第48卷 第3期 气 象 学 报 Vol. 48, No. 3
1990年8月 ACTA METEOROLOGICA SINICA Aug.,1990

旋转正压大气中的非线性Schrödinger方程和大气阻塞*

罗 德 海*

(中国科学院大气物理研究所)

提 要

本文利用WKB方法导出了旋转正压大气中的非线性Rossby波所满足的立方Schrödinger方程，指出在$1\leqslant m\leqslant 2$的情况下，非线性Schrödinger方程具有包络孤立波解，同时我们还对大气中的包络Rossby孤立波的流场进行了计算，结果得到了阻塞高压和切断低压等结构，并且这些阻塞系统能够维持五天以上。

一、引 言

随着大气科学的发展，人们对大气中的非线性现象越来越重视，目前已成为一个很重要的研究课题，过去人们对行星大气中的许多特殊的天气系统如阻塞高压和切断低压一般都采用KdV方程的孤立波来描述，例如巢纪平[1]等人研究了旋转正压大气中的椭圆余弦波，认为阻塞高压和切断低压等属于孤立波系统，作者[1]曾从KdV方程出发证明了超长波具有凸孤立波的性质，从而说明了在大气中可以形成凸孤立波(如阻塞高压等)，在这里作者认为对大气中的阻塞系统用长波近似方法来处理，并不十分合理，本文采用有限波长的近似方法即多重尺度方法(相当于WKB方法)得到了旋转正压大气中的非线性扰动所满足的非线性Schrödinger方程，并深入讨论了包络Rossby孤立波的动力学特征，同时认为用非线性Schrödinger方程来描述大气中的阻塞系统是十分合理的。

二、非线性Schrödinger方程

按文献[1]，旋转正压大气中的位涡守恒方程为：

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial r}\right)\right]\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\right]+\frac{\beta}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=0 \tag{1}$$

其中$\beta=-\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{2\omega}{a}\cos\phi_0$，$\omega$为地球的自转角速度，$a$为地球的半径，$\phi_0$为纬度，其他符号的说明见文献[1]。

在大气中，由于大气波动存在多时空尺度特征，因而我们可引入下列缓变坐标

$$\tau=\varepsilon t, T=\varepsilon^2 t, X=\varepsilon\theta, \xi=\varepsilon^2\theta \tag{2}$$

其中τ, T, X, ξ为缓变量，ε为小参数，于是我们可作下列变换

* 本文于1986年12月23日收到，1988年11月16日收到最后修改稿。作者现在成都气象学院气象研究所工作。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}\to\dfrac{\partial}{\partial t}+\varepsilon\dfrac{\partial}{\partial\tau}+\varepsilon^2\dfrac{\partial}{\partial T}\\ \dfrac{\partial}{\partial\theta}\to\dfrac{\partial}{\partial\theta}+\varepsilon\dfrac{\partial}{\partial X}+\varepsilon^2\dfrac{\partial}{\partial\xi}\end{cases}\tag{3}$$

由此可把方程(1)写成

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial X}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\right.\\&\left.-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial X}+\varepsilon^2\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)\frac{\partial}{\partial r}\right]\left[\nabla^2\psi+\frac{2\varepsilon}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial X}+\frac{\varepsilon^2}{r^2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial X^2}+2\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\theta}\right)\right.\\&\left.+\frac{2\varepsilon^3}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial X\partial\xi}+\frac{\varepsilon^4}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}\right]+\frac{\beta}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial X}+\varepsilon^2\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)=0\end{aligned}\tag{4}$$

其中$\nabla^2=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}$

将 ψ 按 WKB 方法展开，即：

$$\psi=\psi_0(r)+\varepsilon\psi_1(r,\theta,t,X,\xi,\tau,T)+\varepsilon^2\psi_2+\varepsilon^3\psi_3+\cdots\tag{5}$$

其中 $\psi_n(n=1,2\cdots)$均为 $r,t,\theta,X,\xi.\tau.T$ 的函数，令 $\psi_0(r)$满足：

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi_0}{\partial r}\right)\right]=0\tag{6}$$

