第48卷 第2期 气 象 学 报 Vol. 48, No. 2
1990年5月 ACTA METEOROLOGICA SINICA May, 1990

边界层摩擦和地形对斜压波不稳定性的影响*

赵 鸣

(南京大学大气科学系)

提 要

本文用新的边界层顶垂直速度参数化方案研究了当地形和边界层摩擦同时存在时二者对Eady波不稳定性的影响,得到了边界层层结、地面粗糙度、地形坡度的影响,还研究了摩擦和地形对一般化Eady波不稳定性的影响。

一、引 言

斜压波的稳定性问题是研究天气系统发展的重要理论方法之一。斜压波的稳定性理论常用的有地转风线性随高度增加且下边界条件取垂直速度为零的 Eady 模式[1]。为使条件更接近实际大气,一些作者在此基础上考虑了更多的物理因子,例如边界层摩擦的影响[2,3],这类工作的特点是只对边界层作粗略的参数化,使边界层结构及下垫面状态的影响无从进行考虑。也有人考虑了地形对斜压波稳定性的影响,来解二层问题或 Eady 问题[4-6],并与山区气旋的发展问题联系起来,但却未计入摩擦的作用。本文目的是在比较完备的边界层参数化基础上讨论摩擦对斜压波稳定性的影响,并同时考虑地形的作用。本文先用准地转模式研究三维Eady问题,再研究地转风的高度变化非线性时的一般化Eady问题中摩擦及地形对稳定性的影响,再考虑边界层层结的影响解二维Eady 问题以看出边界层热力结构及下垫面状况对Eady 波稳定性的影响,从而使边界层与自由大气的关系得到更深入的认识。

二、摩擦和地形对 Eady 波影响的同时考虑

按文献[3],不计柯氏参数 f 的纬度变化,无量纲准地转位涡方程可写成(本文除带下标'1'的变量为有量纲者外,均为无量纲):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\nabla^2\psi+\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_s}{B}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right]=0 \tag{1}$$

ψ 为地转流函数,由 fVL 来尺度,V 为速度尺度,L 为长度尺度,ρ_s 为密度,$B=\frac{N_s^2H^2}{f^2L^2}$ 为 Burger 数,N_s 为 Brunt 频率,H 为高度尺度,即考虑的大气层厚度。如一般处理[3],可设 ρ_s 不随高度变。

将 ψ 视为基态与扰动态之和:

$$\psi(x,y,z,t)=\Psi(y,z)+\phi(x,y,z,t) \tag{2}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\Psi}{\partial y}+\frac{\partial\phi}{\partial y}=-U(y,z)+\frac{\partial\phi}{\partial y} \tag{3}$$

* 本文于1989年3月18日收到,1989年6月19日收到修改稿,本工作为国家自然科学基金资助项目。

则(1)式化为：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)q+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\Pi_0}{\partial y}+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial y}-\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial x}\right)=0 \tag{4}$$

其中

$$q=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \tag{5}$$

$$\Pi_0=\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right) \tag{6}$$

略去小量的二次项，则(4)式成：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)q+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\Pi_0}{\partial y}=0 \tag{7}$$

设U与y无关，$U(z)$可取为z高度处的x方向地转风速。于是(4)式成：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\nabla^2\phi+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\right]-\frac{\partial\phi}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial U}{\partial z}\right)\right]=0 \tag{8}$$

此处∇^2为二维拉氏算子。对 Eady 问题，U 随高度线性增加，且B不随高度变，即得：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\nabla^2\phi+\frac{1}{B}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)=0 \tag{9}$$

前人考虑边界层摩擦引起的垂直速度的影响时是将边界层顶垂直速度在下边界处引入，显然此下边界应是边界层顶，只是为处理方便将此高度取为零。我们亦如此处理，但改变 Eady 问题中取下边界处$U=0$的做法。既然下边界处垂直速度是边界层顶的w，则下边界处U就不能为零。在下边界即边界层顶处，可取地转风速V_g为基流速度，即$V_g\approx U(0)\equiv G$，此时边界层顶有量纲垂直速度是[7]：

$$w_{f1}=\frac{0.2c_gG_1\zeta_{g1}}{f\ln\frac{h_1}{z_{01}}} \tag{10}$$

如前述，下标'1'表示有量纲量，h_1为边界层顶高度(计算w_{f1}时取$h_1=1000$ m)，ζ_{g1}为地转涡度，$c_g=\frac{u_*}{V_g}\approx\frac{u_*}{G}$，为地转阻力系数，$u_*$为摩擦速度，$z_{01}$为地面粗糙度。按文献[3]，下边界条件在$w$存在时为：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial\phi}{\partial z}-\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{w}{\varepsilon_r}B=0 \qquad \text{当}z=0 \tag{11}$$

$\varepsilon_r=\frac{V}{fL}$为 Rossby 数，本文取 0.1。(11)式中w在无地形时为边界层摩擦引起的w_f，在地形存在时还应包括地形引起的强迫垂直运动。作为近似处理[4,6]，在地形存在时，我们仍将下界取为$z=0$，边界层顶地形引起的垂直速度为[3]：

$$w_t=\boldsymbol{V}_g\cdot\nabla\frac{h_{B1}}{H} \tag{12}$$

h_{B1}为地形高度，$\boldsymbol{V}_g$为边界层顶地转风矢。(12)式是在交换系数为常数时得到，但文献[8]中已证，在交换系数取其他高度的已知函数时，(12)式也成立。

不计地形与摩擦的相互作用，取w的尺度因子是$\frac{VH}{L}$，(11)式中的w应是w_t与w_f之和[3]：

$$w=\frac{0.2\,c_g G\zeta_g}{f\ln\frac{h}{z_0}}\frac{V}{H}+V_{gx}\frac{\partial h_B}{\partial x}+V_{gy}\frac{\partial h_B}{\partial y} \tag{13}$$

