

## 大地形上边界层流场的动力学研究\*

赵 鸣

(南京大学大气科学系)

### 提 要

本文应用边界层气象学中 Estoque 数值模式关于湍流交换系数及分层的处理方法,求得了大地形存在时定常边界层方程的零、一级解析解,并用求得到大地形存在时边界层的散度场、垂直速度场,改进了前人的结果。

### 一、引 言

不计地形时研究大气边界层的各种流场特征的经典工作从动力学观点言,主要基于 Ekman 理论<sup>[1]</sup>,在散度及垂直速度上有 Charney<sup>[2]</sup>等的经典工作,其主要缺点是用了一个常值湍流交换系数  $K$ ,以及用水平平均的边界层方程的解来求散度、涡度。实际上,  $K$  既与高度有关,也与风、压场等有关;而当对速度场进行水平微分时,已认为速度场水平非均匀,但用的速度场却是从没有平流项的水平平均方程得到的,这就使经典工作的物理基础还不够坚实。地形存在时,Панчев<sup>[3]</sup>将铅直坐标的起点放在局地地面上,对交换系数作了简单假定,得到了大地形存在时的散度场、垂直速度场,显然也有改进的必要。Панчев<sup>[3]</sup>还提出如下设想,先用水平平均 PBL 方程求零级近似风分布,然后以之求  $(\mathbf{V} \cdot \Delta(\mathbf{V}))$ ,即零级平流项,再以之求非均匀 PBL 方程的解,从而得到一级近似下非线性 PBL 方程的解,以此来求地形存在时的流场特征。本文运用 Estoque 边界层数值模式中的  $K$  分布及有关处理方法,先求出零级风分布,再用 Панчев的设想求出一级风解及边界层散度、垂直速度场,得到大地形时更现实的流场特征。

### 二、零级近似 PBL 风场

按 Estoque 模式<sup>[4]</sup>,PBL 分二层,近地层中用熟知的规律,Ekman 层中设  $K$  线性减少至顶处的零(或微量),我们以之为零级近似。

设铅直坐标  $z$  为从局地地面算起,  $Z$  从海平面算起,  $z_h$  为地形的海拔高度,  $z_h = z_h(x, y)$ , 则

$$z = Z - z_h \quad (1)$$

任一函数  $F$  在  $X, Y, Z$  坐标中为  $F_X$ , 在  $x, y, z$  坐标中为  $F_x$ , 则有:

\* 本文于 1988 年 6 月 27 日收到, 1989 年 1 月 9 日收到修改稿。该文是国家自然科学基金资助项目。

$$\frac{\partial F_x}{\partial X} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial X} = \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z_h}{\partial x} \quad (2)$$

本文考虑大尺度流场,为简单计,设 PBL 为中性以代表平均状况,又设正压。近地层中风分布为对数律,取近地层层高 100 m,定常 PBL 方程:

$$\frac{d}{dz} K \frac{du}{dz} + f(v - v_g) = 0 \quad (3a)$$

$$\frac{d}{dz} K \frac{dv}{dz} - f(u - u_g) = 0 \quad (3b)$$

$u_g, v_g$  为地转风分量,令  $W = u + iv, W_g = u_g + iv_g$ , 则:

$$\frac{d}{dz} K \frac{dW}{dz} - if(W - W_g) = 0 \quad (4)$$

设边界层上界在  $z = H = 1000$  m, 有上界条件

$$W = W_g \quad \text{当 } z = H \quad (5)$$

设实轴沿近地层风向,则近地层中有:

$$W = \frac{u_*}{k} \ln \frac{z}{z_0} \quad (6)$$

$u_*$  为摩擦速度,  $k$  为卡门常数,  $z_0$  为粗糙度,  $u_*$  与地转风及  $z_0$  有关。设  $\alpha$  为近地面风向与上界风向夹角,则对北半球(5)式可写成:

$$W = G \cos \alpha - iG \sin \alpha \quad \text{当 } z = H \quad (7)$$

$G = |W_g|$ , 方程(4)下界条件为近地层顶  $z = h$  处,

$$W = \frac{u_*}{k} \ln \frac{h}{z_0} \quad \text{当 } z = h \quad (8)$$

设  $z = H$  处,  $K$  取小值  $K_H$ , 因  $z = h$  处有  $K_h = k u_* h$ , 故在 Ekman 层中有:

$$K = K_h - C(z - h) \quad (9)$$

$C = \frac{K_h - K_H}{H - h}$  为常数。令  $\eta = K_h - C(z - h)$ , 置  $W^* = W - W_g$ , 则方程(4)可化为:

$$\frac{d^2 W^*}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{dW^*}{d\eta} - \frac{ifW^*}{C^2 \eta} = 0 \quad (10)$$

(10)式可用柱函数解出<sup>[5]</sup>:

$$W^* = C_1 H_0^{(1)} \left( \frac{2}{C} \sqrt{f[K_h - C(z - h)]} e^{\frac{3\pi i}{4}} \right) + C_2 H_0^{(2)} \left( \frac{2}{C} \sqrt{f[K_h - C(z - h)]} e^{\frac{3\pi i}{4}} \right) \quad (11)$$

此处  $H_0^{(1)}, H_0^{(2)}$  为第一, 二类零阶 Hankel 函数,  $C_1, C_2$  为任意常数。(11) 式代表风矢端迹为螺旋线, 其形状与  $K$  分布有关。(11) 式的边条件是:

$$W^* = 0 \quad \text{当 } \eta = K_H \quad (12)$$

$$W^* = \frac{u_*}{k} \ln \frac{h}{z_0} - W_g \quad \text{当 } \eta = K_h \quad (13)$$