于是将(5)式代入方程(4)式有

$$0(\varepsilon^1):\ L(\psi_1)=0\tag{7}$$

其中 $L(\quad)=\left\{\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi_0}{\partial r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)\nabla^2+\dfrac{\beta}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right\}$

$$\begin{aligned}0(\varepsilon^2):\ L(\psi_2)=&-\left\{\frac{\partial}{\partial\tau}\nabla^2\psi_1+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_0}{\partial r}\left[\frac{\partial}{\partial X}\nabla^2\psi_1+\frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\theta\partial X}\right)\right]+\frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\theta\partial X}\right)\right.\\&\left.+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta}\nabla^2\psi_1-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2\psi_1+\frac{\beta}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial X}\right\}\end{aligned}\tag{8}$$

$$\begin{aligned}0(\varepsilon^3):\ L(\psi_3)=&-\left\{\frac{\partial}{\partial T}\nabla^2\psi_1+\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\nabla^2\psi_2+\frac{2}{r^2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\theta\partial X}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\theta\partial X}+2\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\theta\partial\xi}\right)\right.\\&+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_0}{\partial r}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\nabla^2\psi_1+\frac{\partial}{\partial X}\left(\nabla^2\psi_2+\frac{2}{r^2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\theta\partial X}\right)\right.\\&\left.+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\theta\partial X}+2\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\theta\partial\xi}\right)\right]+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial r}\left[\frac{\partial}{\partial X}\nabla^2\psi_1\right.\\&\left.+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\nabla^2\psi_2+\frac{2}{r^2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\theta\partial X}\right)\right]+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_2}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta}\nabla^2\psi_1\\&-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2\psi_1\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial\theta}+\frac{\partial\psi_1}{\partial X}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\nabla^2\psi_2+\frac{2}{r^2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\theta\partial X}\right)\\&\left.+\frac{\beta}{r}\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial X}+\frac{\partial\psi_1}{\partial\xi}\right)\right\}\end{aligned}\tag{9}$$

其边界条件为

$$r=r_1,r_2\text{ 时},\qquad \psi_1=\psi_2=\psi_3=\cdots=0\tag{10}$$

对于(6)式可设

$$\psi_0(r)=\frac{1}{2}\Omega r^2\tag{11}$$

其中Ω为常数，它相当于旋转正压大气中的基本气流的角速度。

将(11)式代入方程(7)式有

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\Omega\frac{\partial}{\partial\theta}\right]\nabla^2\psi_1+\frac{\beta}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta}=0 \tag{12}$$

设上方程的解为：

$$\psi_1=A(\tau,T,X,\xi)\phi_1(r)e^{im(\theta-c_0t)}+cc \tag{13}$$

其中 cc 表示它前项的共轭，A 为复振幅，m 为纬向波数，c_0 为待定常数．它相当于扰动的角位相速。

再将(13)式代入方程(12)式有

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\phi_1}{dr}\right)+\left[\frac{\beta}{r(\Omega-c_0)}-\frac{m^2}{r^2}\right]\phi_1=0 \tag{14}$$

其边界条件为：

$$\phi_1(r_1)=\phi_1(r_2)=0 \tag{15}$$

将(13)式代入方程(8)式可得

$$L(\psi_2)=-\left\{\frac{\beta}{r(\Omega-c_0)}\phi_1\left(\frac{\partial A}{\partial\tau}+\Omega\frac{\partial A}{\partial X}\right)+\left[\frac{2m^2(\Omega-c_0)}{r^2}-\frac{\beta}{r}\right]\phi_1\times\frac{\partial A}{\partial X}\right\}e^{im(\theta-c_0t)}$$
$$+\frac{im\beta\phi_1^2}{r^3(\Omega-c_0)}A^2e^{2im(\theta-c_0t)}+cc \tag{16}$$

对上方程消除长期项，即(16)式右端第一项，则有

$$\frac{\partial A}{\partial\tau}+c_1\frac{\partial A}{\partial X}=0 \tag{17}$$

其中 $c_1=\dfrac{2m^2(\Omega-c_0)^2}{\beta r}+c_0$

这时方程(16)式变为：

$$L(\psi_2)=\frac{im\beta\phi_1^2}{r^3(\Omega-c_0)}A^2e^{2im(\theta-c_0t)}+cc \tag{18}$$

其边界条件为：

$$\psi_2(r_1)=\psi_2(r_2)=0 \tag{19}$$

显然可设方程(18)式的解为：

$$\psi_2=B(X,\xi,\tau,T)\phi_2(r)e^{2im(\theta-c_0t)}+cc \tag{20}$$

于是将(20)式代入方程(18)式有

$$BL_{2m}(\phi_2)=\frac{im\beta\phi_1^2}{r^3(\Omega-c_0)}A^2 \tag{21}$$

在(21)式中，$L_m(\quad)=\left\{im(\Omega-c_0)\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right)-\frac{m^2}{r^2}\right]+im\frac{\beta}{r}\right\}$

和 $L_{2m}(\quad)=\left\{2im(\Omega-c_0)\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right)-\frac{(2m)^2}{r^2}\right]+2im\frac{\beta}{r}\right\}$

