

层结切变流中的 Rossby 波的稳定度*

谭 本 馗

(云南大学地球物理系)

Rossby 波的稳定度问题是大气动力学的中心问题之一,这方面的研究工作已有很多。早期,文献[1-4,9]采用标准波型法对此问题作了开创性的研究,得到了许多重要结论。如,有关不稳定的判据,稳定波和不稳定波的结构,以及它们对维持大气环流所起的作用等。近些年来,文献[5-8]应用 WKB 方法和波包波作用量概念研究了缓变介质中的 Rossby 波的发展演变问题,发现, Rossby 波的稳定度不仅与基流的空间分布状况有关,而且还与波的自身结构和它在基流中的位置有关。

本文应用常微分方程定性理论,对具有三维切变的层结流体中的 Rossby 波的稳定度问题进行了探讨,所得结论,有些与已有结论一致,有些则不同。

1. 基 本 方 程

p 坐标系中描述绝热无摩擦的大尺度大气运动的方程组可写为

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}\right)u - fv = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}\right)v + fu = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial \phi}{\partial p} + s\omega = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中 s 为静力稳定度参数,文中将其视为大于零的常数。其余符号均为气象上所惯用。

Rossby 波是由 β 效应产生的一种涡旋慢波,可用如下方程组来描述:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \left(f_0 + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \beta v = 0 \\ f_0\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \nabla^2 \phi \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial \phi}{\partial p} + s\omega = 0 \end{cases} \quad (2)$$

这里已采用了散度方程的零级简化形式。这样做,既滤去了快速的重力波又突出了 Rossby 波的特征。

将大气状态分为基态和扰动:

$$\begin{cases} u = \bar{u}(y, p) + u^*(x, y, p, t), \quad v = v^*(x, y, p, t) \\ \omega = \omega^*(x, y, p, t), \quad \phi = \bar{\phi}(y, p) + \phi^*(x, y, p, t) \end{cases} \quad (3)$$

* 本文 1987 年 12 月 14 日收到, 1989 年 3 月 30 日收到最后修改稿。

带“-”的量表基态, 带“*”的量表扰动。由于 $\bar{u} = \bar{u}(y, p)$, 故这里所考虑的基流既有水平切变又有垂直切变。文中假定它随空间缓慢变化。将(3)式代入(2)式可得线性化的扰动方程组:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v^*}{\partial x} - \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) + f_0 \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(v^* \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(u^* \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \beta v^* = 0 \\ f_0 \left(\frac{\partial v^*}{\partial x} - \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) = \nabla^2 \phi^* \\ \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} + \frac{\partial \omega^*}{\partial p} = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi^*}{\partial p} - f_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} v^* + s \omega^* = 0 \end{cases} \quad (4)$$

其中涡度方程中的 βv^* 和热力学方程中的 $f_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} v^*$ 项中的 v^* 已用地转风 $v^* = \frac{1}{f_0} \frac{\partial \phi^*}{\partial x}$ 代替。对于大尺度运动, 这样做是合理的。设(4)式有行波解:

$$\begin{cases} u^* = U(\theta) & v^* = V(\theta) & \omega^* = \Omega(\theta), \\ \phi^* = \Phi(\theta) & \theta = kx + my + np - \nu t \end{cases} \quad (5)$$

(5)式代入(4)式后, 将前三式对 θ 积分一次, 得到:

$$\begin{cases} f_0 (\bar{u}k - \nu) (kV' - mU') + f_0 \left(f_0 - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) (kU + mV) = \beta k \Phi \\ f_0 (kV - mU) = (k^2 + m^2) \Phi' \\ kU + mV + n\Omega = 0 \\ (k\bar{u} - \nu) n \Phi'' - k \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} \Phi' + s \Omega = 0 \end{cases} \quad (6)$$

其中撇号表对 θ 的微分。经过简单运算, 从(6)可得:

$$\Phi'' = \frac{1}{\left[sK^2 + n^2 f_0 \left(f_0 - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \right] (c - \bar{u})} \left[(\beta s \Phi - f_0 \left(f_0 - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) n \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} \Phi') \right] \quad (7)$$