由边界条件定得:

$$C_1 = -\frac{H_0^{(2)}(H) \left( \frac{u_*}{k} \ln \frac{h}{z_0} - W_g \right)}{P}, \quad C_2 = \frac{H_0^{(1)}(H) \left( \frac{u_*}{k} \ln \frac{h}{z_0} - W_g \right)}{P} \quad (14)$$

$$P = H_0^{(1)}(H) H_0^{(2)}(h) - H_0^{(2)}(h) H_0^{(1)}(H) \quad (15)$$

$H_0^{(1)}(H)$  为  $H_0^{(1)}$  的宗量中的  $z$  取  $H$  时的值,  $H_0^{(2)}$  仿此,  $H_0^{(1)}(h)$  等亦类似定义。故 PBL 风解由 (6) 及 (11) 式定。现在  $u_*$  未知, 又因实轴方向尚未定出,  $W_e$  的方向或  $\alpha$  角尚未知, 需另一条件来定  $u_*$  及  $\alpha$ , 取  $z=h$  处切应力即  $\frac{\partial W}{\partial z}$  连续, 经大量计算得:

$$\sin\alpha = \frac{u_* \sqrt{\frac{K_A}{f}} (\text{Im}A - \text{Re}A)}{\sqrt{2G(\text{Re}^2A + \text{Im}^2A)}} \quad (16)$$

$$u_* = \frac{\sqrt{2G} \cos\alpha \text{Re}A + \sqrt{2G} \sin\alpha \text{Im}A - \frac{u_*}{k} \ln \frac{h}{z_0} \text{Re}A}{\frac{1}{kh} \sqrt{\frac{K_A}{f}}} \quad (17)$$

$$A = \frac{H_0^{(1)}(H)H_1^{(2)}(h) - H_0^{(2)}(H)H_1^{(1)}(h)}{P} \quad (18)$$

(16)、(17) 式中  $A$  及  $K_A$  为  $u_*$  的函数, 用逐步近似法求解。可见  $u_*$  及  $\alpha$  是  $G, f, z_0$  的函数, 这符合近代 PBL 理论, 而比经典 Ekman 解合理得多。

将 (6) 式及 (11) 式求出的  $W (W = W^* + W_e)$  在  $Z$  坐标中对水平坐标微分, 考虑到  $z_*$ ,  $W_e, u_*$  的水平变化, 可求得散度在大地形存在时的表达式。其中  $\frac{\partial u_*}{\partial x} = \frac{\partial u_*}{\partial G} \frac{\partial G}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u_*}{\partial G}$  可由  $\frac{\Delta u_*}{\Delta G}$  来逼近。  $\frac{\partial G}{\partial x}$  可由给定的地转风分布求出, 经计算, 相应于  $W_e$  水平变化的散度是 (Ekman 层):

$$(\nabla \cdot \mathbf{V})_{z_*} = -\xi_e \text{Im} \left[ \frac{Q(z)}{P} \right] \quad (19)$$

$$Q = H_0^{(2)}(H)H_1^{(1)}(z) - H_0^{(1)}(H)H_1^{(2)}(z) \quad (20)$$

即与地转涡度  $\xi_e$  成正比, 与经典结果一致, 但更细致。相应于  $u_*$  变化部分的散度是 (Ekman 层):

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{V})_{z_*} = & \frac{\partial u_*}{\partial G} \frac{\partial G}{\partial x} \left[ u_e \text{Re} \left( \frac{R(z)}{P} - \frac{Q(z)S}{P^2} \right) - v_e \text{Im} \left( \frac{R(z)}{P} - \frac{Q(z)S}{P^2} \right) + \frac{1}{k} \ln \frac{h}{z_0} \text{Re} \frac{T(z)}{P} \right. \\ & \left. - \frac{u_*}{k} \ln \frac{h}{z_0} \text{Re} \left( \frac{R(z)}{P} + \frac{T(z)S}{P^2} \right) \right] + \frac{\partial u_*}{\partial G} \frac{\partial G}{\partial y} \left[ u_e \text{Im} \left( \frac{R(z)}{P} - \frac{Q(z)S}{P^2} \right) + v_e \left( \frac{R(z)}{P} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{Q(z)S}{P^2} \right) + \frac{1}{k} \ln \frac{h}{z_0} \text{Im} \left( \frac{T(z)}{P} \right) - \frac{u_*}{k} \ln \frac{h}{z_0} \text{Im} \left( \frac{R(z)}{P} - \frac{T(z)S}{P^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (21)$$

其中

$$\begin{aligned} R(z) = & [H_0^{(1)}(H)H_1^{(2)}(z) - H_0^{(2)}(H)H_1^{(1)}(z)] \left[ \frac{\sqrt{f}}{C} e^{\frac{3\pi i}{4}} \frac{kh(1-\nu)}{\sqrt{ku_*h - C(z-h)}} \right. \\ & \left. - \frac{2\sqrt{f} e^{\frac{3\pi i}{4}} \sqrt{ku_*h - C(z-h)}}{C^2} \frac{kh}{H-h} \right] \\ \nu = & \frac{z-h}{H-h} \end{aligned}$$

$$S = [H_0^{(2)}(H)H_1^{(1)}(h) - H_0^{(1)}(H)H_1^{(2)}(h)] \left[ \frac{\sqrt{f}}{C} e^{\frac{3\pi i}{4}} \sqrt{\frac{kh}{u_*}} \right]$$

$$-\frac{2\sqrt{f}}{C^2} e^{\frac{3\pi i}{4}} \sqrt{ku_* h} \frac{kh}{H-h} \Big] \\ T(z) = H_0^{(1)}(H)H_0^{(2)}(z) - H_0^{(2)}(H)H_0^{(1)}(z)$$