从(21)式，我们可以看出，B 与 A^2 成比例，并且 A 与 B 都为 τ、T、X，ξ 的函数，显然我们可把 B 取成如下形式

$$B=A^2 \tag{22}$$

利用边界条件，于是我们可得关于 ϕ_2 的方程

$$\begin{cases}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\phi_2}{dr}\right)-\frac{(2m)^2}{r^2}\phi_2+\frac{\beta}{r(\Omega-c_0)}\phi_2=\frac{\beta\phi_1^2}{2r^3(\Omega-c_0)^2}\\ \phi_2(r_1)=\phi_2(r_2)=0\end{cases} \tag{23}$$

将(13)和(20)式代入方程(9)式,则有

$$
\begin{aligned}
L(\psi_3)=-\Big\{&\frac{\partial A}{\partial T}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\phi_1}{dr}\right)-\frac{m^2}{r^2}\phi_1\right]+\frac{2}{r^2}im\frac{\partial^2 A}{\partial r\partial X}\phi_1-\frac{imc_0}{r^2}\phi_1\frac{\partial^2 A}{\partial X^2}\\
&+\frac{2}{r^2}m^2c_0\phi_1\frac{\partial A}{\partial\xi}+\Omega\frac{\partial A}{\partial\xi}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\phi_1}{dr}\right)-\frac{m^2}{r^2}\phi_1\right]\\
&+\frac{3\Omega}{r^2}im\phi_1\frac{\partial^2 A}{\partial X^2}-\frac{2\Omega}{r^2}m^2\phi_1\frac{\partial A}{\partial\xi}+\frac{\beta}{r}\phi_1\frac{\partial A}{\partial\xi}\\
&+\frac{1}{r}\frac{d\phi_1}{dr}2imA^*B\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\phi_2}{dr}\right)-\frac{(2m)^2}{r^2}\phi_2\right]\\
&+\frac{1}{r}\frac{d\phi_2}{dr}(-im)A^*B\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\phi_1}{dr}\right)-\frac{m^2}{r^2}\phi_1\right]\\
&-2im\frac{\phi_2}{r}A^*B\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\phi_1}{dr}\right)-\frac{m^2}{r^2}\phi_1\right]\\
&+\frac{im}{r}\phi_1\times A^*B\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\phi_2}{dr}\right)-\frac{(2m)^2}{r^2}\phi_2\right]\Big\}e^{im(\theta-c_0t)}\\
&+cc+\text{其他项}
\end{aligned}
\tag{24}
$$

其中其他项表示$e^{\pm 2im(\theta-c_0t)}$,$e^{\pm 3im(\theta-c_0t)}$等项对上方程消除长期项,并利用(14)和(23)式可得

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\beta}{r(\Omega-c_0)}\phi_1\left(\frac{\partial A}{\partial T}+\Omega\frac{\partial A}{\partial\xi}\right)+\left[-\frac{2(\Omega-c_0)}{r^2}m^2+\frac{\beta}{r}\right]\phi_1\frac{\partial A}{\partial\xi}\\
&+\frac{im}{r^2}\times\left[2\frac{\partial^2 A}{\partial r\partial X}-c_0\frac{\partial^2 A}{\partial X^2}+3\Omega\frac{\partial^2 A}{\partial X^2}\right]\phi_1+imA^*B\Big\{\frac{2}{r}\frac{d\phi_1}{dr}\times\left[\frac{\beta\phi_1^2}{2r^3(\Omega-c_0)^2}\right.\\
&\left.-\frac{\beta}{r(\Omega-c_0)}\phi_2\right]+\frac{1}{r}\frac{d\phi_2}{dr}\frac{\beta}{r(\Omega-c_0)}\phi_1-\frac{2\phi_2}{r}\frac{d}{dr}\left[-\frac{\beta}{r(\Omega-c_0)}\phi_1\right]\\
&+\frac{\phi_1}{r}\frac{d}{dr}\left[\frac{\beta\phi_1^2}{2r^3(\Omega-c_0)^2}-\frac{\beta}{r(\Omega-c_0)}\phi_2\right]\Big\}=0
\end{aligned}
\tag{25}
$$

利用(17)和(22)式可把上方程变为:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial A}{\partial T}+c_1\frac{\partial A}{\partial\xi}-im\frac{(\Omega-c_0)}{\beta r}[2(\Omega-c_1)+(\Omega-c_0)]\frac{\partial^2 A}{\partial X^2}\\
&-im|A|^2A\left[\frac{2\phi_1}{r^3(\Omega-c_0)}\frac{d\phi_1}{dr}-\frac{\phi_2}{r}-\frac{3\phi_1^2}{2r^4(\Omega-c_0)}\right]=0
\end{aligned}
\tag{26}
$$

