $M^2$ 为空间函数，为时间缓变函数。

令 $v=\partial\psi/\partial z$，$w=-\partial\psi/\partial y$，把(3)化为单变量方程：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+N^2\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+M^2\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z}+f\bar{u}_z\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z}+\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+ff_a\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$
$$+\left(\frac{\partial N^2}{\partial y}+\frac{\partial f\bar{u}_z}{\partial z}\right)\frac{\partial\psi}{\partial y}+\left(\frac{\partial M^2}{\partial y}+\frac{\partial ff_a}{\partial z}\right)\frac{\partial\psi}{\partial z}+\frac{\partial Q}{\partial y}=0 \tag{4}$$

我们把(2)、(4)式作为下面分析的基本方程，利用 WKB 方法讨论两种波包能量的变化。

## 2. 波群分析与波作用量方程

先引入慢尺度

$$X=\epsilon x,\ Y=\epsilon y,\ Z=\epsilon z,\ T=\epsilon t \tag{5}$$

相对而言，$x,y,z,t$ 为快尺度，对于缓变波列 $w$ 和 $\psi$ 具有如下形式：

$$\begin{cases}w=A(X,Y,Z,T)e^{i\tau(x,y,z,t)}\\ \psi=B(Y,Z,T)e^{i\tau(y,z,t)}\end{cases} \tag{6}$$

其中 $A,B$ 为振幅，$\tau$ 为位相函数，且有

$$k=\partial\tau/\partial x,\ l=\partial\tau/\partial y,\ n=\partial\tau/\partial z,\ \omega=-\partial\tau/\partial t \tag{7}$$

$k,l,n,\omega$ 为空间、时间的缓变函数。

类似文献[3]作波群分析，应用 WKB 方法可得到波作用量方程。(以下均考虑 $Q\equiv0$)。

1) 重力惯性波波作用量方程

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}+\nabla\cdot\varepsilon\boldsymbol{C}_g=-\frac{K_h A_0^2}{2\omega^2}\frac{\partial N^2}{\partial T}-\frac{A_0^2}{\omega}\left(k\frac{\partial N^2}{\partial X}+l\frac{\partial N^2}{\partial Y}\right) \tag{8}$$

其中 $\varepsilon=K^2A_0^2$，$K_h^2=k^2+l^2$，$K^2=K_h^2+n^2$，$A_0$ 为 $A$ 的零级近似。求解过程中略去了 $\nabla_h^2 N^2$。$\varepsilon$ 即为文献[3]中定义的波作用量。由(7)式知惯性重力波的波作用量随时间的变化除依赖于其自身的空间分布 $-\nabla\cdot\varepsilon\boldsymbol{C}_g$ 外，主要决定于层结参数 $N^2$ 的非定常性和水平非均匀性。若层结参数定常且水平均一，则上式化为：

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}+\nabla\cdot\varepsilon\boldsymbol{C}_g=0 \tag{9}$$

此即为惯性重力波波作用量守恒原理。在波包区域积分，可得到波包稳定性分析方程

$$\iiint_V\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\,dV=-\iiint_V\frac{K_h^2A_0^2}{2\omega^2}\frac{\partial N^2}{\partial T}\,dV-\iiint_V\frac{K_h^2A_0^2}{\omega^2}\boldsymbol{C}_h\cdot\nabla N^2 dV \tag{10}$$

其中 $\boldsymbol{C}_h=\dfrac{\omega}{K_h^2}(k\boldsymbol{i}+l\boldsymbol{j})$

如果我们定义 $\varepsilon_1=\omega\varepsilon$ 为广义波作用量，则方程(8)变为

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial T}+\nabla\cdot(\varepsilon_1 \boldsymbol{C}_g)=-\frac{A_0^2 K_h^2}{\omega}\boldsymbol{C}_h\cdot\nabla N^2 \tag{11}$$

其中用了 $\frac{D\omega}{DT}=\frac{K_h^2}{2\omega K^2}\frac{\partial N^2}{\partial T}$，$\omega^2=(K_h^2 N^2+n^2 f^2)/K^2$。若 $\boldsymbol{C}_h\cdot\nabla N^2=0$，即层结水平分布均一或波传播方向垂直于层结梯度方向时，得到广义波作用量守恒原理。

2）对称型波作用量方程

$$\frac{\partial E}{\partial T}+\nabla\cdot(\boldsymbol{C}_g E)=-\frac{B_0^2}{2\omega^2}\Big[l^2\frac{\partial N^2}{\partial T}+nl\frac{\partial}{\partial T}(f\bar{u}_z+M^2)+n^2\frac{\partial f f_a}{\partial T}\Big]-\frac{B_0^2}{2\omega}\Big[n\Big(\frac{\partial f f_a}{\partial Z}+\frac{\partial M^2}{\partial Y}\Big)+l\Big(\frac{\partial f\bar{u}_z}{\partial Z}+\frac{\partial N^2}{\partial Y}\Big)\Big] \tag{12}$$

其中　$E=(l^2+n^2)B_0^2$，$\omega^2=\frac{1}{\gamma^2}(n^2 f f_a+nl(f\bar{u}_z+M^2)+l^2N^2)$，$\gamma^2=l^2+n^2$。