其中 $c = \frac{\nu}{k}$, $K^2 = k^2 + m^2$ 分别是 Rossby 波的相速和水平总波数的平方。若令 $\Phi' = \psi$, 则(7)化为:

$$\begin{cases} \Phi' = \psi \\ \psi' = a\Phi + b\psi \end{cases} \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} a &= \frac{\beta s}{\left[sK^2 + n^2 f_0 \left(f_0 - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \right] (c - \bar{u})}, \\ b &= \frac{-f_0 \left(f_0 - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) n \frac{\partial \bar{u}}{\partial p}}{\left[sK^2 + n^2 f_0 \left(f_0 - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \right] (c - \bar{u})} \end{aligned} \quad (9)$$

方程组(8)的平衡点是 $(\Phi, \psi) = (0, 0)$, 下节将应用常微分方程定性理论讨论平衡点的性质。

2. 稳定度分析

下面的讨论中,除假定 S 大于零外,同时还假定 $c - \bar{u} < 0$, 这是与西风带中的 Rossby 波的实际情况相一致的。下面分几种情况讨论。

1) 基流为常数,即 $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} = 0$ 。此时,平衡点 $(0, 0)$ 是稳定的中心。故无基流切变的层结流体中的 Rossby 波总是稳定的。

2) 基流仅有水平切变,即 $\frac{\partial \bar{u}}{\partial p} = 0, \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \neq 0$ 。这是纯正压不稳定问题。当

$$sK^2 + n^2 f_0 \left(f_0 - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) < 0 \quad (10)$$

时,平衡点是不稳定的,否则,是稳定的。由于 $\left(f_0 - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)$ 为环境场的绝对涡度,它一般为正,故一般讲, Rossby 波是正压稳定的。只有在个别地区,如西风急流轴的南侧,当切变值较大时,会出现不稳定。

经典的惯性不稳定判据是

$$f_0 \left(f_0 - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) < 0 \quad (11)$$

不难看出,由于层结的存在,惯性不稳定的流体却不一定是正压不稳定的;反之,则成立。当层结为中性时,二者就完全一致了。显然,层结是起稳定作用的。

不稳定判据(10)式是过去所未得到的。

3) 基流仅有垂直切变,即 $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = 0, \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} \neq 0$ 。这是纯斜压不稳定问题。当

$$n \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} > 0 \quad (12)$$

时,平衡点是不稳定的,否则是稳定的。在 p 坐标系中, $n > 0$, 表波槽轴线自下向上向东倾斜, $n < 0$, 向西倾斜。(12)式表明,西风随高度减小时,西倾槽稳定,东倾槽不稳定。西风随高度增大时,情形刚刚相反。

大气中常见情况是西风随高度增大,此时,西倾槽是发展的,这就解释了不稳定行星波高层位落后于低层位相的观察事实。而在西风急流区,急流轴上方,东倾槽不稳定;下方,西倾槽不稳定,此结论也是和观测相一致的。

关于切变值的大小与稳定度性质的关系,显然,波稳定与否与切变值大小无关,但不稳定增长率却与之有联系。当 $\left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} \right| > \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial p} \right)_c$ 时,平衡点是不稳定结点;当 $\left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} \right| < \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial p} \right)_c$ 时,平衡点是不稳定焦点。这里, $\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial p} \right)_c$ 由下式给出:

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial p} \right)_{c, \pm} = \left| \frac{4 \beta s (sK^2 + n^2 f_0^2) (\bar{u} - c)}{n^2 f_0^4} \right|^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

在相平面上,结点附近 (Φ, ψ) 随 θ (或 t) 的变化远大于焦点附近 (Φ, ψ) 随 θ 的变化。故,斜压性愈强(弱),不稳定增长率愈大(小)。

4) 基流具有三维切变,即 $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \neq 0, \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} \neq 0$ 。这是混和型不稳定问题。当

$$sK^2 + n^2 f_0 \left(f_0 - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) < 0 \quad (14)$$

时,或当

$$sK^2 + n^2 f_0 \left(f_0 - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) > 0, f_0 \left(f_0 - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) n \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} > 0 \quad (15)$$

时,平衡点是不稳定的。(14)式和(15)式是 Rossby 波混和型不稳定判据。(14)式与纯正压不稳定判据形式上完全一样,这表明,正压不稳定的 Rossby 波也同时是混和型不稳定的。但(15)式表明,正压稳定的 Rossby 波却可能是混和型不稳定的。