对上方程在区间$[r_1,r_2]$上进行积分,于是可得非线性 Schrödinger 方程为:

$$
\frac{\partial A}{\partial T}+c_g\frac{\partial A}{\partial\xi}-i\lambda\frac{\partial^2 A}{\partial X^2}-i\delta|A|^2A=0 \tag{27}
$$

其中

$$
c_g=\frac{m}{r_2-r_1}\int_{r_1}^{r_2}c_1dr
$$

$$
\lambda=\frac{m}{r_2-r_1}\int_{r_1}^{r_2}\frac{(\Omega-c_0)}{\beta r}[2(\Omega-c_1)+(\Omega-c_0)]dr
$$

$$
\delta=\frac{m}{r_2-r_1}\int_{r_1}^{r_2}\left[\frac{2\phi_1}{r^3(\Omega-c_0)}\frac{d\phi_1}{dr}-\frac{\phi_2}{r_2}-\frac{3\phi_1^2}{2r^4(\Omega-c_0)}\right]dr
$$

把方程(27)式改写为:

$$
i\left(\frac{\partial A}{\partial T}+c_g\frac{\partial A}{\partial\xi}\right)+\lambda\frac{\partial^2 A}{\partial X^2}+\delta|A|^2A=0 \tag{28}
$$

上方程就是旋转正压大气中的非线性Rossby 调制波所满足的立方 Schrödinger 方程。

三、本 征 值 问 题

在方程(28)式中，要使立方Schrödinger 方程存在，必须要求 $\lambda\neq0,\delta\neq0$，在这里我们假定 $c<\Omega$，即基本气流必须是超临界的。

引入变量

$$\rho=\left(\frac{4\beta r}{\Omega-c}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{29}$$

于是(14)式可化成 Bessel 方程

$$\rho^2\frac{d^2\phi_1}{d\rho^2}+\rho\frac{d\phi_1}{d\rho}+[\rho^2-(2m)^2]\phi_1=0 \tag{30}$$

其通解为：

$$\phi_1(\rho)=c_1J_{2m}(\rho)+c_2Y_{2m}(\rho) \tag{31}$$

其中 J_{2m} 为 $2m$ 阶 Bessel 函数，Y_{2m} 为第二类 Bessel 函数。

根据边界条件 $\phi_1(\rho_1)=\phi_1(\rho_2)=0$，于是可得本征值方程为：

$$\begin{vmatrix} J_{2m}(\rho_1), & Y_{2m}(\rho_1) \\ J_{2m}(\rho_2), & Y_{2m}(\rho_2) \end{vmatrix}=0 \tag{32}$$

当 ρ_1,ρ_2 都很大时，我们可以把 Bessel 函数渐近展开，于是(32)式可变为：

$$\frac{2}{\pi}\sqrt{1/\rho_1\rho_2}\sin(\rho_2-\rho_1)=0 \tag{33}$$

文献[1]曾指出上面的展开是可行的，根据上式可得

$$\rho_2=\rho_1+n\pi\quad(n=1,2\cdots) \tag{34}$$

在以后的讨论中均取 $n=1$。

由上式并结合(29)式可得方程(14)式的本征值 c_0 为：

$$c_0=\Omega-\frac{4\beta r_2}{\pi^2}(1-\sqrt{r_1/r_2})^2 \tag{35}$$

再由(31)式，并结合边界条件有

$$\frac{c_1}{c_2}=-\mathrm{tg}\left(\rho_2-m\pi-\frac{\pi}{4}\right) \tag{36}$$

利用上式，并对(31)式进行归一化可得

$$\sqrt{\frac{2}{\rho^*\pi}}\left|c_1\frac{\sin(\rho_2-\rho)}{\sin\left(\rho_2-m\pi-\frac{\pi}{4}\right)}\right|=0 \tag{37}$$

其中 ρ^* 为 $\phi_1(\rho)$ 的最大值点且 $\rho^*=\rho_2-\frac{\pi}{2}$，因而可确定 c_1,c_2 的值为：

$$\begin{cases} c_1=\pm\sqrt{\pi\rho^*/2}\ \sin\left(\rho_2-m\pi-\frac{\pi}{4}\right) \\ c_2=\pm\sqrt{\pi\rho^*/2}\ \cos\left(\rho_2-m\pi-\frac{\pi}{4}\right) \end{cases} \tag{38}$$