相应于地形  $z_h$  水平变化的 Ekman 层中的散度是:

$$(\nabla \cdot \mathbf{V})_e = \left( \operatorname{Re} \frac{U(z)}{P} \right) \mathbf{V}_e \cdot \nabla z_h + \operatorname{Im} \left( \frac{U(z)}{P} \right) (\mathbf{V}_e \times \nabla z_h)_z \\ - \frac{u_* \ln \frac{h}{z_0}}{k} \left[ \operatorname{Re} \frac{U(z)}{P} \frac{\partial z_h}{\partial x} + \operatorname{Im} \frac{U(z)}{P} \frac{\partial z_h}{\partial y} \right] \quad (22)$$

下标  $z$  表示矢量在  $z$  方向分量值, 而

$$U(z) = [H_0^{(1)}(H)H_1^{(2)}(z) - H_0^{(2)}(H)H_1^{(1)}(z)] \frac{\sqrt{f} e^{\frac{3\pi i}{4}}}{\sqrt{ku_* h} - C(z-h)}$$

Ekman 层中总散度是上述三者之和。

不难由(6)式求近地层中由于  $u_*$  及  $z_h$  变化引起的散度<sup>1)</sup> (其中  $x', y'$  为地转风方向为  $x'$  轴的坐标系):

$$(\nabla \cdot \mathbf{V})_e = \frac{1}{k} \frac{\partial u_*}{\partial x'} \ln \frac{z}{z_0} \cos \alpha - \frac{u_*}{k} \ln \frac{z}{z_0} \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x'} + \frac{1}{k} \frac{\partial u_*}{\partial y'} \ln \frac{z}{z_0} \sin \alpha \\ + \frac{u_* \ln \frac{z}{z_0}}{k} \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial y'} - \frac{u_*}{k} \frac{1}{z} \frac{\partial z_h}{\partial x} \quad (23)$$

散度求出后, 不难求出垂直速度场, 为节省篇幅, 此处  $w$  的表达式从略。显然它也由上述同样的三部分组成。在 PBL 顶处的  $w$ , 其中地形引起的部分可证明等于  $\mathbf{V}_e \cdot \nabla z_h$ , 即地转风爬坡的分量。这是零级近似的结果, 在一级近似中此结论即改变, 由地转风引起的边界层顶垂直速度仍与  $\zeta_e$  成正比, 只是因考虑了微结构, 数值上应更精确些。而  $u_*$  变化引起的部分是经典理论没有的。

### 三、一级近似边界层风场

按引言所述, 定常时一级近似 Ekman 层方程是:

$$\frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial u}{\partial z} + f(v - v_e) = u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial u_0}{\partial z} \quad (24)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial v}{\partial z} - f(u - u_e) = u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial v_0}{\partial z} \quad (25)$$

下标 0 表零级近似, 上面已得。由(24)、(25)式确定的一级近似风场能体现地转风水平非均匀及地形带来的影响, 因其影响了方程的右端。(24)、(25)式可改写成:

$$\frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial W}{\partial z} - if(W - W_e) = u_0 \frac{\partial W_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial W_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial W_0}{\partial z} \quad (26)$$

(26)式的上边界条件是<sup>[3]</sup>:

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -f \mathbf{k} \times (\mathbf{V} - \mathbf{V}_e) \quad (27)$$

按文献[3], (27)式左端可由零级近似风在边界层顶处的值代替, 即,

1) 此处  $\frac{\partial u_*}{\partial x'} = \frac{\partial u_*}{\partial G} \frac{\partial G}{\partial x'}$ ,  $\frac{\partial \alpha}{\partial x'} = \frac{\partial \alpha}{\partial G} \frac{\partial G}{\partial x'}$ ;  $\frac{\partial u_*}{\partial G}$ ,  $\frac{\partial \alpha}{\partial G}$  由差分来逼近。

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_e + \frac{1}{f} \mathbf{k} \times (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla) \mathbf{V}_0 \quad \text{当 } z = H \quad (28)$$

(26)式下界条件仍是:

$$W = \frac{u_*}{k} \ln \frac{h}{z_0} \quad \text{当 } z = h \quad (29)$$

我们先求(26)式当其右端为零时在条件(28)、(29)式下的解,然后再求(26)式在(29)、(28)式下的解。(28)式可写成:

$$W = W_e + N \quad \text{当 } z = H \quad (30)$$

其中复数  $N$  如下:

$$N = -\frac{1}{f} \left( u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} + w \frac{\partial v_0}{\partial z} \right) + i \frac{1}{f} \left( u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) \quad (31)$$

上面已求出当上界条件为  $W = W_e$  时无右端的方程(26)式的解(11)式(因  $W = W_e + W^*$ ),而该解的实轴为相应于该解近地层风的方向。在此坐标中,不难求出  $N$  值,设为  $N_0$  ( $\frac{\partial u_0}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial v_0}{\partial z}$  可取差分计算)。现在在解无右端的(26)式而边条件取(29)、(30)时,相应的近地层解仍是:

$$W = \frac{u_*}{k} \ln \frac{z}{z_0} \quad (32)$$

只是  $u_*$  大小已与(6)式不同,且近地层风向亦与以前不同,即实轴亦与前不同。亦即在解尚未求出时,(30)式中的  $N$  方向是未知的,但  $|N| = |N_0|$ ,  $N$  与新实轴的方向的夹角需与解同时确定。

