第47卷 第4期　　气 象 学 报　　Vol. 47, No. 4
1989年11月　　ACTA METEOROLOGICA SINICA　　Nov., 1989

摩擦耗散大气中切变流的非线性稳定性*

陆 维 松

（南京气象学院）

提 要

本文从包含摩擦耗散的非线性准地转方程组和包含摩擦耗散与大地形作用的非线性浅水波方程组出发，使用了 Serrin-Joseph 的能量方法，利用变分原理，分别用总能量和总位涡拟能导得这两个方程组的切变基流的非线性稳定性判据。

一、引 言

稳定性问题是大气动力学的重要问题之一。由于任何真实的流动，既是非线性的，又是有摩擦耗散的，所以，要较为准确地研究它们的稳定性，则需要考虑这两种因子作用。Pedlosky (1964) 研究了准地转切变流中正压和斜压联合不稳定的判据，仅适用线性情况[1,2]。Blumen(1968)得到无摩擦的准地转定常基流的非线性稳定性的充分条件[3]，他在 1970 年研究了无粘可压缩流体的切变流的稳定性[4]，Satomura(1982,1986)用数值试验对 Froude 数为 5 时研究了非线性和粘性对辐散切变流稳定性的影响[5]，并在理论上研究了线性情况下浅水中含地形作用的粘性切变流的稳定性条件[6]，还声称对此作有限振幅分析是困难的。曾庆存(1986)导得了不含摩擦耗散的准地转方程组和浅水波方程组的非线性稳定性的充分条件[7]。Henrotay(1983)用能量方法得到二层模式的含Ekman 摩擦的非线性斜压不稳定判据，并指出推广到既含水平切变又含垂直切变的基流仍然是困难的[8]。对于有摩擦耗散时准地转水平和垂直联合切变基流与浅水波方程切变基流的非线性稳定条件至今未有人研究过。本文从含 Ekman 摩擦的二层非线性准地转方程组和含摩擦耗散与大地形作用的非线性浅水波方程组出发，利用 Serrin-Joseph(1959, 1965) 提出的一种新的能量方法[9,10]，分别用总能量和总位涡拟能，按变分原理，直接从这二个方程组分别导得非线性稳定性判据。

二、准地转切变流的非线性稳定性

含 Ekman 摩擦的二层非线性准地转方程组[11]为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\psi_1}{\partial X}\frac{\partial}{\partial Y}-\frac{\partial\psi_1}{\partial Y}\frac{\partial}{\partial X}\right)[\nabla^2\psi_1-F(\psi_1-\psi_2)+\beta Y]=-\frac{r}{2}\nabla^2\psi_1+Q_1 \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\psi_2}{\partial X}\frac{\partial}{\partial Y}-\frac{\partial\psi_2}{\partial Y}\frac{\partial}{\partial X}\right)[\nabla^2\psi_2+F(\psi_1-\psi_2)+\beta Y]=-\frac{r}{2}\nabla^2\psi_2+Q_2 \tag{2}$$

式中 F 是 Froude 数，r 是 Ekman 摩擦系数，Q_1, Q_2 分别是对应下标的非绝热加热。其它符号均为气象上常用的。方程(1)、(2)均为无量纲的。

将(1)、(2)两式中扰动量与基本量分开，

* 本文于 1987 年 11 月 9 日收到，1988 年 7 月 2 日收到最后修改稿。该文是国家自然科学基金资助项目。

$$\psi_j=\bar{\psi}_j(Y)+\psi'_j \quad Q_j=\bar{Q}_j+Q'_j \qquad (j=1,2) \tag{3}$$

设所有的变量在X方向都取为周期的，而

$$Y=\pm 1,\ \psi'_j=0 \quad 或 \quad v'_j=\frac{\partial \psi'_j}{\partial X}=0 \qquad (j=1,2) \tag{4}$$

即流体被限制在南北为刚壁的渠道中，并设平均非绝热加热项$\bar{Q}_1,\bar{Q}_2$分别与对应层次的平均 Ekman 摩擦相平衡，且不考虑扰动非绝热加热项，$Q'_1=Q'_2=0$。下文中扰动量均略去撇号。