于是我们可得方程(14)式的特征函数为：

$$\phi_1(\rho)=\pm\sqrt{\rho^*/\rho}\ \sin(\rho_2-\rho) \tag{39}$$

将(39) 式代入方程(23)式,并取 $\phi_0=50°$,$r_1=1.2\times10^6$m,$r_2=4\times10^6$m,且 $\Omega=4.374\times10^{-6}s^{-1}$ 和 $\Omega=5.832\times10^{-6}s^{-1}$,$m=1,2,3$,于是对方程(23)式进行数值求解,并可确定 c_g,λ,δ 的值如下:

	$\Omega=4.374\times10^{-6}s^{-1}$	$\Omega=5.832\times10^{-6}s^{-1}$	m
Cg	0.88946446E^{-6}	0.23474642E^{-5}	1
Cg	0.50599686E^{-5}	0.65179661E^{-5}	2
Cg	0.12010793E^{-4}	0.13468791E^{-4}	3

λ	m
0.16385385E^{-5}	1
0.59679643E^{-6}	2
−0.58056642E^{-5}	3

δ	m
0.38003096E^{-20}	1
0.18779931E^{-20}	2
0.12466997E^{-20}	3

这样非线性 *Schrödinger* 方程的系数便被确定了,下面我们将讨论非线性 *Schrödinger* 方程解的动力学特点。

四、非线性 *Schrödinger* 方程的解

对于方程(28)式利用(2)式有

$$i\left(\frac{\partial A}{\partial t}+c_g\frac{\partial A}{\partial\theta}\right)+\lambda\frac{\partial^2 A}{\partial\theta^2}+\delta\varepsilon|A|^2A=0 \tag{40}$$

其中 A 变为 t ,θ 的函数。在上方程中,令 $M=\varepsilon A$,于是上方程可变为:

$$i\left(\frac{\partial M}{\partial t}+c_g\frac{\partial M}{\partial\theta}\right)+\lambda\frac{\partial^2 M}{\partial\theta^2}+\delta|M|^2M=0 \tag{41}$$

其中 M 相当于扰动流函数的振幅,作变换:

$$\begin{cases}\tau^*=t\\ \Theta=\theta-c_g t\end{cases} \tag{42}$$

于是方程(41)式可变为:

$$i\frac{\partial M}{\partial\tau^*}+\lambda\frac{\partial^2 M}{\partial\Theta^2}+\delta|M|^2M=0 \tag{43}$$

在上方程中,当 $m\geqslant3$ 亦即 $\lambda\delta<0$ 时,方程(43)式有包络空洞孤立波解(亦是指 $\Theta\to\infty$,$M\to\infty$ 的解),这种孤立波没有实际意义。本文不加讨论,本文主要讨论 $\lambda\delta>0$ 的情况,也就是 $1\leqslant m\leqslant2$,根据文献[3],方程(43)式的包络孤立波解为:

$$M=\left(-\frac{2\nu}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}}\operatorname{sech}\left\{\left(-\frac{\nu}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}\Theta\right\}exp[-i\nu\tau^*] \tag{44}$$

其中 ν 为一个独立的参数且与 δ,λ 的符号相反。

在上式中，令M在$(t,\theta)=(0,0)$处的振幅为M_0，并利用(42)式有

$$M=M_0\mathrm{sech}\left\{M_0\sqrt{\frac{\delta}{2\lambda}}(\theta-c_g t)\right\}exp\left(\frac{i}{2}M_0^2\delta t\right) \tag{45}$$

显然，从(5)和(13)式可以看出，扰动流函数(或一阶近似解)为：

$$\psi'=M\phi_1(r)e^{im(\theta-c_0t)}+cc \tag{46}$$

将(45)式代λ上式可得扰动流函数为：

$$\psi'=M_0\mathrm{sech}\left\{M_0\sqrt{\frac{\delta}{2\lambda}}(\theta-c_g t)\right\}\phi_1(r)exp[im(\theta-ct)]+cc \tag{47}$$

$$其中c=c_0-\frac{M_0^2}{2m}\delta$$

于是从上式并利用(35)式可得旋转正压大气中 *Rossby* 调制波的传播速度为：

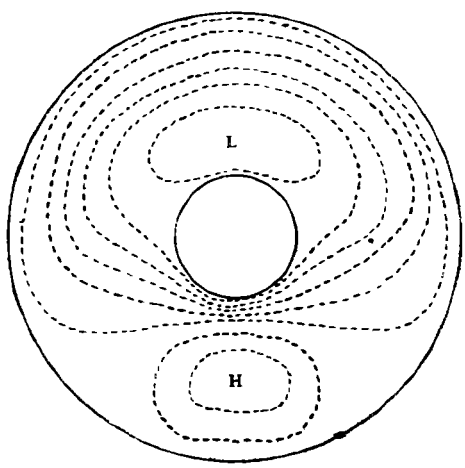

图 1　$t=0$ 天的流场
(ϕ_1 取正号，$m=1$，$\Omega=4.374\times10^{-6}s^{-1}$，$c=-10^{-6}s^{-1}$，$\Delta\psi=6$，$min\,\psi=-3$，$max\,\psi=45$，单位：$10^6m^2s^{-1}$)