设相应于(30)式的无右端(26)式的解已求得,其地面风向即实轴方向与地转风成角  $\beta$ ,如图1,由  $N_0$  可求  $N_0$  方向与地转风向夹

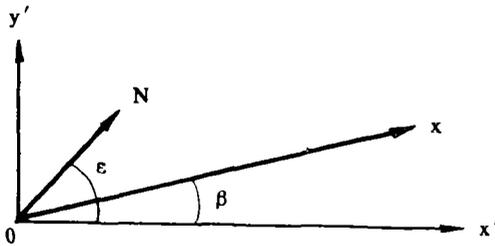


图1 坐标示意图

角  $e$ , 于是,在新坐标中,

$$N = |N_0| \cos(e - \beta) + i |N_0| \sin(e - \beta) \quad (33)$$

(30)成为:

$$W = W_e + |N_0| \cos(e - \beta) + i |N_0| \sin(e - \beta) = W_e + N \quad \text{当 } z = H \quad (34)$$

无右端的(26)式若用  $W^*$  写,则与(10)式同,而上界条件是:

$$W^* = W - W_e = N \quad (35)$$

$N$  即用(33)式,于是无右端的方程(26)式的解形式用  $W^*$  写也是(11)式,由(35)、(29)式定得  $C_1, C_2$  是

$$C_1 = \frac{H_0^{(1)}(H) \left( \frac{u_*}{k} \ln \frac{h}{z_0} - W_e \right) - N H_0^{(1)}(h)}{P} \quad (36)$$

$$C_2 = -C_1 \frac{H_0^{(2)}(H)}{H_0^{(1)}(H)} + \frac{N}{H_0^{(1)}(H)} \quad (37)$$

此处因  $u_*$  不同于前一节的结果, 故  $P$  值亦与前一节不同。  $C_1, C_2$  中  $N$  含  $\beta$ ,  $u_*$  亦未知,  $W_x$  亦需等  $\beta$  确定后才能定。由  $z=h$  处  $\frac{\partial W}{\partial z}$  连续来定  $\beta$  和  $u_*$ , 其结果是:

$$\sin\beta = \frac{2B_1D_1 - \sqrt{4B_1^2D_1^2 - 4(B_1^2 + B_2^2)(D_1^2 - B_2^2)}}{2(B_1^2 + B_2^2)} \quad (38)$$

$$u_* = \frac{G(\cos\beta \operatorname{Re}A + \sin\beta \operatorname{Im}A) - \frac{u_*}{\sqrt{2kh}} \sqrt{\frac{K_h}{f}} - \operatorname{Im}(NA_1) \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Re}(NA_1)}{\frac{1}{k} \ln \frac{h}{z_0} \operatorname{Re}A} \quad (39)$$

$A$  即(18)式, 而

$$A_1(u_*) = e^{\frac{3\pi i}{4}} \frac{H_0^{(2)}(h)H_1^{(1)}(h)H_0^{(1)}(H) - H_0^{(1)}(h)H_1^{(2)}(h)H_0^{(1)}(H)}{H_0^{(1)}(H)P}$$

$$B_1 = \sqrt{2}G(\operatorname{Re}^2A + \operatorname{Im}^2A) - (\operatorname{Im}A + \operatorname{Re}A)(-|N_0|\operatorname{cose}\operatorname{Re}A_1 + |N_0|\operatorname{sine}\operatorname{Im}A_1) - (\operatorname{Re}A - \operatorname{Im}A)(|N_0|\operatorname{sine}\operatorname{Re}A_1 + |N_0|\operatorname{cose}\operatorname{Im}A_1)$$

$$B_2 = (\operatorname{Im}A + \operatorname{Re}A)(|N_0|\operatorname{sine}\operatorname{Re}A_1 + |N_0|\operatorname{cose}\operatorname{Im}A_1) + (\operatorname{Re}A - \operatorname{Im}A)(|N_0|\operatorname{cose}\operatorname{Re}A_1 - |N_0|\operatorname{sine}\operatorname{Im}A_1)$$

$$D_1 = \frac{u_*}{kh} \sqrt{\frac{K_h}{f}} (\operatorname{Im}A - \operatorname{Re}A)$$

由(39)、(38)式求出  $u_*, \beta$  后, 实轴方向定出, Ekman 层及近地层解均解出。

再求方程(26)式在(29)、(30)式下的解。我们在无右端的方程(26)式满足(29)、(30)式得出的近地层风向为实轴的坐标—— $\beta$ 坐标中求解。此坐标中实轴与地转风成角  $\beta$ 。称零级近似解中用的坐标为  $\alpha$  坐标, 其中实轴与地转风成角  $\alpha$ 。(26)式右端在  $\alpha$  坐标中易算出, 设为  $\xi$ , 则在  $\beta$  坐标中为  $\xi e^{i(\alpha-\beta)}$ , 为已知。

(26)式用  $W^*$  写出, 为:

$$\frac{\partial^2 W^*}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial W^*}{\partial \eta} - \frac{ifW^*}{C^2\eta} = \frac{\Phi}{C^2\eta} \quad (40)$$