V_{gx}和V_{gy}为$\boldsymbol{V}_g$的分量。和文献[6][13]一样，仅考虑无限伸展的东西向山脊，即$\frac{\partial h_B}{\partial x}=0$，设$\frac{\partial h_B}{\partial y}=\alpha_n$，因$V_{gy}=\frac{\partial\phi}{\partial x}$，(11)式成：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial\phi}{\partial z}-\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial x}+B\left(RG\nabla^2\phi+\alpha\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)=0 \qquad \text{当 } z=0 \tag{14}$$

其中$\alpha=\frac{\alpha_n}{\varepsilon_r}$，而

$$R=\frac{0.2\,c_g V}{\varepsilon_r f\ln\frac{h}{z_0}H} \tag{15}$$

上界条件相应于垂直速度为零是：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial\phi}{\partial z}-\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial x}=0 \qquad \text{当 } z=1 \tag{16}$$

在Eady问题中设$\frac{\partial U}{\partial z}=1$，因本文中取$z=0$处$U=G$，故$z=1$处$U=1+G$，令

$$\phi=\Phi e^{ik(x-ct)} \tag{17}$$

则(9)式成：

$$(U-c)\left[\frac{1}{B}\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-k^2\Phi\right]=0 \tag{18}$$

而(14)、(16)式分别成为

$$(G-c)\frac{\partial\Phi}{\partial z}-\Phi=-B\left[\frac{\left(-k^2\Phi+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)GR}{ik}+\alpha\Phi\right] \qquad \text{当 } z=0 \tag{19}$$

$$(G+1-c)\frac{\partial\Phi}{\partial z}-\Phi=0 \qquad \text{当 } z=1 \tag{20}$$

仿文献[3]，令

$$\Phi=A(z)\cos l_n y, \qquad l_n=(n+1)\frac{\pi}{2}$$

取$n=0$进行研究，$l_n=\frac{\pi}{2}=l$，则(18)－(20)式成：

$$\frac{d^2A}{dz^2}-\mu^2A=0 \tag{21}$$

其中

$$\mu=[B(k^2+l^2)]^{\frac{1}{2}} \tag{22}$$

$$(G-c)\frac{dA}{dz}-\left\{1-B\left[(ikGR+\alpha)+\frac{iGRl^2}{k}\right]\right\}A=0 \qquad \text{当 } z=0 \tag{23}$$

$$(G+1-c)\frac{dA}{dz}-A=0 \qquad \text{当 } z=1 \tag{24}$$

(21)式的解为

$$A=C_1\mathrm{ch}\,\mu z+C_2\mathrm{sh}\,\mu z \tag{25}$$

代入(23)，(24)求本征值问题，得波速c：

$$c=G+\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{cth}\mu}{2\mu}(P-1)\pm\left[\frac{1}{4}+\frac{(P-1)^2}{4\mu^2}\mathrm{cth}^2\mu-\frac{1}{2\mu}(P+1)\mathrm{cth}\,\mu+\frac{P}{\mu^2}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{26}$$

其中

$$P=1-B\left[ikGR+\alpha+\frac{iGRl^2}{k}\right]=1-\frac{iGR}{k}\mu^2-B\alpha \tag{27}$$

(26)式中 $c=c_r+c_ii$，c_i 即决定了波动的稳定性。

由(26)、(27)可见，当 R,G,α 一定，即当摩擦与地形一定时，c 同时与 B,μ 有关，与经典 Eady 问题中 c 仅与 μ 有关不同。(15)式可见，R 含 c_g，而 c_g 按现代 PBL 理论与 G，f,z_0 有关，故 R 与 G,f,z_0 有关，由此可见，影响 Eady 波增长的因子是很多的。

下面讲计算结果。考虑 $B=0.25$ 及 $B=0.1$ 二种情况，取 $L=2\times10^6$m，$H=10^4$m，$f=10^{-4}$s^{-1}，$V=20$ m/s($\varepsilon_r=0.1$)，则前者相应于 $\frac{\partial\theta_s}{\partial z}=0.27^\circ/100$ m，后者 $\frac{\partial\theta_s}{\partial z}=0.09^\circ/100$m，$\theta_s$为位温，前者更接近于实际大气，后者仅为了比较。对(15)式中的 c_g 作如下处理，按文献[9]中对 c_g 的研究结果，在不计边界层层结时，c_g 可看成是 $\mathrm{Ro}_b=\frac{G_1}{fz_{01}}$，即边界层 Rossby 数的函数。且有如下公式：

$$c_g=\sum_{i=0}^{3}a_i\widetilde{\mathrm{Ro}}_b^i \tag{28}$$

此外 $\widetilde{\mathrm{Ro}}_b=\lg\mathrm{Ro}_b$，系数 a_i 见文献[9]。

图 1 是在 α,k 坐标中画的波增长率 $\gamma=kc_i$ 的等值线分布图。此图已令(23)式中 $R=0$，即不计摩擦(为的与其他图比较)，此时由(26)、(27)式，c_i 仅为 $\delta=\alpha B$ 及 μ 的函数，但 γ 还与 k 有显式关系，此图已令 $B=0.25$，可见 $\alpha=0$ 时，约 $k<5$ 为不稳定区域，$\alpha>0$，即南坡，γ 的高值中心随 α 增加而向小 k 方向移动，γ 在 $\alpha=1.6$ 附近达最大。在 $\alpha<0$，随 $|\alpha|$ 增大，不稳定区域越来越窄，这一特征与文献[6]中二维的Eady 解的特征完全一致。对照 $B=0.1$，因此时坡度影响以 δ 的形式出现，故现在因 B 变小，同样的 δ 所相应的 α 变大，同样的 μ 其 k 变大，故曲线向大 α 及大 k 方向移动。且因 k 变大，相应的 γ 亦变大。因同一个 μ 相应的 k 变大了，故在 k 坐标中不稳定的范围变大了。