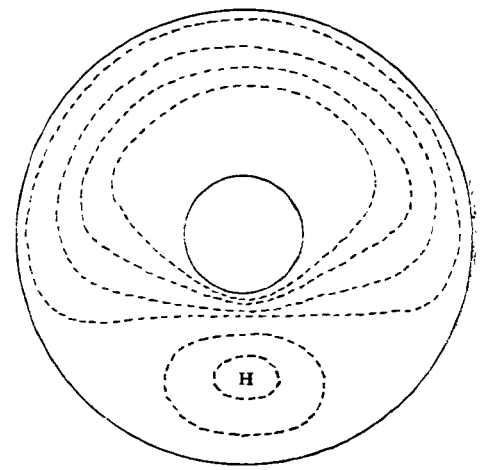

图 2　$t=0$ 天的流场
(ϕ_1 取正号，$m=1$，$\Omega=5.832\times10^{-6}s^{-1}$，$c=0$，$max\,\psi=61$，$\Delta\psi=10$，单位：$10^6m^2s^{-1}$)

$$c=\Omega-\frac{4\beta r_2}{\pi^2}\left(1-\sqrt{r_1/r_2}\right)^2-\frac{M_0^2}{2m}\delta \tag{48}$$

从上面的计算可知，δ为正数，因而对旋转正压大气中的非线性 *Rossby* 波，波的传播速度与波的振幅的平方成线性关系，当波的振幅越大，非线性 *Rossby* 调制波的传播速度就越小，当M_0满足

$$M_0^2>\frac{2m}{\delta}\left[\Omega-c-\frac{4\beta r_2}{\pi^2}(1-\sqrt{r_1/r_2})^2\right] \tag{49}$$

时，非线性 *Rossby* 调制波西移倒退，这与 *KdV*方程所得到的结果是一致的，不同的是 *KdV* 方程的孤立波的波速与波振幅的一次方成线性关系，而非线性 *Schrödinger*方程的包络孤立波的波速却与波振幅的平方成线性关系(如(48)式)同时我们从(47)式可以看出非线性 *Rossby* 调制波的振幅呈孤立波解，并且以c_g的速度频散，由于这个原因，非线性*Schrödinger*方程的解称为包络孤立波解($\lambda\delta>0$)，因而由非线性 *Schrödinger* 方程

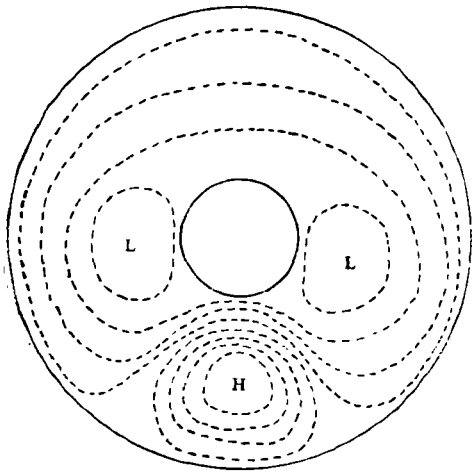

图 3 $t=0$ 天的流场
(ϕ_1 取正号, $m=2$, $\Omega=4.374\times10^{-6}s^{-1}$, $max\psi=77$, $min\psi=-9$, $\Delta\psi=10$, 单位: $10^6m^2s^{-1}$)

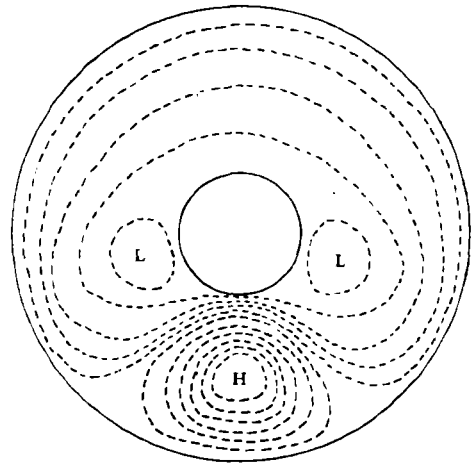

图 4 $t=0$ 天的流场
($m=2$, ϕ_1 取正号, $\Omega=5.832\times10^{-6}s^{-1}$ $c=0$, $max\psi=107$, $min\psi=-3$, $\Delta\psi=16$, 单位: $10^6m^2s^{-1}$)