$\Phi = \xi e^{i(\alpha-\beta)}$ , (40)式的上界条件为(35)式, 与(40)式相应的齐次方程的解我们已求出为(11)、(36)、(37)式, 故(40)式的解用常数变易法即可求得, 即设  $C_1, C_2$  为  $\eta(z)$  的函数, 然后得  $C_1, C_2$  的方程, 从而得:

$$\begin{cases} \frac{dC_2}{dz} = \frac{-H_0^{(1)}(z)\Phi}{\sqrt{f[K_h - C(z-h)]} e^{\frac{3\pi i}{4}} [H_1^{(1)}(z)H_0^{(2)}(z) - H_0^{(1)}(z)H_1^{(2)}(z)]}; \\ \frac{dC_1}{dz} = \frac{-H_0^{(2)}(z)}{H_0^{(1)}(z)} \frac{dC_2}{dz} \end{cases} \quad (41)$$

由此,

$$\begin{cases} C_2(z) = \int \frac{dC_2}{dz} dz + C_4 = F_2(z) + C_4, \\ C_1(z) = \int \frac{dC_1}{dz} dz + C_3 = F_1(z) + C_3 \end{cases} \quad (42)$$

$C_3, C_4$  为常数, 现在(40)式解为:

$$W^* = (F_1(z) + C_3)H_0^{(1)}(z) + (F_2(z) + C_4)H_0^{(2)}(z) \quad (43)$$

由条件(35)式,

$$N = F_1(H) + C_3 H_0^{(1)}(H) + (F_2(H) + C_4) H_0^{(2)}(H) \quad (44)$$

在 $\beta$ 坐标中 $N$ 是已知的,由于方程(40)式不同于无右端的(26)式,故与(40)式相应的近地层风向不与 $\beta$ 坐标中的实轴相合,而是与 $\beta$ 坐标的实轴有夹角 $\delta$ (设对 $\beta$ 坐标实轴右偏 $\delta$ 角),此时在 $\beta$ 坐标中与(40)式相应的近地层解是:

$$W = \frac{u_*}{k} \ln \frac{z}{z_0} e^{-i\delta} \quad (45)$$

$u_*$ 与 $\delta$ 待定。由 $z=h$ 处风连续,由(43)、(45)式得:

$$\frac{u_*}{k} \ln \frac{h}{z_0} e^{-i\delta} - W_* = [F_1(h) + C_3] H_0^{(1)}(h) + [F_2(h) + C_4] H_0^{(2)}(h) \quad (46)$$

由(44)、(46)式求 $C_3, C_4$ ,代回(43)式,最后得:

$$\begin{aligned} W = & W_* + H_0^{(1)}(z) \left[ \int_h^z \frac{dC_1}{dz} dz + \right. \\ & \left. - H_0^{(2)}(h) H_0^{(2)}(H) \int_h^H \frac{dC_2}{dz} dz - H_0^{(1)}(H) H_0^{(1)}(h) \int_h^H \frac{dC_1}{dz} dz + \left( W_* - \frac{u_*}{k} \ln \frac{h}{z_0} e^{-i\delta} \right) H_0^{(1)}(H) + N H_0^{(1)} \right] \\ & + H_0^{(2)}(z) \left[ \int_h^z \frac{dC_2}{dz} dz + \right. \\ & \left. H_0^{(1)}(H) H_0^{(1)}(h) \int_h^H \frac{dC_1}{dz} dz + H_0^{(2)}(H) H_0^{(2)}(h) \int_h^H \frac{dC_2}{dz} dz - \left( W_* - \frac{u_*}{k} \ln \frac{h}{z_0} e^{-i\delta} \right) H_0^{(2)}(H) - N H_0^{(2)}(h) \right] \end{aligned} \quad (47)$$

(47)式即是(26)式在条件(30)式及下边界条件 $W = \frac{u_*}{k} \ln \frac{h}{z_0} e^{-i\delta}$ 下的解,其中积分需数值计算。再用 $z=h$ 处 $\frac{\partial W}{\partial z}$ 连续可得如下的迭代式以求 $u_*$ 及 $\delta$ :

$$\sin \delta = \frac{u_* (\text{Im} B_1 \text{Re} B_2 - \text{Im} B_2 \text{Re} B_1) - \frac{u_*}{k} \frac{1}{h} \text{Im} B}{|B|^2} \quad (48)$$

$$u_* = \frac{-\frac{u_*}{k} + \text{Re} B \cos \delta - \text{Im} B \sin \delta}{\text{Re} B_1} \quad (49)$$

其中 $B_1, B_2$ 为复杂的关系式,为节省篇幅,不再列出。至此,一级近似解全部解出。

图2为 $G=10\text{m/s}, f=10^{-4}\text{s}^{-1}, z_0=0.1\text{m}, -\frac{\partial u'_x}{\partial y'} = \zeta_x = \pm 3 \times 10^{-5}\text{s}^{-1}$ ,不计地形,也不计其他因素引起的垂直平流,即(26)式右端只计水平平流时得到的边界风层螺旋<sup>2)</sup>(在 $x', y'$ 坐标中),显见, $\zeta_x > 0$ 时,地转风与地面风夹角变小,而风速随高度增加的速率略快些, $\zeta_x < 0$ 则反之。可解释如下,据计算, $\zeta_x > 0$ 时,(26)式右端水平平流项实、虚部均负,即(24)、(25)式中右端水平平流项为负,相当于使(24)式中 $v'_e$ 变小,(25)式中 $u'_e$ 变大,