图 2 是 $B=0.25,G=0.4$，计入 R 后当取 $z_{01}=0.1$ m 时的结果，此相当于陆地情况。与无摩擦比，γ 高值中心附近的 γ 值变小，但在离高值中心较远的部分，γ 增加了，不稳定带变宽，这与文献[2]中无地形时的结果一致。对于不稳定带的增宽，Pedlosky[3] 从能量变换上作过解释，文献[2]中的数值试验也说明了此问题。本文计算结果说明，在不稳定带增宽的部分，其 γ 值均很小，且随离 γ 高值中心的距离的增加衰减很快，除接近原来 $R=0$ 时的不稳定带的边缘部分以外，大部分区域其 γ 值均可忽略不计。

由图 2 见，对 α 的变化仍然是 $\alpha>0$ 部分 γ 更大，而 $\alpha<0$ 时不稳定带变窄，其特征与图 1 同，$B=0.1$ 的情况亦类似图 1，因此有地形摩擦时的结果反映了摩擦与地形的共同影响。这是由于本文下界条件是线性的，包括了地形与摩擦，因而解中简单地反映了两个因子相加后的结果。

图 2 可见 γ_{max} 中心在南坡，即南坡更有利于斜压不稳定的发展。γ_{max} 中心在 $k=2$—3 间，相当于波长在 4000—6000 km间；而北坡，γ_{max} 在 $k=4$—5 间，相应波长<3000 km，南

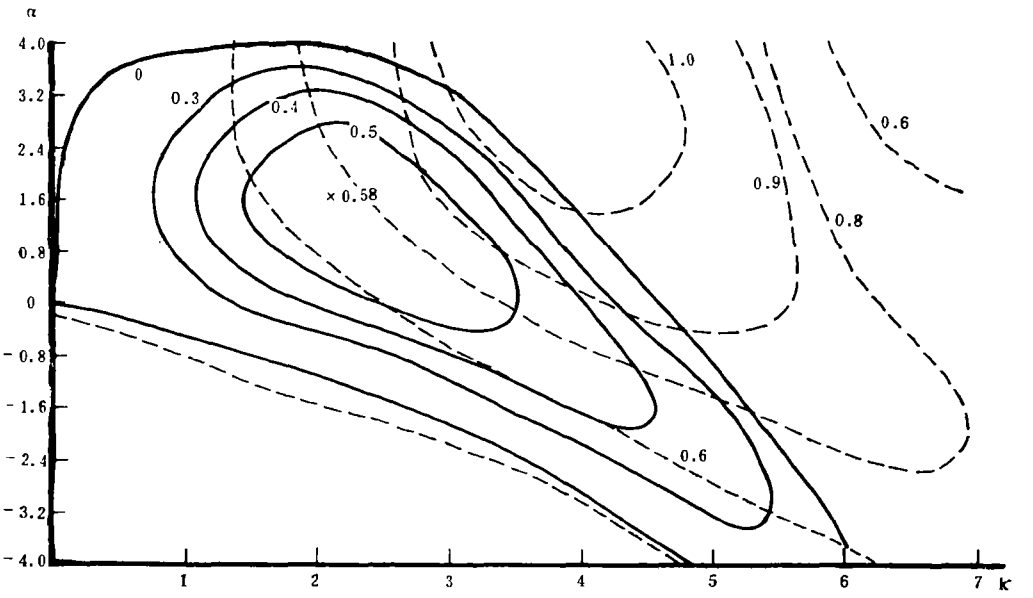


图 1 波幅增长率 γ 与 α,k 的关系
($B=0.25$,虚线为 $B=0.1$)

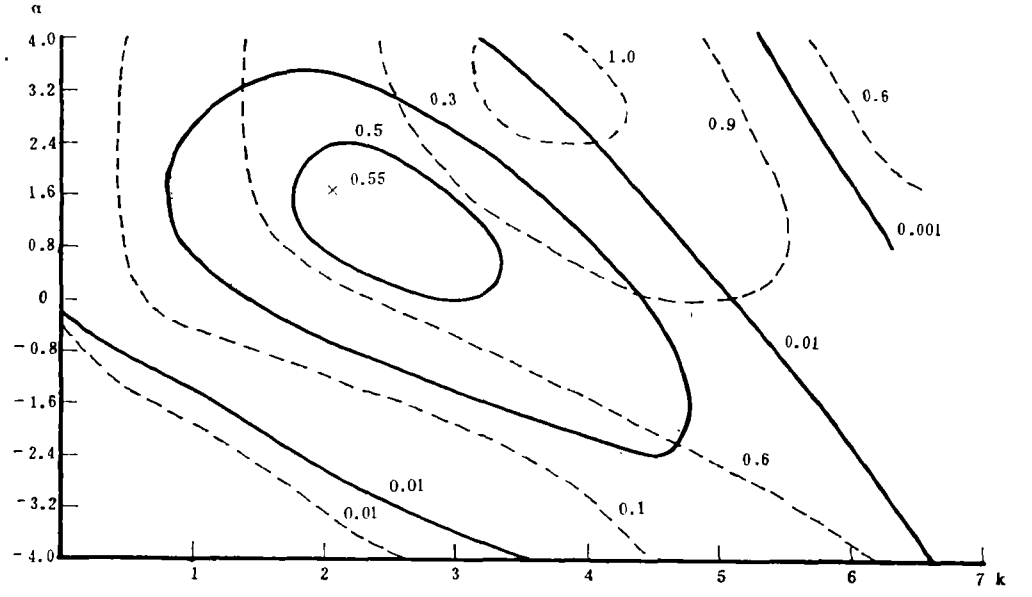


图 2 计入摩擦后波幅增长率 γ 与 α,k 的关系
($B=0.25$,$z_{01}=0.1$ m,$G=0.4$,虚线为 $B=0.1$)