在 $f_0 \left(f_0 - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) > 0$, 即惯性稳定的区域,若

$$n \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} > 0 \quad (16)$$

时,波动是不稳定的,否则是稳定的。(16)式表明,在惯性稳定区域,不稳定波的槽线结构与基流空间分布状况的关系与纯斜压情形完全类似,在此不再赘述。

而在 $f_0 \left(f_0 - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) < 0$, $\left| f_0 \left(f_0 - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \right| < \frac{sK^2}{n^2}$ 的区域,即惯性不稳定但正压稳定的区域,若

$$n \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} < 0 \quad (17)$$

时,波动是不稳定的,否则是稳定的。在上述区域,若西风随高度增大,西倾槽稳定,东倾槽不稳定;若西风随高度减小,西倾槽不稳定,东倾槽稳定。这与纯斜压情形的结论相反。

对于西风急流,在急流轴的北侧,不稳定波的结构是:急流轴的下方,槽的轴线西倾;急流轴的上方,槽的轴线东倾。在急流轴南侧,当基流水平切变较小,满足 $\left(f_0 - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) > 0$ 时,其上方东倾槽不稳定,下方西倾槽不稳定;若基流水平切变较大,使 $\left(f_0 - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) < 0$ 但 $\left| f_0 \left(f_0 - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \right| < \frac{sK^2}{n^2}$ 时,急流轴上方西倾槽不稳定,下方东倾槽不稳定;当风速水平切变更大,满足(14)式时,波动总是不稳定的,与波槽轴线的倾斜状态和它在基流中的位置完全无关。

从以上的稳定度分析可以看出,在纯斜压情况下,本文结论与过去所得到的结论(如文献[8])是一致的,而在正压和三维切变的情况下,本文结论与过去的结论很不相同。其主要差别是,在本文中,稳定度判据与环境场的绝对涡度的分布特征有密切联系,这一特点正反映了惯性稳定度因子的作用,它可能与在涡度方程中考虑了涡度散度乘积项有关。另外,本文中的有关稳定不稳定的判据都是充分条件,它们与用其它方法所得到的稳定度判据互为补充。

致谢:审稿同志和《气象学报》编辑部对本文提供了许多修改意见,谨在此表示感谢。

参 考 文 献

- [1] Charney, J. G., The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current, *J. Meteor.*, 4, 135—162, 1947.
- [2] Kuo, H. L., Dynamic instability of two-dimensional flow in a barotropic atmosphere, *J. Meteor.*, 6, 105—122, 1949.
- [3] Kuo, H. L., Three-dimensional disturbances in a baroclinic zonal current, *J. Meteor.*, 9, 260—278, 1952.
- [4] Lin, C. C., The theory of hydrodynamic stability, Cambridge University Press, 1955.
- [5] 卢佩生、曹庆存, 正压大气中扰动的演变, *大气科学*, 5, 1—8, 1981.
- [6] Zeng Qingcun, The development characteristics of quasi-geostrophic baroclinic disturbances, *Tellus*, 35 A, 337—349, 1983.
- [7] Zeng Qingcun, The evolution of a Rossby-wave packet in a three-dimensional baroclinic atmosphere, *J. Atmos. Sci.*, 40, 73—84, 1983.
- [8] 陈英仪、巢纪平, 螺旋 Rossby 波的波作用守恒和稳定性, *中国科学 B 辑*, 663—672, 1983.
- [9] Charney, J. G., and M. E. Stern, On the stability of internal baroclinic jets in a rotating atmosphere, *J. Atmos. Sci.*, 19, 159—172, 1962.

THE STABILITY OF ROSSBY WAVES IN A STRATIFIED SHEAR FLUID

Tan Benkui

(Department of Geophysics, Yunnan University)

Abstract

In this paper the stability of linear Rossby waves in a stratified shear fluid is investigated by using the qualitative theory of ordinary differential equations. It is found that (1) if the basic current has no shear at all, the Rossby waves are always stable, (2) if the basic current has horizontal shear only, the unstable criterion for the waves is $sK^2 + n^2 f_0 \left(f_0 - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) < 0$, (3) if the basic current has vertical shear only, the unstable criterion is $n \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} > 0$, (4) if the basic current has both horizontal and vertical shears, if $sK^2 + n^2 f_0 \left(f_0 - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) < 0$, the waves are unstable, if $sK^2 + n^2 f_0 \left(f_0 - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) > 0$, the unstable criterion is $f_0 \left(f_0 - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) n \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} > 0$.