1) 带撇号的量表示在以地转风矢为 $x'$ 轴的坐标中的量。  
2) 下面对方程(24)–(26)的讨论均在 $x', y'$ 坐标中进行。

而使得边界层内部  $u'$  变大,  $v'$  变小, 从而出现图示特征。  $\xi_s < 0$  时亦可类似解释。文献[6]用地转动量近似处理方程中平流项, 用该文中的方法亦可推断出在  $\partial u'_s / \partial y' \geq 0$  时, 边界层风特征也应具有图 2 的形状。图 3 是考虑地形及各种因子引起的垂直速度后对边界层风螺旋的影响, 可见由于铅直平流的存在, 改变了仅有水平平流时的结果, 但  $\xi_s \geq 0$  时的差别仍然保持。总之, 一级近似解考虑因子多, 更实际一些。

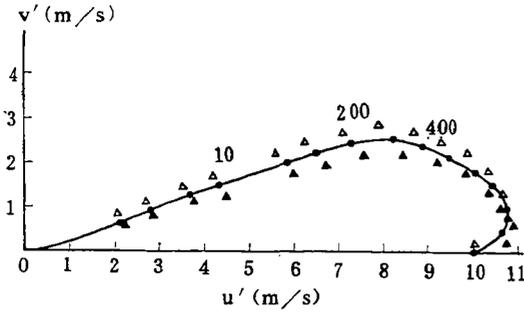


图 2 一级近似边界层风螺旋, 不计地形及垂直速度  
(实线及  $\cdot$  为零级近似, 横轴沿地转风向,  $\blacktriangle \xi_s > 0, \triangle \xi_s < 0$ , 数字表示高度)

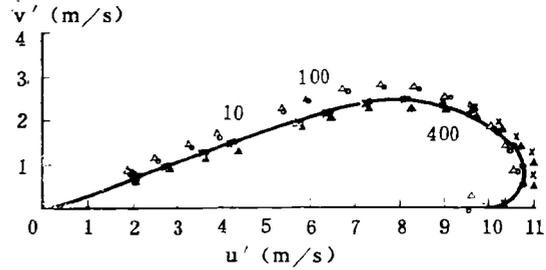


图 3 一级近似边界层风螺旋  
(实线及  $\cdot$  为零级近似;  $\blacktriangle \xi_s > 0, \partial z_s / \partial x < 0; \times \xi_s > 0, \partial z_s / \partial x > 0; \Delta \xi_s < 0, \partial z_s / \partial x > 0; \circ \xi_s < 0, \partial z_s / \partial x < 0$ ;

$\frac{\partial z_s}{\partial x} > 0; \Delta \xi_s < 0, \partial z_s / \partial x > 0; \circ \xi_s < 0, \partial z_s / \partial x < 0$ ;

$\xi_s$  值同图 2,  $\frac{\partial z_s}{\partial x} = \pm 10^{-3}$ )

#### 四、散度场特征

我们在第二节已求出零级近似的散度, 具体计算表明, 在天气尺度地形条件下, 散度主要由地转涡度项及地形项造成, 由  $u_*$  引起的部分比之小得多(图例见下)。现在一级近似风解求得后, 可求一级近似下的散度和垂直速度。做法同第二节, 只是略去了  $u_*$  水平变化引起的部分, 由(47)式求  $\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}$ , 得散度(Ekman层)有

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} = & \frac{\partial W_s}{\partial x} - H_1^{(1)}(z) \frac{\sqrt{f} e^{\frac{3\pi i}{4}}}{\sqrt{K_h - C(z-h)}} \frac{\partial z_h}{\partial x} \left[ \int_h^* \frac{dC_1}{dz} dz - \frac{H_0^{(2)}(h)H_0^{(2)}(H)}{P} \right. \\ & \left. \int_h^H \frac{dC_2}{dz} dz - \frac{H_0^{(1)}(H)H_0^{(2)}(h)}{P} \int_h^H \frac{dC_1}{dz} dz + \right. \\ & \left. \frac{\left( W_s - \frac{u_* h}{k} \ln \frac{h}{z_0} e^{-i\delta} \right) H_0^{(2)}(H) + N H_0^{(2)}(h)}{P} \right] + H_0^{(1)}(z) \left[ \frac{\partial}{\partial x} \int_h^* \frac{dC_1}{dz} dz - \right. \\ & \left. \frac{H_0^{(2)}(H)H_0^{(2)}(h)}{P} \frac{\partial}{\partial x} \int_h^H \frac{dC_2}{dz} dz - \frac{H_0^{(1)}(h)H_0^{(2)}(h)}{P} \frac{\partial}{\partial x} \int_h^H \frac{dC_1}{dz} dz + \right. \\ & \left. \frac{H_0^{(2)}(H)}{P} \frac{\partial W_s}{\partial x} \right] - H_1^{(2)}(z) \frac{\sqrt{f} e^{\frac{3\pi i}{4}}}{\sqrt{K_h - C(z-h)}} \frac{\partial z_h}{\partial x} \left[ \int_h^* \frac{dC_1}{dz} dz \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{H_0^{(1)}(H)H_0^{(1)}(h)}{P} \int_a^H \frac{dC_1}{dz} dz + \frac{H_0^{(2)}(H)H_0^{(1)}(h)}{P} \int_a^H \frac{dC_2}{dz} dz - \\
& \left[ \frac{W_s - \frac{u_*}{k} \ln \frac{h}{z_0} e^{-is}}{P} H_0^{(1)}(H) + H_0^{(1)}(h)N \right] + H_0^{(2)}(z) \left[ \frac{\partial}{\partial x} \right. \\
& \left. \int_a^H \frac{dC_2}{dz} dz + \frac{H_0^{(1)}(H)H_0^{(1)}(h)}{P} \frac{\partial}{\partial x} \int_a^H \frac{dC_1}{dz} dz + \frac{H_0^{(2)}(H)H_0^{(1)}(h)}{P} \right. \\
& \left. \frac{\partial}{\partial x} \int_a^H \frac{dC_2}{dz} dz - \frac{H_0^{(1)}(H)}{P} \frac{\partial W_s}{\partial x} \right] \quad (50)
\end{aligned}$$