坡相应的不稳定波长更接近实际一些。由于 γ 值南坡大，因此南坡总的说有利于斜压不稳定,这支持文献[4,5]中关于阿尔卑斯山背风气旋生成频率高的解释。

我们还计算了 γ 对 G 和 f 的敏感性。当 $G=0.6$,$B=0.25$，结果在 γ 高值中心附近，γ 略小一些,而其余部分略增一些。当 $G=0.4$,但 f 取相应于纬度 60°的值,即更高纬度，

且 $B=0.25$，则 γ 高值中心部分 γ 略增一些，其余部分略减一些。反映了大 G 及小 f 相应于大摩擦所具有的特征。这从(14)、(15)式亦可解释。

三、一般化 Eady 问题中摩擦和地形的影响

上面研究了风线性随高度增加的 Eady 模式，William[10]提出了地转风对高度不是线性增加的一般化 Eady 问题。我们将讨论这情况下摩擦和地形的影响。为了能得到解，William假定在 $B(z)$ 或 $\frac{\partial\theta}{\partial z}$ 的铅直分布与风速的铅直分布间存在一定的关系。我们采用类似 William 的基本假定，但在本文尺度系统中进行。由于此时考虑 B 不再是常数，且 U 对 z 不是线性，则由(8)式，在设 $\phi=\Phi e^{ik(x-ct)}$ 后即得：

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-k^2\Phi-\frac{\Phi}{U-c}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial U}{\partial z}\right)\right]=0 \tag{29}$$

仿 William，设 $\frac{1}{B(z)}\frac{\partial U}{\partial z}=$常数，并设：

$$\frac{\partial U}{\partial z}=\sigma=(1-\varepsilon z)^{-4/3} \tag{30}$$

又设

$$B(z)=\frac{N_0^2H^2}{f^2L^2}=\frac{H^2N_0^2}{f^2L^2}n^2 \tag{31}$$

其中

$$n^2=\sigma \tag{32}$$

N_0 是 $z=0$ 处的 N 值，(30)式中参数 ε 决定了风铅直切变的大小，而假定(32)式则给定了一个对层结的约束，这样就能简单地得到解。为避免这假定的过份失真，我们将在 ε 变化不大时求解。在设 $\Phi=A(z)\cos ly$ 后(29)式成为：

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial z}\right)-(l^2+k^2)A=0 \tag{33}$$

$$\frac{f^2L^2}{H^2N_0^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{n^2}\frac{\partial A}{\partial z}\right)-(l^2+k^2)A=0 \tag{34}$$

令 $B_0=\frac{H^2N_0^2}{f^2L^2}$，并令 $B_0n^2dz=d\eta$，由(31)式见 B_0 是 $z=0$ 处的 B，于是(34)式化为：

$$\frac{\partial^2A}{\partial\eta^2}-\frac{(l^2+k^2)}{B_0n^2}A=0 \tag{35}$$

(35)式之解为：

$$A=(1-\varepsilon z)^{-\frac{1}{3}}\{A_1e^{\frac{3\lambda}{\varepsilon}[1-(1-\varepsilon z)^{\frac{1}{3}}]}+A_2e^{-\frac{3\lambda}{\varepsilon}[1-(1-\varepsilon z)^{\frac{1}{3}}]}\} \tag{36}$$

其中

$$\lambda=(l^2+k^2)^{\frac{1}{2}}B_0^{\frac{1}{2}}$$

可见 λ 相当于前一节中的 μ，(33)式的边界条件仿(23)、(24)式应为：

$$(G-c)\frac{dA}{dz}-\left\{\frac{\partial U}{\partial z}-B_0\left[(ikRG+\alpha)+\frac{iRGl^2}{k}\right]\right\}A=0 \quad \text{当 } z=0 \tag{37}$$

$$\left[G+\frac{3(\alpha^{-1}-1)}{\varepsilon}-c\right]\frac{dA}{dz}-\frac{\partial U}{\partial z}A=0 \quad \text{当 } z=1 \tag{38}$$

此时已设大气中 U 由 $z=0$ 处的 G 按(30)式增加到 $z=1$ 处的 $\frac{3(\alpha^{-1}-1)}{\varepsilon}+G$，此处 $\alpha=(1-\varepsilon)^{\frac{1}{3}}$，

由(36)—(38)式解本征值问题，得：

$$a_2c^2+b_2c+c_2c=0 \tag{39}$$

其中

$$a_2=\lambda^2+\frac{e}{3}(a^{-1}-1)\lambda\,\mathrm{cth}\,\zeta-\left(\frac{e}{3}\right)^2a^{-1},$$

$$b_2=-2\lambda^2G-\left(1-\frac{Ge}{3}-B_0\xi\right)\left(\lambda\,\mathrm{cth}\,\zeta+\frac{e}{3}a^{-1}\right)-\frac{e}{3}a^{-2}(1-a)\zeta\,\mathrm{cth}\,\zeta$$

$$-\lambda\,\mathrm{cth}\,\zeta\left(\frac{2e}{3}Ga^{-1}-a^{-2}-\frac{eG}{3}\right)+\left(\frac{e}{3}\right)^2(a^{-1}G+a^{-2}\zeta/\lambda)-\lambda\zeta a^{-1}-\frac{e}{3}a^{-2},$$

$$c_2=\left(1-\frac{eG}{3}-B_0\xi\right)\left(\lambda G\,\mathrm{cth}\,\zeta+\frac{e}{3}a^{-1}G+\zeta a^{-1}\,\mathrm{cth}\,\zeta+\frac{1}{3}ea^{-2}\zeta/\lambda-a^{-2}\right)$$

$$+G\lambda\left(G\lambda+\frac{e}{3}a^{-1}G\,\mathrm{cth}\,\zeta+\frac{e}{3}a^{-2}\zeta\,\mathrm{cth}\,\zeta/\lambda-a^{-2}\,\mathrm{cth}\,\zeta+\zeta a^{-1}\right)$$

