第48卷 第2期　　气　象　学　报　　Vol. 48, No. 2
1990年5月　　ACTA METEOROLOGICA SINICA　　May, 1990

# 有限区域有效位能理论再探*

辜 旭 赞

（湖南怀化地区气象局）

本文用拉格朗日方法推导出有限区域有效位能方程，结果表明和Smith[1]导出的表达式有异。本文还重新推导出有限区域有效位能平衡方程。

## 1. 关于参考状态

从实际大气状态到其参考状态，从泛函角度可以描述为孤立系统（或热能和机械能在边界的净交换为零的闭合系统）中的映射关系[2]，即大气在任一时刻的位温空间曲面作为物质曲面均达到水平和垂直稳定状态的特殊映射。因此，可以定义参考气压 $p_r$：

$$p_r=p_r(\theta,t)=\frac{1}{\Omega}\int_\Omega\int_{\theta_T}^{\theta}\frac{\partial p(\lambda,\varphi,\theta,t)}{\partial\theta}d\theta d\sigma \tag{1}$$

（$\theta_T$ 是大气上界位温，$\Omega$ 是全球面积，$d\sigma=a^2\cos\varphi\, d\lambda d\varphi$，$a$ 是地球平均半径）

若系统中大气状态是层结稳定的，即满足$\frac{\partial\theta}{\partial p}<0$且连续的条件$\left(\frac{\partial\theta}{\partial p}>0\right.$的不稳定层结将自发调整到稳定状态；而$\frac{\partial\theta}{\partial p}=0$的中性层结容易作数学上特别处理$\left.\right)$，将这称为△条件，则(1)式变成为：

$$p_r(\theta,t)\triangleq\frac{1}{\Omega}\int_\Omega p(\lambda,\varphi,\theta,t)d\sigma \tag{2}$$

用(2)式代替(1)式，实际上是将大气层结不稳定能量（在本文或可称为有效位能垂直量）不包括到有效位能之内。换言之，当大气调整到层结稳定状态，才用(2)式，并得到的是有效位能水平量。有效位能水平量是大气斜压性的直接结果。实际大气中，有效位能垂直量和水平量是可分的，且前者比后者一般要小几个数量级。

从而在(1)式(或(2)式)的基础上，容易给出参考状态的其它物理量方程：

$$T_r(\theta,t)=\theta(p_r/p_0)^k \tag{3}$$

$\left(p_0=1000\,\text{hPa},\ k=\frac{R}{c_p},\ R\text{是空气比气体常数}\right)$

$$\frac{\partial p_r}{\partial Z_r}=-\rho_r g\quad (p_r=\rho_r RT_r) \tag{4}$$

因大气映射到了参考状态，可直接对参考大气积分(4)式，得：

$$Z_r(\theta,t)=\frac{R}{g}\int_{p_r}^{p_{r0}}T_r d\ln p_r \tag{5}$$

（$p_{r0}$ 为 $t$ 时刻最小位温面（它已与海平面重合）上的参考气压，因大气的总质量基本不变，故 $p_{r0}$ 基本上是一常数）。

这里还应讨论一下参考气压的局地和个别时间变率问题。Egger曾给出过推导结果[3]：

$$\left(\frac{\partial p_r}{\partial t}\right)_\theta=\frac{-1}{\Omega}\int_\Omega\dot\theta\,\frac{\partial p}{\partial\theta}d\sigma\quad\left(\dot\theta=\frac{d\theta}{dt}\right) \tag{6}$$

* 本文于1988年7月4日收到，1989年1月24日收到最后修改稿。本文为作者硕士论文的一部分。

从而有，

$$\omega_r=\frac{dp_r}{dt}=\dot{\theta}\frac{\partial p_r}{\partial\theta}-\frac{1}{\Omega}\int_{\Omega}\dot{\theta}\,\frac{\partial p}{\partial\theta}d\sigma \tag{7}$$