1．总能量变分问题

利用(3)式，由(1)、(2)式得扰动总能量方程为

$$\frac{dE}{dt}=-rD_E+P_E \tag{5}$$

式中

$$\begin{cases} E=\frac{1}{2}\langle|\nabla\psi_1|^2+|\nabla\psi_2|^2+F(\psi_1-\psi_2)^2\rangle \qquad D_E=\frac{1}{2}\langle|\nabla\psi_1|^2+|\nabla\psi_2|^2\rangle \\ P_E=\left\langle\frac{d\bar{u}_1}{dY}\frac{\partial\psi_1}{\partial X}\frac{\partial\psi_1}{\partial Y}+\frac{d\bar{u}_2}{dY}\frac{\partial\psi_2}{\partial X}\frac{\partial\psi_2}{\partial Y}+\frac{1}{2}FU_T\left(\psi_1\frac{\partial\psi_2}{\partial X}-\psi_2\frac{\partial\psi_1}{\partial X}\right)\right\rangle \end{cases} \tag{6}$$

其中$U_T=\bar{u}_1-\bar{u}_2$，上面的角括号表示在X方向上的一个波长和在Y方向上从-1到$+1$的面积平均。D_E是能量耗散项，P_E是能量产生项(不定号)。(5)式可化为

$$\frac{dE}{dt}\leqslant-(r-r_1^*)D_E \tag{10}$$

当$r>r_1^*$，则$\frac{dE}{dt}\leqslant 0$。因此，按照 Serrrin 的定义[9]，$r>r_1^*$是平均稳定性的充分条件，且对所有满足边界条件的ψ成立，$r_1^*=\mathrm{Max}\left(\frac{P_E}{D_E}\right)$。则此极大值问题，可利用变分原理[12]，有

$$\delta(D_E-\mu P_E)=0 \tag{11}$$

式中δ是变分算符，μ是 Lagrange 乘子。μ也是方程$\frac{1}{\mu}=\frac{P_E}{D_E}$的本征函数对应的本征值。

由(11)式得对应的 Euler-Lagrange 方程为

$$\nabla^2\psi_1-\mu\left\{\left(2\bar{u}_1'\frac{\partial^2\psi_1}{\partial X\partial Y}+\bar{u}_1''\frac{\partial\psi_1}{\partial X}\right)-FU_T\frac{\partial\psi_2}{\partial X}\right\}=0 \tag{12}$$

$$\nabla^2\psi_2-\mu\left\{\left(2\bar{u}_2'\frac{\partial^2\psi_2}{\partial X\partial Y}+\bar{u}_2''\frac{\partial\psi_2}{\partial X}\right)+FU_T\frac{\partial\psi_1}{\partial X}\right\}=0 \tag{13}$$

这是一个变系数的线性偏微分方程组，令

$$\psi_j=\phi_j(Y)\exp\{ik(X-ct)\} \qquad (j=1,2) \tag{14}$$

(12)、(13)式中的撇号表示对Y的微分。(14)式代入(12)、(13)两式得

$$\left(\frac{d^2}{dY^2}-k^2\right)\phi_1-ik\mu\{(2\bar{u}_1'\phi_1'+\bar{u}_1''\phi_1)-FU_T\phi_2\}=0 \tag{15}$$

$$\left(\frac{d^2}{dY^2}-k^2\right)\phi_2-ik\mu\{(2\bar{u}_2'\phi_2'+\bar{u}_2''\phi_2)+FU_T\phi_1\}=0 \tag{16}$$

作运算$\int_{-1}^{1}\phi_1^*(18)dY$和$\int_{-1}^{1}\phi_2^*(19)dY$，$\phi_1^*,\phi_2^*$为$\phi_1,\phi_2$复共轭，

$$(I_1^2+k^2I_0^2)+ik\mu\{[\bar{u}_1''|\phi_1|^2]+[W_1]\}=0 \tag{17}$$

$$(J_1^2+k^2J_0^2)+ik\mu\{[\bar{u}_2''|\phi_2|^2]+[W_2]\}=0 \tag{18}$$

式中

$$\begin{cases}[(\ \ )]=\int_{-1}^{1}(\ \ )dY,\quad I_n^2=\left[\left|\dfrac{d^n\phi_1}{dY^n}\right|^2\right],\ J_n^2=\left[\left|\dfrac{d^n\phi_2}{dY^n}\right|^2\right]\quad (n=0,1,2)\\ W_1=2\,\bar{u}_1'\phi_1'\phi_1^*-FU_T\phi_1^*\phi_2,\ W_2=2\,\bar{u}_2'\phi_2'\phi_2^*+FU_T\phi_1\phi_2^*\end{cases} \tag{19}$$