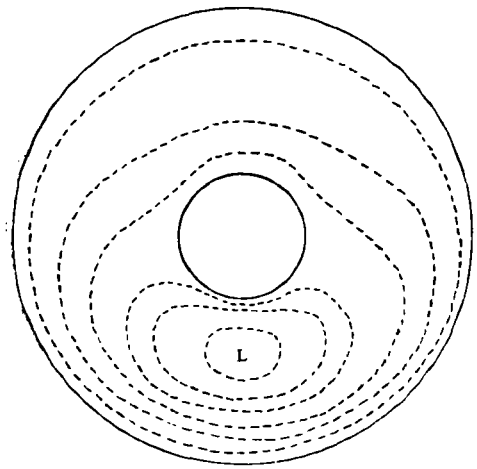

图 5 $t=0$ 天的流场
(ϕ_1 取负号, $m=1$, $\Omega=4.374\times10^{-6}s^{-1}$, $c=-10^{-6}s^{-1}$, $min\psi=-23$, $\Delta\psi=10$, 单位: $10^6m^2s^{-1}$)

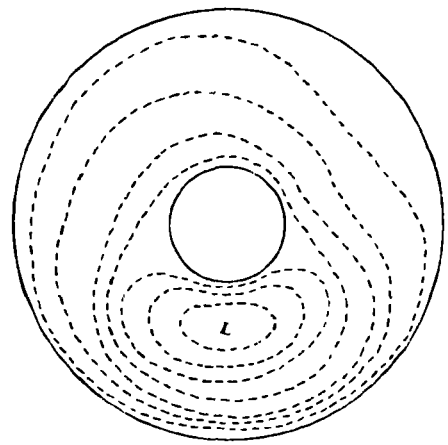

图 6 $t=0$ 天的流场
(ϕ_1 取负, $m=1$, $\Omega=5.832\times10^{-6}s^{-1}$, $c=0$, $min\psi=-32$, $\Delta\psi=10$, 单位: $10^6m^2s^{-1}$)

所描述的非线性 *Rossby* 调制波称为包络 *Rossby* 孤立波,并在非线性 *Schrödinger* 方程中频散作用大于非线性作用,因而用非线性 *Schrödinger* 方程可以更好地描述大气中的非线性 *Rossby* 波。

五、计 算 结 果

在这里,我们对旋转正压大气中的包络 *Rossby* 孤立波的流场进行了计算。在初始时刻,其流场如图 1-8,在图 1-4 中 $\phi_1(r)$ 均取正号,而在图 5-6 中 $\phi_1(r)$ 均取负号,

图 1 为取 $m=1, \Omega=4.374\times10^{-6}s^{-1}, c=10^{-6}s^{-1}$ 时的流场，从图中可以看出，在整个纬圈 $150°N$ 以北）内，出现了一个高压和低压，高压相当于大气中的阻塞高压，而低压很弱，可以认为是一个偏心极涡，并且这些波动均以 $c=-10^{-6}s^{-1}$ 的角速度西移，由于大气中的基本气流的角速度较小，很难形成定常波，当我们增加大气的基本角速度并取 $\Omega=5.832\times10^{-6}s^{-1}$ 时，在大气中可以形成定常波，其流场如图 2，显然图中只出现了一个强度较强的阻塞高压，但没有出现低压，图 3 为取 $m=2, \Omega=4.374\times10^{-6}s^{-1}, c=-10^{-6}s^{-1}$ 的流场，图中同样出现了一个阻塞高压，并且高压的两侧出现了低压，这种低压可以认为是切断低

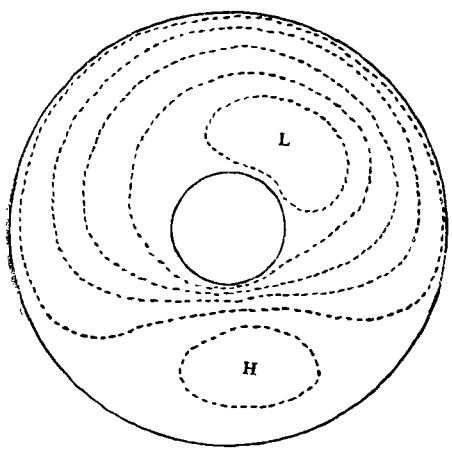

图 7　$t=5$ 天的流场
（ϕ_1 取正号，$m=1$，$\Omega=5.832E^{-6}s^{-1}$，$c=0$，$max\psi=54$，$min\psi=-8$，单位同上）