(6)式是在(2)式的基础上得到的[2]。(6)式表明，在绝热条件下（$\dot{\theta}=0$），任一位温面上的参考气压将不随时间变化，这就是说，绝热时间过程中大气参考状态将不变。一般情况是，气块受热而将离开原位温面，该位温面上就会发生空气质量的穿入和穿出。但是，整个行星大气系统其长时间平均必然是近于热平衡且空气质量守恒，故局地变率$\left(\frac{\partial p_r}{\partial t}\right)_\theta$的长时间平均值应近于零，即大气参考状态准守恒。且在理想的日-地关系受热条件下，大气参考状态(及 $p_r$)不具有年变化和日变化，因这两种变化中，任一位温面上全球的穿入和穿出的空气质量大致平衡。只在受太阳不规则热辐射和周期性热辐射作用(太阳常数发生变化)，受地-气大尺度热耦合作用(如海-气热相关)，受大范围水汽凝结释放潜热作用时，$p_r$ 随之应有变化。总之，大气参考状态准守恒性可以称为大气的“热惯性”，(参考大气的全位能在静力平衡条件下，由其热学特性所决定)。这种热惯性的稳定程度如何尚待研究；或者反过来，可以通过计算 $p_r$来研究大气受热异常及能量转换过程等。(7) 式表明，个别变率 $\omega_r$，即气块的参考气压除随大气热惯性变化外，仅与其本身受热有关。

## 2. 关于有效位能方程

与有效位能相伴的是无效位能(即参考状态全位能)。表征有限区域的无效位能概念，在数理上可有两种方法。

1) 为欧拉方法

$$\begin{aligned}W_r&=\frac{c_v}{g}\int_{\sigma}\int_0^{p_{rs}}T_r\,dp\,d\sigma+\int_{\sigma}\int_0^{p_{rs}}Z_r\,dp\,d\sigma\\&=\frac{c_p}{g}\int_{\sigma}\int_0^{p_{rs}}T_r\,dp\,d\sigma+\int_{\sigma}p_{rs}Z_{rs}\,d\sigma\end{aligned} \tag{8}$$

($p_{rs}$是参考状态时参考气压地面值，在海平面上 $p_{rs}=p_{r0}$)

$W_r$ 表示该区域($\sigma$)上无限高空间所包含的参考大气全位能。(8) 式的积分对象是欧拉空间所包含的参考状态大气。显然，已达到参考状态时，垂直坐标 $p\equiv p_r$，(8)式中的$dp\equiv dp_r$。

2) 为拉格朗日方法

如图1，设在$\sigma$区域内任取单位面积无限高气柱上一位温面上的空气元 $dm$。图1中$dm\equiv dm_r$；$p_r, T_r, Z_r$ 分别是空气元的参考气压、温度、位势高度，它们由 $t$ 时刻 $dm$ 的位温 $\theta$ 唯一确定。实际状态中 $dm$的全位能我们早已可求得，但 $dm$在参考状态中将如何呢? $c_vT_r dm$ 是它将具有的内能，其中 $T_r$ 应满足(3)式，即通过(3)式与实际状态相联系(位温映射关系)；$gZ_r dm$ 是它将具有的位能，其中 $Z_r$ 应满足(4)式，并可通过(5)式求得。

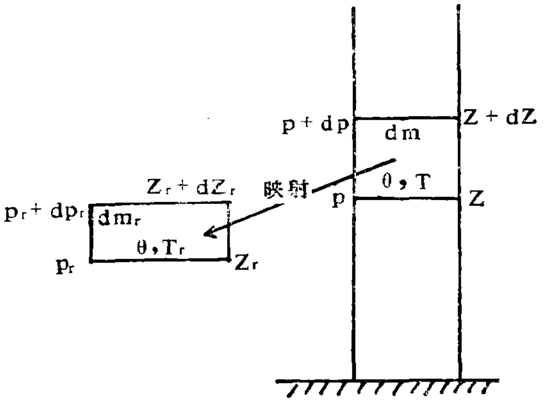


图 1　映射示意图

因为在映射中 $dm$ 守恒，故

$$dm=1\cdot1\cdot\frac{-dp}{g}=S\cdot\frac{-dp_r}{g}=dm_r \tag{9}$$

(9)式中$S$是图1中 $dm_r$ 的水平面积。由 $S=\frac{dp}{dp_r}$，$S$ 表示空气元从实际状态到参考状态的两个气

压"垂直高度"之比；本文将$S$称为空气元的映射伸缩比。

由于在任一$t$时刻映射时(参见图1)，$p_r$，$Z_r$(及$T_r$)都是唯一位温$\theta$的函数(即$p_r$，$Z_r$，$T_r$等互为函数)，故