由(17)、(18)两式的实部可得

$$(I_1^2+k^2I_0^2)-k\mu[I_m(W_1)]=0 \tag{20}$$

$$(J_1^2+k^2J_0^2)-k\mu[I_m(W_2)]=0 \tag{21}$$

$I_m(\ \ )$表示取括号中量的虚部，利用下面不等式，

$$\begin{aligned}[I_m(W_1)]&=\frac{1}{i}\left[\bar{u}_1'(\phi_1'\phi_1^*-\phi_1^{*\prime}\phi_1)+\frac{F}{2}U_T(\phi_1\phi_2^*-\phi_1^*\phi_2)\right]\\ &\leqslant\left[|\bar{u}_1'||\phi_1'\phi_1^*-\phi_1^{*\prime}\phi_1|+\frac{F}{2}|U_T|\cdot|\phi_1\phi_2^*-\phi_1^*\phi_2|\right]\\ &\leqslant 2|\bar{u}_1'|_{max}[|\phi_1'|\cdot|\phi_1|]+F|U_T|_{max}[|\phi_1|\cdot|\phi_2|]\\ &\leqslant 2|\bar{u}_1'|_{max}I_0I_1+F|U_T|_{max}I_0J_0\end{aligned} \tag{22}$$

上式中最后一不等式利用了 Schwarz 不等式。同理，

$$[I_m(W_2)]\leqslant 2|\bar{u}_2'|_{max}J_0J_1+F|U_T|_{max}I_0J_0 \tag{23}$$

将(22)、(23)两式代入(20)、(21)两式，得

$$\frac{1}{\mu}\leqslant k\{2|\bar{u}_1'|_{max}I_0I_1+F|U_T|_{max}I_0J_0\}/(I_1^2+k^2I_0^2)=r_1 \tag{24}$$

$$\frac{1}{\mu}\leqslant k\{2|\bar{u}_2'|_{max}J_0J_1+F|U_T|_{max}I_0J_0\}/(J_1^2+k^2J_0^2)=r_2 \tag{25}$$

由(10)式可知，当

$$r>r_1\quad 且\quad r>r_2 \tag{26}$$

时，所有的扰动都是稳定的。(24)、(25)式中包含了基流的水平和垂直切变。因此，这是由总能量导得的非线性正压和斜压联合稳定性判据。

对于满足边界条件 $U_T|_{y=\pm1}=0$ 的各种基流，可得显式判据。作运算$[((15)\pm(16))\cdot(\phi_1\pm\phi_2)^*]$，其虚部为

$$[\bar{u}_1'\mathrm{Re}(\phi_1'\phi_2^*)+\bar{u}_2'\mathrm{Re}(\phi_2'\phi_1^*)]-\frac{F}{2}[U_T(|\phi_1|^2-|\phi_2|^2)]=0 \tag{27}$$

$$[\bar{u}_1'\mathrm{Re}(\phi_1'\phi_2^*)+\bar{u}_2'\mathrm{Re}(\phi_2'\phi_1^*)]+\frac{F}{2}[U_T(|\phi_1|^2-|\phi_2|^2)]=0 \tag{28}$$

可得

$$[U_T(|\phi_1|^2-|\phi_2|^2)]=0 \tag{29}$$

而(17)式的虚部为

$$k\mu[\bar{u}_1''|\phi_1|^2+\mathrm{Re}(W_1)]=-\frac{Fk}{2}\mu[U_T(\phi_1^*\phi_2+\phi_1\phi_2^*)]=0$$

或

$$[U_T(\phi_1^*\phi_2+\phi_1\phi_2^*)]=0 \tag{30}$$

式中 Re(　)表示取实部。对于许多常见的对称性基流，总有 $U_T|_{y=\pm1}=0$，则由熟知的变分法引理[13]，从(29)、(30)两式得

$$|\phi_1|^2-|\phi_2|^2=0\quad 或\quad |\phi_1|^2=|\phi_2|^2 \tag{31}$$

$$\phi_1{}^*\phi_2+\phi_1\phi_2{}^*=0 \quad \text{或} \quad \frac{\phi_1}{\phi_1{}^*}=-\frac{\phi_2}{\phi_2{}^*} \tag{32}$$