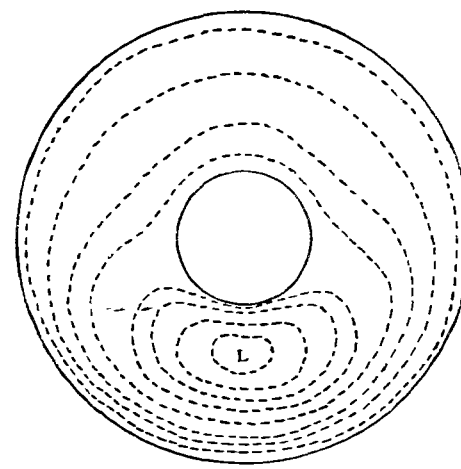

图 8　$t=5$ 天的流场
（ϕ_1 取负号，$m=1$，$\Omega=5.832E^{-6}s^{-1}$，$c=0$，$min\psi=-24$，单位同上）

压，同时又取 $m=2, \Omega=5.832\times10^{-6}s^{-1}, c=0$，其流场如图 4，从图中可以看出，阻塞高压明显地有所加强。图5-6 为 $\phi_1(r)$ 取负号时的流场，在 $m=1$ 的情况下，图 5 和图 6 分别为 $\Omega=4.374\times10^{-6}s^{-1}, c=10^{-6}s^{-1}$ 和 $\Omega=5.832\times10^{-6}s^{-1}, c=0$ 的流场，图中均出现了切断低压（$m=2, \phi_1$ 取负号时的其他流场这里省略）。由于在非线性 *Schrödinger* 方程中，频散作用大于非线性作用，因而这些波动并不是永久行波，它要产生能量频散，经过计算可知，这些阻塞高压和切断低压均可以维持 5 天以上，例如图 2 和图 6 的第五天的演变流场分别为图 7 和图 8。*Treidl* 等人[4]定义阻塞持续的时间至少为 5 天，而本文所得到的阻塞高压和切断低压也持续 5 天以上，可见本文所得到的非线性 *Schrödinger* 方程型的包络 *Rossby* 孤立波可以解释大气中所出现的阻塞型势。

六、结　　论

本文利用多重尺度方法研究了旋转正压大气中的非线性 *Rossby* 波，得到了大气中的非线性扰动所满足的非线性 *Schrödinger* 方程，指出在 $1\leqslant m\leqslant2$ 的情况下，非线性 *Schrödiner*方程具有包络孤立波解，并且从(48)式($\delta>0$)可以看出包络*Rossby* 孤立波的相速与包络 *Rossby* 孤立波振幅的平方成线性关系，当包络*Rossby* 孤立波的振幅越

大，包络 *Rossby* 孤立波的传播速度就越小。同时我们还得到了与实际观测类似的单个阻塞高压和切断低压，并且这些阻塞系统能够维持 5 天以上，因此包络 *Rossby* 孤立波中的非线性作用是单个阻塞形成的重要机制。

致谢：作者在本课题的研究过程中，承得到纪立人教授的热情鼓励与支持，在此深表谢意。

参考文献

[1] 巢纪平等，旋转正压大气中的椭圆余弦波，中国科学，1980，7，696—705。
[2] 罗德海，大气中行星尺度孤立波的动力学特征，气象学报，47，1，113—117，1989。
[3] Taniuti, T, Reductive purturbation method and far fields of wave equations, partl, General theory, the progress of theoretical physics, 54, Supplement, No 55, 1—34, 1974.
[4] Treidl, R. A., E.C.Birch and P.Sajeck, Blocking action in the Northern Hemisphere, A climatological study, *Atmosphere—Ocean*, 19, 1—23, 1981.

NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION IN THE ROTATIONAL ATMOSPHERE AND ATMOSPHERIC BLOCKING

Luo Dehai*

(Institute of Atmospheric physics, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

In this paper, the WKB method is used to obtain the nonlinear schrödinger equation satisfied by nonlinear Rossby wave in the rotational atmosphere. It is found that the nonlinear Schrödinger equation has envelope solitary wave solution under the condition $1 \leqslant m \leqslant 2$, and the phase speed of envelope solitary Rossby wave is related to the square of its amplitude linearly, that is, the larger the amplitude of envelope solitary Rossby wave, the smaller its propagation speed. Furthermore, the blocking high and cut-off low which are consistent with the observations of blocking in the atmosphere are obtained by calculating envelope solitary Rossby wave, and the blockings persist more than five days, the results demonstrate that the envelope solitary Rossby wave is an possible mechanism about the formation, maintenance and break out of blocking in the atmosphere.

* Present adress: Cheng Du Institute of Meteorology.