$$\frac{dp_r}{dZ_r}=\frac{\partial p_r}{\partial Z_r}=-\rho_r g \tag{4'}$$

用(4')和(9)式，该空气元的参考位能可以写成如下两种形式：

$$gZ_r dm=-Z_r dp=\begin{cases} ① & pdZ_r-d(Z_r p)=-\dfrac{R}{g}T_r Ddp-d(Z_r p) \\ ② & -Z_r Sdp_r=S(p_r dZ_r-d(p_r Z_r))=-\dfrac{R}{g}T_r dp-Sd(p_r Z_r) \end{cases}$$

上式中的$D=\dfrac{p}{p_r}\cdot\dfrac{1}{S}=\dfrac{d\ln p_r}{d\ln p}$，$D$可称为映射广义伸缩比。

对空气元所具有的参考内能和参考位能积分，则用拉格朗日方法表示$\sigma$区域内全部空气将在参考状态中具有的全位能(参考内能与位能之和)，表达式如下：

$$W_{r*}=\frac{c_v}{g}\int_\sigma\int_0^{p_s}T_r dpd\sigma+\int_\sigma\int_0^{p_s}Z_r dpd\sigma \tag{10}$$

(10)式的积分对象是实际状态大气。实际状态中，一般$p\neq p_r$，即空气元的气压一般不等于它的参考气压，但(10)式中$dp=Sdp_r$。这一点是与欧拉方法的(8)式不同的。这是本文的一个重要意思。

因此，由前面①等号可得，

$$W_{r*}=\frac{c_v}{g}\int_\sigma\int_0^{p_s}T_r dpd\sigma+\frac{R}{g}\int_\sigma\int_0^{p_s}T_r Ddpd\sigma+\int_\sigma p_s Z_{rs} d\sigma \tag{11}$$

(11)式除地形项外，不显含参考位势高度$Z_r$，仅通过$D$来反映映射时空气块的高度变化。

由前面②等号可得，

$$W_{r*}=\frac{c_p}{g}\int_\sigma\int_0^{p_s}T_r dpd\sigma+\int_\sigma\int_0^{p_s}Sd(p_r Z_r)d\sigma \tag{12}$$

(12)式在形式上便于与实际状态大气全位能的通常表达式（用欧拉方法和拉格朗日方法其形式和物理意义完全相同）相比较：

$$\begin{aligned} W&=\frac{c_v}{g}\int_\sigma\int_0^{p_s}Tdpd\sigma+\int_\sigma\int_0^{p_s}Zdpd\sigma \\ &=\frac{c_p}{g}\int_\sigma\int_0^{p_s}Tdpd\sigma+\int_\sigma p_s Z_s d\sigma \end{aligned} \tag{13}$$

(12)式只有当$S=1$时，在形式上就相似于(13)式；但实际大气映射到参考大气，$S$一般不为1。

这样，用(13)和(8)式，我们得到欧拉方法有效位能表达式，

$$A=\frac{c_p}{g}\int_\sigma\left(\int_0^{p_s}Tdp-\int_0^{p_{rs}}T_r dp\right)d\sigma+\int_\sigma(pZ-p_r Z_r)_s d\sigma \tag{14}$$

(14)式中的$T$(及$p_s$，$Z_s$等)与$T_r$(及$p_{rs}$，$Z_{rs}$等)本不是同一空气元的物理量！仔细说来，第一项的前微分有$dm=\dfrac{-dp}{g}d\sigma=\rho dZd\sigma$，而后微分有$dm_r=\dfrac{-dp}{g}d\sigma=\dfrac{-dp_r}{g}d\sigma=\rho_r dZd\sigma$，由于用欧拉方法，这里的$dm$和$dm_r$分别在实际状态和参考状态中共一个欧拉空间($dZd\sigma$)，但它们不是同一拉格朗日空气元。

用(13)和(11)、(12)式我们分别得到拉格朗日方法有效位能表达式(*号表示拉格朗日观点)：

$$A_*=\frac{c_v}{g}\int_\sigma\int_0^{p_s}(T-T_r)dpd\sigma+\frac{R}{g}\int_\sigma\int_0^{p_s}(T-T_r D)dpd\sigma+\int_\sigma p_s(Z-Z_r)_s d\sigma \tag{15}$$