若 $\phi_1=|\phi_1|e^{i\alpha_1}$，$\phi_2=|\phi_2|e^{i\alpha_2}$，则由(32)式得，$\alpha_1=\alpha_2-\frac{\pi}{2}$。即上层 ϕ_1 的位相比下层 ϕ_2 的位相落后$\frac{\pi}{2}$，也即槽线随高度向西倾斜。利用(31)式、(14)式，得

$$\mathrm{Re}(\psi_1+\psi_2)=\frac{\sqrt{2}}{4}|\phi_1|\cos\left(\alpha_2-\frac{\pi}{4}\right) \tag{33}$$

$$\mathrm{Re}(\psi_1-\psi_2)=\frac{\sqrt{2}}{4}|\phi_1|\cos\left(\alpha_2-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right) \tag{34}$$

可见，温度槽正好落于高度槽$\frac{\pi}{2}$位相，此时斜压扰动发展最快[14]。(31)式代入(24)、(25)两式得

$$\frac{1}{\mu}\leqslant|\bar{u}_1{}'|_{\max}+\frac{Fk}{\frac{\pi^2}{4}+k^2}|U_T|_{\max}=\bar{r}_1 \tag{35}$$

$$\frac{1}{\mu}\leqslant|\bar{u}_2{}'|_{\max}+\frac{Fk}{\frac{\pi^2}{4}+k^2}|U_T|_{\max}=\bar{r}_2 \tag{36}$$

上式应用了恒不等式$\frac{2ab}{a^2+b^2}\leqslant 1$ 和

$$I_1{}^2\geqslant\frac{\pi^2}{4}I_0{}^2 \qquad J_1{}^2\geqslant\frac{\pi^2}{4}J_0{}^2 \tag{37}$$

则当

$$r>\bar{r}_1 \quad \text{且} \quad r>\bar{r}_2 \tag{38}$$

时，扰动总是稳定的。$\bar{r}_1$，$\bar{r}_2$ 与基流的水平和垂直切变绝对值的极大值成正比，因此，当基流的垂直切变或水平切变越大，$\bar{r}_1$，$\bar{r}_2$ 就越大，从而(38)式越难以成立，即越容易出现不稳定。而当 $k\to 0$或 $k\to\infty$时，$\bar{r}_1$，$\bar{r}_2$ 中基流垂直切变项消失，仅当中等波长的波才需要考虑 $|U_T|_{\max}$ 项对稳定性的影响。易见，$k_c=\frac{\pi}{2}$时，$\bar{r}_1$，$\bar{r}_2$ 有极大值，因 $k=\frac{2\pi L_0}{L}$，$L_0\approx 10^6$m，则 $L_c=4L_0\approx 4\times 10^6$m，为最不稳定波长。与观测事实较为一致。

若不考虑基流的垂直切变，$|U_T|=0$，则由(24)、(25)、(26)三式得稳定性判据为

$$r>|\bar{u}_1{}'|_{\max}=|\bar{u}_2{}'|_{\max} \tag{39}$$

这正是非线性正压稳定性条件。

若不考虑基流的水平切变，$\bar{u}_1{}'=\bar{u}_2{}'=0$，则(12)、(13)式化为常系数线性方程，令$\psi_j=A_j\cos\left(\frac{\pi}{2}Y\right)\exp\{ik(X-ct)\}$，$(j=1,2)$代入此线性方程，得稳定性判据为

$$r>\frac{1}{\mu}=\frac{4kFU_T}{4k^2+\pi^2} \tag{40}$$

与[8]中(4.7)式相当，这是非线性斜压稳定性条件。

2．总位涡拟能变分问题

由(1)、(2)式得扰动总位涡拟能方程为

$$\frac{dB}{dt}=-rD_B+P_B \tag{41}$$

式中

$$\begin{cases} B=\frac{1}{2}\langle q_1^2+q_2^2\rangle,\ D_B=\langle|\nabla^2\psi_1|^2+|\nabla^2\psi_2|^2+F|\nabla(\psi_1-\psi_2)|^2\rangle \\ P_B=\left\langle \bar{u}''\frac{\partial\psi_1}{\partial X}\nabla^2\psi_1+\bar{u}_2''\frac{\partial\psi_2}{\partial X}\nabla^2\psi_2\right\rangle+F\left\langle U_T'\frac{\partial}{\partial X}(\psi_1+\psi_2)\frac{\partial}{\partial Y}(\psi_1-\psi_2)\right\rangle+ \\ \quad F^2\left\langle U_T\left(\psi_1\frac{\partial\psi_2}{\partial X}-\psi_2\frac{\partial\psi_1}{\partial X}\right)\right\rangle \end{cases} \tag{42}$$