而

$$\zeta=3\lambda\frac{1-a}{e},\quad \xi=ikRG+\alpha+i\frac{RGl^2}{k}$$

由(39)式求 c，即可得 c_i，因太繁，我们不再写出。

图 3 是 $e=0.1, G=0.4, B_0=0.25, R=0$ 时的 γ 图，此 e 值相当于风随高度增加快于线性，与图 1 相比，最大 γ 比图 1 大，最大增长率相应的 k 值仍如前，但北坡 γ 增长比图 1 大，范围也宽，整个来说不稳定范围也比图 1 大。图 4 是 $e=-0.25$，即风增长慢于Eady波时的情况，可见不稳定区主要限于 $\alpha>0$，即其变化趋势与图 3 正相反，且 γ 极值亦变小，不稳定范围亦变小。这说明地形影响与风切变有关。这也说明斜压性越强，则 γ 值亦越大，不稳定范围亦越大。如果看 $\alpha=0$ 的特例，比较图 1,3,4，对不同 e，γ_{max} 均在 $k=3$ 附近，但 $e<0$ 时，γ_{max} 最小，$e>0$ 则反之。

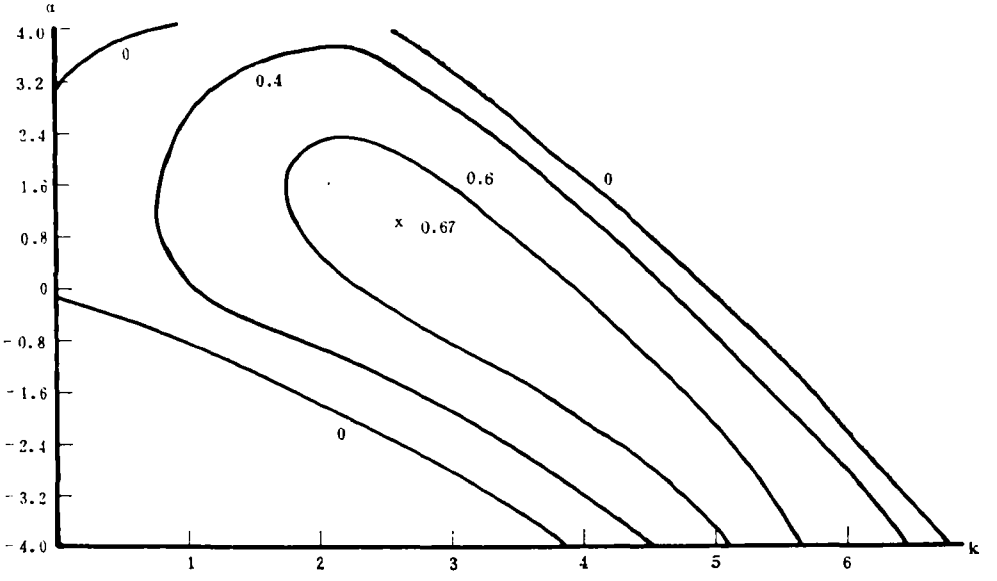


图 3 一般化 Eady 波的 γ 分布
($e=0.1, R=0, B_0=0.25, G=0.4$)

若计入摩擦，如图 5，和 Eady 波类似，在扩大的不稳定区内，虽然增长率大于零，但很小，而在 γ 的高值区，摩擦使 γ 减少，但总的说，γ 高值部分减弱并不大。总之，在一般化

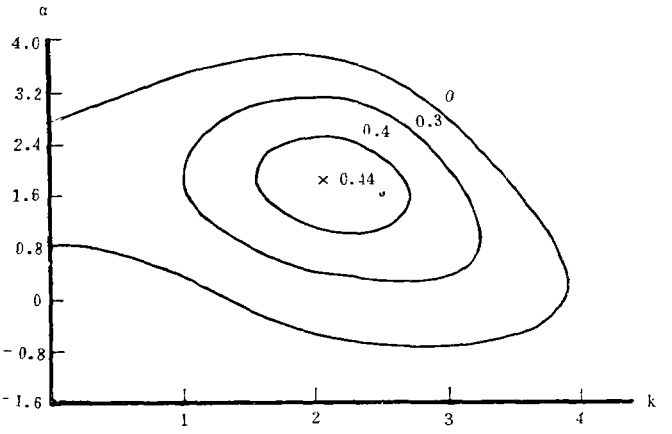


图 4　一般化 Eady 波的 γ 分布
($\varepsilon=-0.25, B_0=0.25, G=0.4, R=0$)

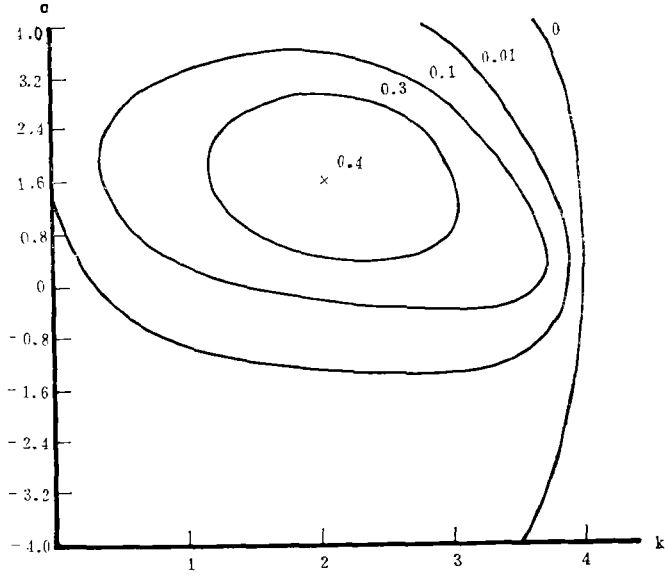


图 5　有摩擦时一般化 Eady 波，
($\varepsilon=-0.25, B_0=0.25, G=0.4, z_{01}=0.1$ m)