及

$$A_*=\frac{c_p}{g}\int_\sigma\int_0^{p_s}(T-T_r)dpd\sigma+\int_\sigma\left(p_s Z_s-\int_0^{p_s}Sd(p_r Z_r)\right)d\sigma \tag{16}$$

(16)式便于与 Smith 有效位能方程[1]进行比较。Smith 用的是拉格朗日观点，但却得到了一个不完全的有效位能方程。Smith 方程只含有(16)式中的第一项，与(15)式第一项相比较可知，它与有效位能的内能贡献部分变化趋势完全一致，仅振幅中以 $c_p$ 代替了 $c_v$。所以，Smith 方程仅表示"有效焓"。

例如，一冷空气块一般必须下沉才达到其参考状态。下沉时要绝热增温，内能贡献为负，故 Simth 方程的有效焓亦为负。但下沉时位能贡献为正。有关计算(略)表明，冷空气的有效位能（显然是拉格朗日观点)作为内能和位能贡献的净量应为正。相反，暖空气应为负。这等于说，大气中一般是冷空气推动暖空气作相互运动。

最后，有些文章将(1)式和(2)式定义在有限区域上(式中以 $\sigma$ 代替 $\Omega$)。定义有限区域参考状态用"$'$"符号表征，则

$$A_*=W-W_{r*}=(W-W'_{r*})+(W'_{r*}-W_{r*})=A'_*+(W'_{r*}-W_{r*})$$

上式中的 $A'_*$ 即相对于新定义的有限区域参考状态的有效位能。$A'_*$ 在形式上与 $A_*$ 的各表达式相同(仅以 $p'_r$ 等代替 $p_r$ 等即可)。而该有限区域参考状态的全位能 $W'_{r*}$ 亦容易作数学处理。注意到 $W_{r*}$ 是全球参考状态在有限区域内的全位能。二者是不同的。

## 3. 关于有效位能平衡方程

首先，有限区域内实际状态大气全位能平衡方程我们已知$\left(\text{对(13)式求时间偏导数，并记} \int \triangleq \frac{1}{g}\int_\sigma\int_0^{p_s} dp d\sigma\right)$：

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\int(Q+\alpha\omega)-\int c_p\left(\mathbf{V}\cdot\nabla T+\omega\frac{\partial T}{\partial p}\right)+\int_\sigma\frac{1}{g}(c_pT+gZ)_s\frac{\partial p_s}{\partial t}d\sigma \tag{17}$$

若用欧拉观点的(14)式求有效位能平衡方程，则仍有这样一个问题：当非绝热加热场($Q$)在实际状态大气中的空间分布为已知函数时，当大气达到了参考状态，$Q$ 场随空气质量调整发生空间变化而成为未知函数。从而不便于作数学处理。同时还表明，用欧拉方法不能精确地得到 $p$ 坐标下 Lorenz 加热效率因子 $N$，

$$N\triangleq 1-\frac{T_r}{T}=1-\left(\frac{p_r}{p}\right)^k \tag{18}$$

(上式中的△条件是，有关大气物理量出于同一空气元)。

而用拉格朗日观点的(15)式求有效位能平衡方程，参考状态隐含在实际状态之中，则不存在类似的问题。

我们前面讲参考状态，实际上是固定时间 $t$，在孤立系统中作位温 $\theta$ 空间映射。我们是作有关参考状态及有效位能的诊断分析。但这里显然不排除从 $t_1$ 到 $t_2(t_2>t_1)$ 的时段内会发生非绝热加热及各种运动。那么，求(15)式中隐含的参考状态大气全位能平衡方程，有(参见(11)式)：

$$\frac{\partial W_{r*}}{\partial t}=\frac{\partial I_{r*}}{\partial t}+\frac{\partial \Phi_{r*}}{\partial t} \tag{19}$$

($I_{r*}$ 和 $\Phi_{r*}$ 分别是实际大气将达到参考大气的内能和位能部分)。

$$\frac{\partial I_{r*}}{\partial t}=\int c_v\frac{\partial T_r}{\partial t}+\frac{c_v}{g}\int_\sigma T_{rs}\frac{\partial p_s}{\partial t}d\sigma$$