$$q_j=\nabla^2\psi_j+(-1)^jF(\psi_1-\psi_2),\qquad j=1,2$$

式中 D_B 是总位涡拟能的耗散项，P_B 是总位涡拟能的产生项。(41)式可化为

$$\frac{dB}{dt}\leqslant-(r-r_2^*)D_B \tag{43}$$

式中 $r_2^*=\mathrm{Max}\left(\frac{P_B}{D_B}\right)$，则当 $r>r_2^*$时，有$\frac{dB}{dt}\leqslant 0$。则求极大值 r_2^*的问题，化为变分问题

$$\delta(D_B-\mu P_B)=0 \tag{44}$$

得对应的 Euler-Lagrange 方程后，将(14)式代入得

$$\left\{\left(\frac{d^2}{dY^2}-k^2\right)^2\phi_1-F\left(\frac{d^2}{dY^2}-k^2\right)(\phi_1-\phi_2)\right\}-\frac{i}{2}k\mu\left\{(\bar{u}_1''''\phi_1+2\bar{u}_1'''\phi_1')-F(U_T''(\phi_1+\phi_2)+2U_T'\phi_1')+2F^2U_T\phi_2\right\}=0 \tag{45}$$

$$\left\{\left(\frac{d^2}{dY^2}-k^2\right)^2\phi_2+F\left(\frac{d^2}{dY^2}-k^2\right)(\phi_1-\phi_2)\right\}-\frac{i}{2}k\mu\left\{(\bar{u}_2''''\phi_2+2\bar{u}_2'''\phi_2')+F(U_T''(\phi_1+\phi_2)+2U_T'\phi_2')-2F^2U_T\phi_1\right\}=0 \tag{46}$$

还补充了边条件

$$Y=\pm1\qquad\frac{\partial\psi_j}{\partial Y}=0\qquad(j=1,2) \tag{47}$$

作运算，$[((45)\pm(46))\cdot(\phi_1\pm\phi_2)^*]$，令 $M_n^2=\left[\left|\frac{d^n(\phi_1+\phi_2)}{dY^n}\right|^2\right]$，$N_n^2=\left[\left|\frac{d^n(\phi_1-\phi_2)}{dY^n}\right|^2\right]$

分别得

$$(M_2^2+2k^2M_1^2+k^4M_0^2)-ik\mu\Big\{\frac{1}{2}[\bar{u}_1''''(|\phi_1|^2+\phi_1\phi_2^*)+\bar{u}_2''''(|\phi_2|^2+\phi_1^*\phi_2)]+[(\bar{u}_1'''-FU_T')\phi_1'\cdot(\phi_1+\phi_2)^*]+[(\bar{u}_2'''+FU_T')\phi_2'(\phi_1+\phi_2)^*]-F^2[U_T(|\phi_1|^2-|\phi_2|^2+\phi_1\phi_2^*-\phi_1^*\phi_2)]\Big\}=0 \tag{48}$$

$$\{(N_2^2+2k^2N_1^2+k^4N_0^2)+2F(N_1^2+k^2N_0^2)\}-ik\mu\Big\{\frac{1}{2}[\bar{u}_1''''(|\phi_1|^2-\phi_1\phi_2^*)+\bar{u}_2''''(|\phi_2|^2-\phi_1^*\phi_2)]+[(\bar{u}_1'''-FU_T')\phi_1'\cdot(\phi_1+\phi_2)^*]-[(\bar{u}_2'''+FU_T')\phi_2'(\phi_1-\varphi_2)^*]+[(F^2U_T-FU_T'')(|\phi_1|^2-|\phi_2|^2+\phi_1^*\phi_2-\phi_1\phi_2^*)]\Big\}=0 \tag{49}$$

与(22)式类似，有不等式成立，

$$[h(Y)I_m(f\cdot g^*)]\leqslant|h(Y)|_{max}[|f|^2]^{\frac{1}{2}}\cdot[|g|^2]^{\frac{1}{2}} \tag{50}$$