由此可见，对称型波包发展的条件是外参数 $N^2$，$f\bar{u}_z$，$M^2$，$ff_a$ 不定常和热成风不平衡。如果热成风平衡，即满足

$$f\bar{u}_z=-\frac{g}{\theta_0}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial y} \tag{13}$$

那么有

$$\begin{cases}\frac{\partial f\bar{u}_z}{\partial Z}=-\frac{g}{\theta_0}\frac{\partial^2\bar{\theta}}{\partial y\partial Z}=-\frac{\partial N^2}{\partial Y}\\ \frac{\partial M^2}{\partial Y}=\frac{\partial f\bar{u}_z}{\partial Y}=-\frac{\partial f f_a}{\partial Z}\end{cases} \tag{14}$$

因此(12)式变为

$$\frac{\partial E}{\partial T}+\nabla\cdot(\boldsymbol{C}_g E)=-\frac{B_0^2}{2\omega^2}\Big[l^2\frac{\partial N^2}{\partial T}+nl\frac{\partial}{\partial T}(f\bar{u}_z+M^2)+n^2\frac{\partial f f_a}{\partial T}\Big] \tag{15}$$

此时如外参数 $N^2$，$M^2$，$ff_a$ 定常，通常认为 $\bar{u}$ 仅是 $Y$，$Z$ 的函数，因此只要 $N^2$ 定常，则有

$$\frac{\partial E}{\partial T}+\nabla\cdot(\boldsymbol{C}_g E)=0 \tag{16}$$

此即对称型波包波作用量守恒原理。

由于

$$\frac{D\omega}{DT}=\frac{\gamma^{-2}}{2\omega}\Big[n^2\frac{\partial f f_a}{\partial T}+nl\frac{\partial}{\partial T}(f\bar{u}_z+M^2)+l^2\frac{\partial N^2}{\partial T}\Big] \tag{17}$$

其中　$\frac{D}{DT}=\frac{\partial}{\partial T}+\boldsymbol{C}_g\cdot\nabla$，下同。

若定义 $E_1=E\omega$，则可得到热成风平衡大气中的广义波作用量守恒原理

$$\partial E_1/\partial T+\nabla\cdot(\boldsymbol{C}_g E_1)=0 \tag{18}$$

由此看出，热成风偏差对对称型重力惯性波发生发展的作用。陈秋士[6]曾经指出热成风偏差存在时将产生重力惯性波，以完成热成风平衡的调整。

## 3. 相　似　性

上一节主要讨论了对称型波包发展与惯性重力波波包发展的相异性，下面我们将讨论两者的相似性。

由对称不稳定分析知，对称不稳定扰动环流优势发展的方向角 $\alpha$[5]满足

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{N^2-F^2}{2M^2}-\frac{\sqrt{(N^2-F^2)^2+4M^4}}{2M^2}\qquad 即\quad \mathrm{tg}\,2\alpha=-2M^2/(N^2-F^2) \tag{19}$$

其中　$F^2=ff_a$。为使坐标轴 $z$ 旋转到扰动优势发展方向，作如下变换[7]

$$\begin{pmatrix}\hat{y} & \hat{v} & f\hat{u}\\ \hat{z} & \hat{w} & \hat{\theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & \sin\alpha_1\\ -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y & v & fu\\ z & w & \theta\end{pmatrix} \tag{20}$$

其中 $\alpha_1=\alpha-\pi/2$,显然 $\mathrm{tg}\,2\,\alpha_1=\mathrm{tg}\,2\,\alpha$。

通过上述变换后，对称型扰动的方程组变为：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\hat{v}}{\partial t}+f\hat{u}+\dfrac{\partial p}{\partial\hat{y}}=0\\ \dfrac{\partial\hat{w}}{\partial t}-\hat{\theta}+\dfrac{\partial p}{\partial\hat{z}}=0\\ \dfrac{\partial f\hat{u}}{\partial t}-\hat{F}^2\hat{v}=0\\ \dfrac{\partial\hat{\theta}}{\partial t}+\hat{N}^2w=0\\ \dfrac{\partial\hat{v}}{\partial\hat{y}}+\dfrac{\partial\hat{w}}{\partial\hat{z}}=0\end{cases} \tag{21}$$

其中

$$\begin{cases}\hat{F}^2=F^2\cos^2\alpha_1+M^2\sin 2\,\alpha_1+N^2\sin^2\alpha_1\\ \hat{N}^2=F^2\sin^2\alpha_1-M^2\sin 2\,\alpha_1+N^2\cos^2\alpha_1\end{cases} \tag{22}$$

设流函数 $\hat{\psi}$ 满足 $\hat{v}=\dfrac{\partial\hat{\psi}}{\partial\hat{z}}$，$\hat{w}=-\dfrac{\partial\hat{\psi}}{\partial\hat{y}}$，化为单一变量方程为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\hat{N}^2\right)\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial\hat{y}^2}+\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\hat{F}^2\right)\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial\hat{z}^2}+\frac{\partial\hat{N}^2}{\partial\hat{y}}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\hat{y}}+\frac{\partial\hat{F}^2}{\partial\hat{z}}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\hat{z}}=0 \tag{23}$$