其中

$$\frac{\partial T_r}{\partial t}=\frac{dT_r}{dt}-\mathbf{V}\cdot\nabla T_r-\omega\frac{\partial T_r}{\partial p}$$

而

$$\frac{dT_r}{dt}=\frac{d}{dt}[\theta(p_r/p_0)^k]=\frac{Q}{c_p}\frac{T_r}{T}+\frac{\alpha_r\omega_r}{c_p}\qquad\left(\frac{\dot\theta}{\theta}=\frac{Q}{c_pT}\right)$$

$$\frac{\partial \Phi_{r*}}{\partial t}=\int R\frac{\partial}{\partial t}(T_rD)+\frac{R}{g}\int_\sigma T_{rs}D_s\frac{\partial p_s}{\partial t}d\sigma+\int_\sigma\frac{\partial}{\partial t}(pZ_r)_s d\sigma$$

那么用(17)减(19)式并经适当整理后，我们得到有限区域有效位能平衡方程

$\left(令\quad H=\frac{C_v+RD}{C_p}\right)$：

$$\frac{\partial A_*}{\partial t}=\int Q\left(1-H\frac{T_r}{T}\right)+\int(\alpha\omega-H\alpha_r\omega_r)-\int c_p\mathbf{V}\cdot\Delta T-H\nabla T_r)-$$

$$\int c_p\omega\left(\frac{\partial T}{\partial p}-H\frac{\partial T_r}{\partial p}\right)-\int RT_r+\frac{\partial D}{\partial t}\int_\sigma\left\{\left[\frac{c_p}{g}(T-HT_r)_s+(Z-Z_r)_s\right]\frac{\partial p_s}{\partial t}-p_s\frac{\partial Z_{rs}}{\partial t}\right\}d\sigma \quad (20)$$

从上式中容易重新给出加热($Q$)产生有效位能的效率因子$N'$：

$$N'=1-H\frac{T_r}{T}=1-\frac{c_v+RD}{c_p}\left(\frac{p_r}{p}\right)^k \quad (21)$$

(21)式可以与(18)式相比较。

实际上，在 $t$ 时刻的映射关系中(参见图1)，设垂直坐标气压 $p$ 是大气位温 $\theta$ 的连续、单调函数，则

$$S=\frac{dp}{dp_r}=\frac{\partial p}{\partial\theta}d\theta\bigg/\frac{\partial p_r}{\partial\theta}d\theta=\frac{\partial p}{\partial p_r} \quad (22)$$

同理

$$D=\frac{\partial\ln p_r}{\partial\ln p}=\frac{p}{p_r}\frac{\partial p_r}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial p} \quad (23)$$

上面$D$中的$\frac{\partial p_r(\theta,t)}{\partial\theta}$与$(\lambda,\varphi)$无关，故$D$还与大气层结稳定度$\left(\frac{\partial\theta}{\partial p}\right)$及其水平分布有关。

容易推断出：

$$N'\begin{cases}>N, & D<1\\ =N & D=1\\ <N & D>1\end{cases} \quad (24)$$

加热产生有效位能比过去所讨论的要复杂。

最后还应指出，若将有限区域($\sigma$)扩展到全球($\Omega$)，本文所述的方程一般仍然正确。

## 参 考 文 献


[1] Smith, P. T., On the contribution of a limited region to the global energy budget, *Tellus*, 21, 202—207, 1969.

[2] J. Ven mieghem 著，吴宝俊、刘延英等译，大气能量学，科学普及出版社，214—218，1986。

[3] Egger, J., Comments on "Zonal and eddy forms of the available potential energy equations in pressure coordinates", *Tellus*, 28, 377—378, 1976.


# A THEORETICAL STUDY OF THE AVAILABLE POTENTIAL ENERGY IN A LIMITED ATMOSPHERIC REGION


Gu Xuzan

*(Huaihua Meteorological Bureau, Hunan Province)*



**Abstract**

Reformulating the equation of the available potential energy (APE) in a limited atmospheric region in Lagrangian method, the results show that it is different from the expression of Smith's (1969). The budget equation for the APE is as well reformulated.