Eady 波中考虑地形和摩擦时，其结果中保持了地形和摩擦各自作用的影响，摩擦影响的特征同 Eady 波，但地形影响与 Eady 波有差别。

在实际大气中风的铅直增长到对流层上部逐渐变慢，若把整层大气一起考虑，近似地说，主要是相应于 $\varepsilon<0$ 的情况，有的研究[4,5]指出对阿尔卑斯背风气旋的发展来讲，与山南侧斜压波动的发展密切有关，我们曾分析 Mesinger[11] 等所研究的几次阿尔卑斯背风气旋的情况，在扰动的上游风随高度的增长速率基本上是愈上愈慢，即相应于 $\varepsilon<0$，按我们结果，扰动应集中在南坡，这也支持了文献[4,5]的结果。

四、边界层层结的影响

以上讨论摩擦时，(10)式的 w 是设边界层层结为中性时得到的，在边界层为非中性时，我们先从 PBL 相似理论出发推导一个二维 Eady 问题中适用的非中性边界层顶垂直速度公式，然后讨论摩擦的影响。二维 Eady 问题即是将(9)式中 ∇^2 取为 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ 而得，边条件仍用(11)及(16)式。

在推导 w 公式时，我们用有量纲量。边界层顶垂直速度可写成[12]：

$$w_{f1}=\frac{1}{\rho_1 f}(\nabla\times\boldsymbol{\tau}_1)_z=\frac{1}{\rho_1 f}\mathbf{k}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{\tau}_1) \tag{40}$$

$\boldsymbol{\tau}_1$ 为地面湍流切应力矢，下标 z 表 z 方向分量。$\mathbf{k}$ 为铅直方向单位矢。(40)式可写成：

$$w_{f1}=\frac{1}{\rho_1 f}\mathbf{k}\cdot(\nabla\times\rho_1 u_{*1}\mathbf{u}_{*1}) \tag{41}$$

$\boldsymbol{u}_{*1}$ 为摩擦速度矢，它与 $\boldsymbol{\tau}_1$ 同向，略去 ρ_1 的铅直变化，并视边界层为正压，将 $\boldsymbol{u}_{*1}$ 在 $\boldsymbol{V}_{g1}$ 及 $\mathbf{k}\times\boldsymbol{V}_{g1}$ 为轴的坐标系中分解，则：

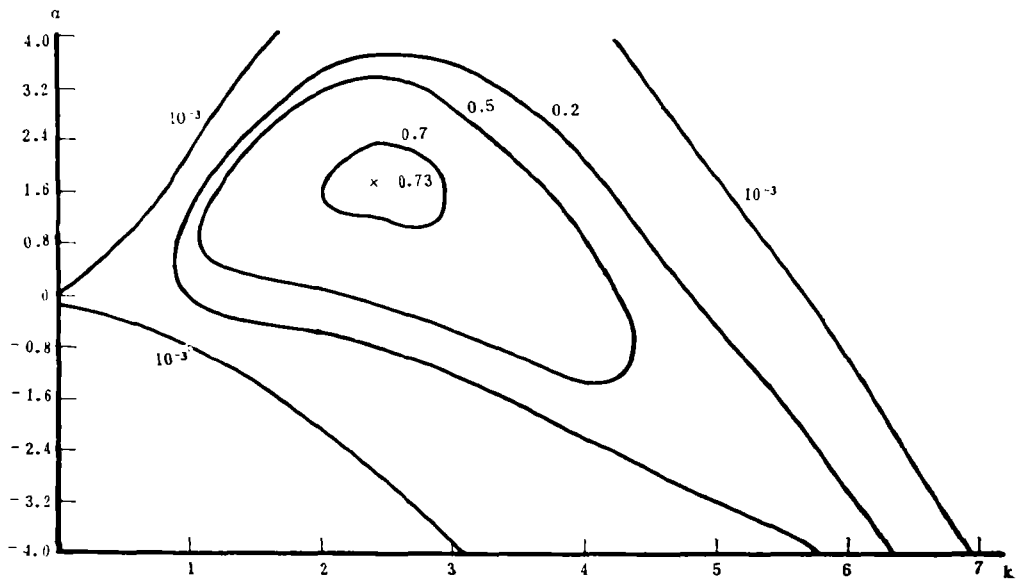


图 6 二维 Eady 问题的 γ 值
($\Delta\theta_1=10°$, $B=0.25$, $z_{01}=0.1$ m, $G=0.4$)