作波群分析可得

$$\frac{\partial\hat{E}}{\partial T}+\nabla\cdot(\hat{E}\boldsymbol{C}_g)=-\frac{B_0^2}{2\omega^2}\left(\hat{l}^2\frac{\partial\hat{N}^2}{\partial T}+\hat{n}^2\frac{\partial\hat{F}^2}{\partial T}\right)-\frac{B_0^2\omega}{2\,\omega^2}\left(\hat{l}\,\frac{\partial\hat{N}^2}{\partial Y}+\hat{n}\,\frac{\partial\hat{F}^2}{\partial Z}\right) \tag{24}$$

$$\omega^2=(\hat{l}^2\hat{N}^2+\hat{n}^2\hat{F}^2)/\hat{\gamma}^2,\quad \hat{\gamma}^2=\hat{l}^2+\hat{n}^2 \tag{25}$$

故

$$\frac{D\omega}{DT}=\frac{\hat{\gamma}^{-2}}{2\,\omega}\left(\hat{l}^2\frac{\partial\hat{N}^2}{\partial T}+\hat{n}^2\frac{\partial\hat{F}^2}{\partial T}\right) \tag{26}$$

因此有

$$\frac{\partial\hat{E}_1}{\partial T}+\nabla\cdot(\hat{E}_1\boldsymbol{C}_g)=-\frac{B_0^2}{2}\left(\hat{l}\,\frac{\partial\hat{N}^2}{\partial Y}+\hat{n}\,\frac{\partial\hat{F}^2}{\partial Z}\right) \tag{27}$$

其中　$\hat{E}_1=\omega\hat{E}=\omega\hat{\gamma}^2B_0$。

由上述分析看出，在 $(\hat{y},\hat{z})$ 坐标系中，对称型波包发展和前面分析的重力惯性波包发展是极相似的。它已看不出受热成风平衡的影响，这种影响已被转换成隐含形式。

## 4. 结　　语

前面的分析表明，对称型波包发展和重力惯性波波包发展具有相似性也有相异性，相似性仅表现在形式上相似，而不能改变其本质的相异性。对称型波包的发展不仅受外参数的不定常性影响，而且更重要的是受热成风偏差的作用。如热成风平衡，则可找到对称型波包发展具有一守恒量 $\omega E$，而重力惯性波波包不具有这些特性，要导出重力惯性波的守恒量应有别的条件。一些文献中曾导出了重力惯性波波作用量推广的形式——广义波作用量 $K_h\omega\varepsilon$ 的守恒性，这似乎是重力惯性波波包发展的特性。然而在本文的计算中却导不出这一守恒量，究其原因在于方程(2)中考虑了 $\nabla_h N^2$。显然，在(2)式中略去

$\nabla_h N^2$ 和 $\nabla_h^2 N^2$ 时，也可导出如此的守恒量。但是，这样导出的守恒量是否有意义，这种方法是否正确还值得考虑。作者认为导不出守恒量是对的，因为考虑基流存在时，若基流水平切变存在，则无论如何也导不出守恒量。如把对称型波包作一坐标变换，变到$(\hat{y},\hat{z})$坐标系中，则对称型波包发展有类似重力惯性波波包发展的条件。

## 参 考 文 献


[1] Zeng, Q. C. (曾庆存), The evolution of a Rossby-wave packet in a three-dimensional baroclinic atmosphere, *J. Atmos. Sci.*, 40, 73—84, 1983.

[2] 巢纪平，非均匀层结大气中的重力惯性波及其在暴雨预报中的初步应用，大气科学，4，2，148—158，1980。

[3] 刘式适等，地球流体惯性重力内波的波作用量与稳定性，大气科学，11，1，12—22，1987。

[4] 孙立潭等，中尺度扰动的对称发展，气象学报，47，4，394—401，1989。

[5] 许秦等，非静力平衡大气中的斜压惯性不稳定，大气科学，6，4，355—366，1982。

[6] 陈秋士，大尺度大气系统发展的物理过程，新疆气象，1979年 3 月。

[7] Xu, Q., and J. H. E. Clark, The nature of symmetric instability and its similarity to convective and inertial instability, *J. Atmos. Sci.*, 42, 2880—2883, 1985.


# THE SIMILARITY OF THE DEVELOPMENT OF SYMMETRIC WAVEPACKET AND INERTIA-GRAVITATIONAL WAVEPACKET


Zhao Ruixing

(*Meteorological Bureau, Headquarters of the General Staff*)



**Abstract**

By using the WKB method, the similar and different conditions of the development of symmetric wavepacket and inertia-gravitational wavepacket in the moment nondivergent model are discussed. The development symmetric wavepacket depended not only on the external parametric nonstationary but also on the thermal wind deviations mainly. If thermal wind balance was assumed, a conservation quantity $\omega E$ was obtained, but it was not so about the inertia-gravitational wave. If the vertical coordinate axis was rotated to the direction in which the development of symmetric perturbation was maximum, the condition of the development of symmetric wavepacket was similar to that of inertia-gravitational wavepacket.