此式中根据量级分析已略去了  $NH_0(h)$  项的水平微分。作为上界条件  $N$  的影响, 已主要包含在  $H_0^{(1)}(z), H_0^{(2)}(z), \frac{dC_1}{dz}, \frac{dC_2}{dz}$  中。类似有  $\frac{\partial W}{\partial y}$ 。(50) 式中有二项如下算:

$$\begin{aligned}
& H_0^{(1)}(z) \frac{\partial}{\partial x} \int_a^H \frac{dC_1}{dz} dz + H_0^{(2)}(z) \frac{\partial}{\partial x} \int_a^H \frac{dC_2}{dz} dz \\
& = H_0^{(1)}(z) \left[ \int_a^H \frac{\partial}{\partial x} \frac{dC_1}{dz} dz - \frac{\partial z_a}{\partial x} \frac{dC_1}{dz} \Big|_a \right] + H_0^{(2)}(z) \left[ \int_a^H \frac{\partial}{\partial x} \right. \\
& \quad \left. \frac{dC_2}{dz} dz - \frac{\partial z_a}{\partial x} \frac{dC_2}{dz} \Big|_a \right]
\end{aligned}$$

(50) 式中  $\frac{\partial}{\partial x} \int_a^H \frac{dC_1}{dz} dz$  和  $\frac{\partial}{\partial x} \int_a^H \frac{dC_2}{dz} dz$  可写成  $\int_a^H \frac{\partial}{\partial x} \frac{dC_1}{dz}$  和  $\int_a^H \frac{\partial}{\partial x} \frac{dC_2}{dz}$ , 由(41)式计算被积函数。因(41)式右端  $\Phi$  含有(26)式的右端, 于是这二个积分的被积函数中包含了零级近似风速, 其一二阶导数及其乘积, 这些一二阶导数可由零级近似推求, 此处不再写出。散度计算中的各定积分均数值计算。

现在看影响一级散度的因子。由  $\frac{\partial W}{\partial x}$  及  $\frac{\partial W}{\partial y}$ , 可发现由地转风的水平变化引起的贡献:

$$(\nabla \cdot \mathbf{V})_{1e} = -\text{Im} \left( \frac{Q}{P} \right) \xi_e \quad (51)$$

$Q_1$  形式同  $Q$ , 只是因  $u_*$  不同, 使 Hankel 函数宗量不同, 故这部分贡献与零级近似不同。也不难找出与地形明显有关即含  $\frac{\partial z_a}{\partial x}$  及  $\frac{\partial z_a}{\partial y}$  项的贡献:

$$\begin{aligned}
(\nabla \cdot \mathbf{V})_{2e} = & \frac{\partial z_a}{\partial x} \text{Re} \left[ \frac{\sqrt{f} e^{\frac{3\pi i}{4}}}{\sqrt{K_1 - C(z-h)}} \left( -H_1^{(1)}(z)R_1 - H_1^{(2)}(z)R_2 \right) - H_0^{(1)}(z) \frac{dC_1}{dz} \Big|_a - H_0^{(2)}(z) \right. \\
& \left. \frac{dC_2}{dz} \Big|_a \right] + \frac{\partial z_a}{\partial y} \text{Im} \left[ \frac{\sqrt{f} e^{\frac{3\pi i}{4}}}{\sqrt{K_1 - C(z-h)}} \left( -H_1^{(1)}(z)R_1 - H_1^{(2)}(z)R_2 \right) - H_0^{(1)}(z) \frac{dC_1}{dz} \Big|_a - H_0^{(2)}(z) \frac{dC_2}{dz} \Big|_a \right] \quad (52)
\end{aligned}$$

其中  $R_1, R_2$  分别为(50)式中第一及第三个方括号中的表达式。

现在散度中还有几项, 我们且记以  $(\nabla \cdot \mathbf{V})_{2e}$

$$\begin{aligned}
(\nabla \cdot \mathbf{V})_{2e} = & \text{Re} \left[ \frac{H_0^{(2)}(z)H_0^{(2)}(H)H_0^{(1)}(h) - H_0^{(1)}(z)H_0^{(2)}(H)H_0^{(2)}(h)}{P} \right. \\
& \frac{\partial}{\partial x} \int_a^H \frac{dC_2}{dz} dz + H_0^{(1)}(z) \int_a^H \frac{\partial}{\partial x} \frac{dC_1}{dz} dz + H_0^{(2)}(z) \int_a^H \frac{\partial}{\partial x} \frac{dC_2}{dz} dz \\
& \left. + \frac{H_0^{(2)}(z)H_0^{(1)}(H)H_0^{(1)}(h) - H_0^{(1)}(z)H_0^{(1)}(H)H_0^{(2)}(h)}{P} \frac{\partial}{\partial x} \int_a^H \frac{dC_1}{dz} \right]
\end{aligned}$$

$$dz] + \text{Im} \left[ H_0^{(1)}(z) \int_k^* \frac{\partial}{\partial y} \frac{dC_1}{dz} dz + H_0^{(2)}(z) \int_k^* \frac{\partial}{\partial y} \frac{dC_2}{dz} dz \right. \\ \left. + \frac{H_0^{(2)}(z)H_0^{(2)}(H)H_0^{(1)}(h) - H_0^{(1)}(z)H_0^{(2)}(H)H_0^{(2)}(h)}{P} \right. \\ \left. \frac{\partial}{\partial y} \int_k^* \frac{dC_2}{dz} dz + \frac{H_0^{(2)}(z)H_0^{(1)}(H)H_0^{(1)}(h) - H_0^{(1)}(z)H_0^{(1)}(H)H_0^{(2)}(h)}{P} \right. \\ \left. \frac{\partial}{\partial y} \int_k^* \frac{dC_1}{dz} dz \right] \quad (53)$$