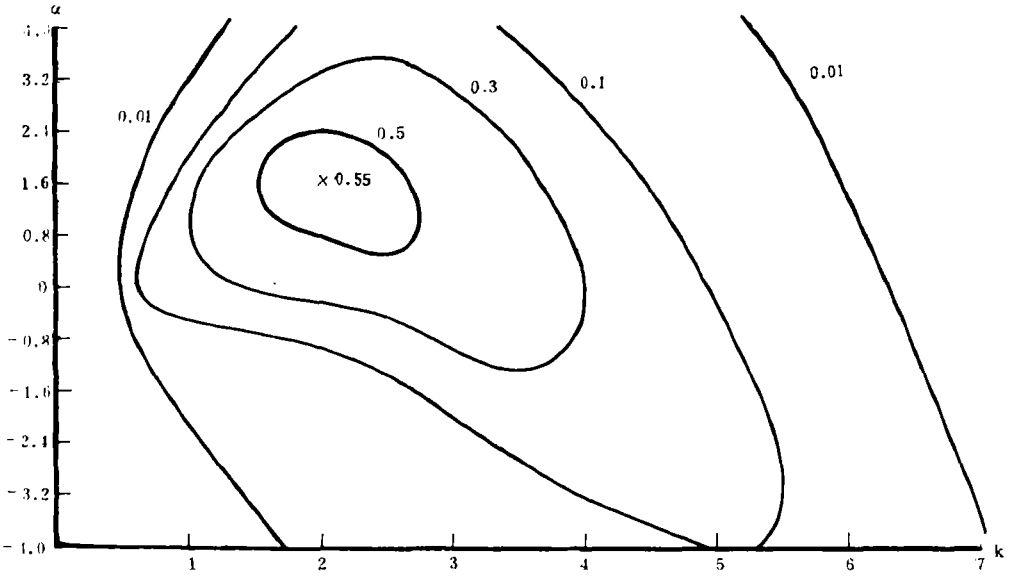


图 7 二维 Eadx 问题的 γ 值
($\Delta\theta_1=-5°$, 其余同图 6)

$$w_{f1}=\frac{1}{f}\mathbf{k}\cdot\nabla\times(c_g^2\cos\beta V_{g1}\mathbf{V}_{g1})+\frac{1}{f}\mathbf{k}\cdot\nabla\times(c_g^2\sin\beta V_{g1}\mathbf{k}\times\mathbf{V}_{g1}) \tag{42}$$

c_g 定义见第一节，β 为 u_{*1} 与 V_{g1} 间夹角，从 PBL 理论可知[12]，c_g，β 是 $\mathrm{Ro}_b=\frac{G_1}{fz_{01}}$ 及稳定度参数 $S=\frac{g}{\theta_1}\frac{\Delta\theta_1}{fG_1}$ 的函数。$\Delta\theta_1$ 是边界层顶底间位温差。文献[9]中有如下公式：

$$c_g=\sum_{j=0}^{3}\sum_{i=0}^{3}a_k\widetilde{\mathrm{Ro}}_b^i\tilde{S}^j \qquad k=3j+i \tag{43}$$

$$\beta=\sum_{j=0}^{3}\sum_{i=0}^{3}b_k\widetilde{\mathrm{Ro}}_b^i\tilde{S}^j \qquad k=3j+i \tag{44}$$

其中 $\widetilde{\mathrm{Ro}}_b=1\mathrm{g}\,\mathrm{Ro}_b$，$\tilde{S}=0.001\,S$，系数 a_k,b_k 见文献[9]。由此知道 $G,\Delta\theta_1,z_0,f$ 等参数即可求 c_g 及 β。实际上 c_g 和 β 随空间位置的变化远小于 V_{g1} 随空间的变化。在(42)式中可将其提出微分号外：

$$w_{f1}=\frac{1}{f}\mathbf{k}\cdot c_g^2\cos\beta\nabla\times(V_{g1}\mathbf{V}_{g1})+\frac{1}{f}\mathbf{k}\cdot c_g^2\sin\beta\nabla\times(V_{g1}\mathbf{k}\times\mathbf{V}_{g1}) \tag{45}$$

用矢量微分公式对(45)式运算，注意到 $\nabla\cdot\boldsymbol{V}_{g1}=0$，得：

$$w_{f1}=\frac{\mathbf{k}}{f}\cdot c_g^2\cos\beta(\nabla V_{g1}\times\mathbf{V}_{g1}+V_{g1}\nabla\times\mathbf{V}_{g1})+\frac{\mathbf{k}}{f}\cdot c_g^2\sin\beta(\nabla V_{g1}\cdot\mathbf{V}_{g1})\mathbf{k} \tag{46}$$

对(46)式作线性化处理，即微分号外的 V_{g1} 或 $\boldsymbol{V}_{g1}$ 以 x 方向基流 G_1 或 $\boldsymbol{G}_1$ 代替(实际上在二维情况，因 $\frac{\partial\phi}{\partial y}=0$，$x$ 方向扰动速度等于零)，

$$w_{f1}=\frac{c_g^2\cos\beta G_1}{f}(\nabla\times\mathbf{V}_{g1})_z+\frac{c_g^2\sin\beta}{f}G_1\frac{\partial V_{g1}}{\partial x}$$

再化为无量纲，得：

$$w_f=\left(\frac{c_g^2\cos\beta G}{f}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{c_g^2\sin\beta G\dfrac{\partial\phi}{\partial x}}{fV_g}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)\frac{V}{H} \tag{47}$$

因 $\left|\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|\ll G$，又对大气中一般的 β 角，$\sin\beta<\cos\beta$，于是可忽略(47)式中第二项，

$$w_f=\left(\frac{c_g^2\cos\beta G}{f}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)\frac{V}{H} \tag{48}$$

边界层层结及粗糙度影响了 c_g 及 β，于是也影响 w 及波动不稳定性。将(48)式引入(11)式，得下界条件如(14)式，而

$$R=\frac{1}{\varepsilon_r f}c_g^2\cos\beta\frac{V}{H}$$

上界条件仍如(16)式。此时 Eady 本征值问题的解仍如(26)式，只要令(22)、(27)式中 $l=0$ 即可。取 $z_{01}=0.1$ m，$B=0.25$，$G=0.4$，$\Delta\theta_1=10°$及$-5°$分别代表稳定及不稳定层结，其 γ 值分别如图 6,7。二者相比，可见图 6 的 γ 值要大得多，原来 $R=0$ 时稳定的区域现在变为不稳定的程度都比图 7 小。又不仅图 6 γ 极值较大，而且高 γ 值的区域面积也较大。造成这些现象的原因正是由于二者有不同温度层结，图 7 相应于不稳定层结，故湍流加强，摩擦加大。

图 8 是 $\Delta\theta_1=-5°$，但 $z_{01}=10^{-4}$ m，$\alpha=0$ 时的 γ 与 $z_{01}=10^{-1}$ m 时 γ 值之比，此 z_{01} 值分别代表海、陆。可见虽然 $\Delta\theta_1$ 相同，但若 z_{01} 小则摩擦小，从而 γ 大，这说明边界层热层结及下垫面粗糙度均对 γ 有影响。

实际大气中扰动的发展有各种原因，本节讨论的边界层影响只是一种，不一定是主要的。例如暖下垫面的加热作用可能是某些气旋发展的重要原因，但这时较大的边界层摩

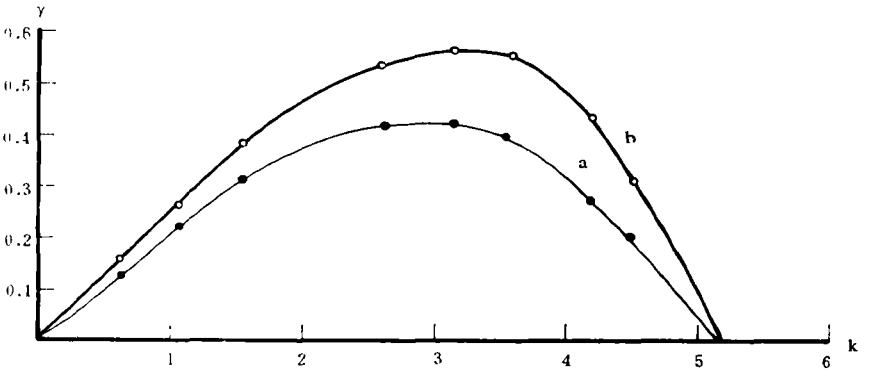


图 8 $\Delta\theta_1=-5°, B=0.25, \alpha=0$ 时 $z_{01}=10^{-1}$ 及 10^{-4} m 的 γ 值比较
(曲线 a 为 10^{-1} m, b 为 10^{-4} m)

擦可能抵消了一部分加热的影响。另一方面，全球气旋的高发生频率区有不少是在大洋上，洋面上 z_0 小，容易造成不稳定增长亦可能是原因之一。

五、结 论

本文研究了边界层摩擦和地形对斜压不稳定的影响，用了新的边界层参数化方法，能较精确地得到对波幅增长率影响的估计。特别讨论了边界层热力层结及粗糙度的影响，得到了一些新结论。对进一步探讨边界层与自由大气的相互作用有意义。对地形，本文不仅将其与边界层层结结合起来，而且探讨了一般 Eady 波。本文的一些结论还主要限于理论方面，需要结合天气实践进一步探讨，理论方法也需进一步完善化。

参 考 文 献

[1] Eady, E. T., Long waves and cyclone waves, *Tellus*, 1, 33—52, 1949.
[2] Fischer, G., E. Heise and V. Renner, The effect of surface friction on the development of cyclone-waves in numerical model, *Beitr. Phys. Atmos.*, **46**, 157—181, 1973.
[3] Pedlosky, J., *Geophysical Fluid Dynamics*, 423—539, Springer-Verlag, 1979.
[4] Speranza, A., A. Buzzi, A. Trevisan and P. Malguzzi, A theory of deep cyclogenesis in the lee of Alps, part 1: Modification of baroclinic instability by localized topography, *J. Atmos. Sci.*, **42**, 1521—1535, 1985.
[5] Buzzi, A., and A. Speranza, A theory of deep cyclogenesis in the lee of Alps, Part 2, Effects of finite topographic slope and height, *J. Atmos. Sci.*, **43**, 2826—2837, 1986.
[6] Blumsack, S. L., and P. J. Gierasch, Mars: the effects of topography on baroclinic instability, *J. Atmos. Sci.*, 29, 1081—1089, 1972.
[7] Zhao, M., On the parameterization of the vertical velocity at the top of the PBL, *Adv. Atmos. Sci.*, **4**, 233—239, 1987.
[8] 赵 鸣，边界层抽吸引起的旋转减弱，大气科学，13，343—351，1989。
[9] Yordanov, D., S. Syrakov and G. Djolov, A barotropic PBL, *Bound.-Layer Meteor.*, **25**, 363—374, 1983.
[10] William, G. P., Generalized Eady waves, *J. Fluid Mech.*, **62**, 643—655, 1974.
[11] Mesinger, F., and F. Strickler., Effects of mountains on Genoa cyclogenesis, *J. Meteor. Soc. Japan*, **60**, 326—338, 1982.
[12] Зилитинкевич, С. С., *Динамика пограницкой слой атмосферы*, 143, 235. *Гидрометеоиздат*, 1970.
[13] Mechoso, C. R., Baroclinic instability of flows along sloping boundaries, *J. Atmos. Sci.*, 37, 1393—1399, 1980.

THE EFFECTS OF BOUNDARY LAYER FRICTION AND TOPOGRAPHY ON THE INSTABILITY OF BAROCLINIC WAVES

Zhao Ming

(*Department of Atmospheric Sciences, Nanjing University*)

Abstract

In this paper, the simultaneous effect of boundary layer friction and topography on the instability of Eady wave is investigated by using a new parameterization of the vertical velocity at the top of PBL and the influences of the stratification of the PBL, roughness and the slope of terrain are shown. Furthermore, the effects of boundary layer friction and topography on the generalized Eady wave are also investigated.