前已述  $\int_k^* \frac{dC_1}{dz} dz$  等积分中含许多项, 从这些项可见  $(\nabla \cdot \mathbf{V})_{2e}$  中有的的是由地转风水平变化引起的。有的是地形产生的, 也有此二因素互相作用交叉在一起形成的。因此对一级近似散度言, 不象零级那样可将地转风部分及地形部分简单分开。现在地转风变化部分及地形影响部分除有各自分开的部分外, 还有互相作用的部分, 这是零级和一级的明显区别。在实际情况, 由于不同气压场, 地形有不同的气流分布及垂直速度, 也造成各不相同的速度的一二阶导数, 故规律性非常复杂,

很难找出简单的规律。现举例计算, 取  $G=10\text{m/s}$ ,  $f=10^{-4}\text{s}^{-1}$ ,  $z_0=0.1\text{m}$ ,

$$\frac{\partial u'_x}{\partial y} = -3 \times 10^{-5}\text{s}^{-1} \text{ 即 } \xi_g = 3 \times 10^{-5}\text{s}^{-1}$$

$$\frac{\partial z_h}{\partial x} = -10^{-3}, \text{ 则零级近似由地转风}$$

及  $u_x$  水平变化共同引起的, 地形引起的, 总零级近似散度及一级近似总散度示于图 4 中。一级近似总散度即三部分之和。可见对零级言, 地转风及  $u_x$  引起的部分是负散度, 这主要是由于  $\xi_g > 0$  造成; 地形引起的是正散度, 这由于地形是降低的。零级总和

在下半为正上半为负。而一级近似则使下部的正散度变大, 上半的负散度变小。于是造成边界层顶垂直速度亦有不同。在零级, 为  $-0.0022\text{m/s}$ , 一级为  $-0.0027\text{m/s}$ 。当然, 这仅是个例。

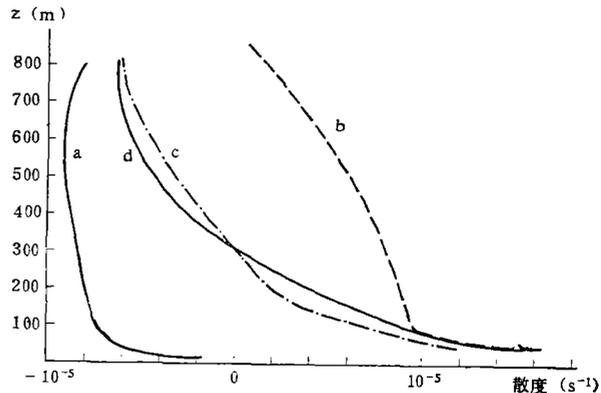


图 4 边界层中散度场的高度分布曲线  
(a 为零级近似由地转风及  $u_x$  引起的总和, b 为零级近似由地形引起, c 为零级近似总和, d 为一级近似)

## 五、结 语

本文用逐步近似法处理边界层运动方程中的非线性项, 求出了在大地形存在时边界层一级近似风场、散度场以及边界层顶垂直速度, 改进了前人用水平均匀 PBL 方程处理非均匀问题的结果。所得结果与零级的差别可以用平流项的影响来解释, 结果比零级近似更合理, 一级近似散度场不仅含有地转风空间变化及地形引起的各自的成份, 也含有二者相互作用引起的部分。再加上本文用了近代 PBL 模式关于  $K$  的处理, 因而方法的结果应比经典结果更可靠些, 有助于地形对大气运动影响的深入研究。用本文方法同样可得

到边界层的涡度场,此处不再赘述。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Pedlosky, J., *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, 168, 1979.
- [ 2 ] Charney, J. G., and A. Elissen, A numerical method for predicting the perturbation of the middle-latitude westerlies, *Tellus*, 1, 38—54, 1949.
- [ 3 ] Панчев, С., и Д. Атанасов, Некоторые нелинейные эффекты в ППС над горами, *Българско Геофизично списание*, 5, 19—24, 1979.
- [ 4 ] Estoque, M. A., Numerical modelling of the PBL, in workshop on micrometeorology, Amer. Meteor. Soc., 217—270, 1973.
- [ 5 ] Watson, G. N., *A treatise on the theory of Bessel function*, Cambridge Univ. Press, 97, 1952.
- [ 6 ] Zhao, M., A numerical experiment of the PBL with geostrophic momentum approximation, *Adv. Atmos. Sci.*, 5, 47—56, 1988.

## A DYNAMICAL STUDY OF THE FLOW FIELD IN THE PBL OVER LARGE- SCALE TOPOGRAPHY

Zhao Ming

(Department of Atmospheric Sciences, Nanjing University)

### Abstract

In this paper, the eddy coefficient and the treatment for dividing layers of Estoque's numerical model in modern PBL dynamics have been applied to derive the zero order and first order analytic solutions of the steady PBL equation over large-scale topography, the solutions are used to obtain the divergence and the vertical velocity, improving the previous results.