利用(50)式，则由(48)、(49)两式的实部可得

$$\frac{1}{\mu}\leqslant k\left\{\frac{1}{2}|U_T''''-4F(U_T''-FU_T)|_{\max}I_0J_0+|\overline{u}_1'''-FU_T'|_{\max}I_0M_1+\right.$$

$$\left.|\overline{u}_2'''+FU_T'|_{\max}J_0M_1\right\}\Big/(M_2^2+2k^2M_1^2+k^4M_0^2)=r_3 \tag{51}$$

$$\frac{1}{\mu}\leqslant k\left\{\frac{1}{2}|U_T''''-4F^2U_T|_{\max}I_0J_0+|\overline{u}_1'''-FU_T'|_{\max}I_0N_1+|\overline{u}_2'''+\right.$$

$$\left.FU_T'|_{\max}J_0N_1\right\}\Big/(N_2^2+2(k^2+F)N_1^2+k^2(k^2+2F)N_0^2)=r_4 \tag{52}$$

则当　　$r>r_3$　　且　　$r>r_4$　　(53)

时，扰动总是稳定的。这是由总位涡拟能导得的非线性正压和斜压联合稳定性判据。

对于使得$(U_T''-2FU_T)\big|_{Y=\pm1}=0$ 成立的基流，可得显式判据。取$\{(48)-(49)\}$的虚部，有

$$\left[\left(U_T''-2FU_T\right)\left\{\frac{d^2}{dy^2}R_e(\phi_1\phi_2^*)-2\frac{d}{dy}R_e(\phi_1'\phi_2^*)+F(|\phi_1|^2-|\phi_2|^2)\right\}\right]=0 \tag{54}$$

当$(U_T''-2FU_T)|_{Y=\pm1}=0$时，由上式得花括号为零，再对此关系式在$Y$区间内积分，得

$$[|\phi_1|^2]=[|\phi_2|^2]\qquad 或\qquad I_0^2=J_0^2 \tag{55}$$

利用(32)式中ϕ_1，ϕ_2的指数表达式，和(55)式，有

$$\frac{M_0^2}{2}=\frac{1}{2}(I_0^2+J_0^2)+[|\phi_1|\cdot|\phi_2|\cos(\alpha_1-\alpha_2)]=I_0^2+[|\phi_1|\cdot|\phi_2|\cos(\alpha_1-\alpha_2)] \tag{56}$$

$$\frac{N_0^2}{2}=I_0^2-[|\phi_1|\cdot|\phi_2|\cos(\alpha_1-\alpha_2)] \tag{57}$$

当上下层扰动位相差恰好为$\frac{\pi}{2}$，即$|\alpha_1-\alpha_2|=\frac{\pi}{2}$，则

$$\frac{M_0^2}{2}=I_0^2=\frac{N_0^2}{2} \tag{58}$$

再利用不等式

$$A_2^2\geqslant\lambda_0^2A_0^2,\quad A_2^2\geqslant\pi^2A_1^2,\quad A_1^2\geqslant\frac{\pi^2}{4}A_0^2 \tag{59}$$

式中$A=M$或N，$\lambda_0^2\approx2.365^4$，由上式得

$$M_2^2+2k^2M_1^2+k^4M_0^2\geqslant2I_0^2\left(\lambda_0^2+\frac{\pi^2}{2}k^2+k^4\right) \tag{60}$$

$$M_2^2+2k^2M_1^2+k^4M_0^2\geqslant(\lambda_0M_2+\pi k^2M_1)\sqrt{2}I_0\geqslant\sqrt{2}\pi(\lambda_0+k^2)I_0M_1 \tag{61}$$

对于N也可得类似的不等式，则(51)、(52)式化为

$$\frac{1}{\mu}\leqslant\frac{k|U_T''''-4F(U_T''-FU_T)|_{\max}}{4\left(\lambda_0^2+\frac{\pi^2}{2}k^2+k^4\right)}+\frac{k\{|\overline{u}_1'''-FU_T'|_{\max}+|\overline{u}_2'''+FU_T'|_{\max}\}}{\sqrt{2}\pi(\lambda_0+k^2)}=\overline{r}_3 \tag{62}$$

$$\frac{1}{\mu}\leqslant\frac{k|U_T''''-4F^2U_T|_{\max}}{4\left\{\lambda_0^2+\frac{\pi^2}{2}(k^2+F)+k^2(k^2+2F)\right\}}+\frac{k\{|\overline{u}_1'''-FU_T'|_{\max}+|\overline{u}_2'''+FU_T'|_{\max}\}}{\sqrt{2}\pi(\lambda_0+k^2+F)}=\overline{r}_4 \tag{63}$$

则当　　$r>\overline{r}_3$　　且　　$r>\overline{r}_4$　　(64)

时，扰动总是稳定的。当$k\to0$或$k\to\infty$时，都有$\overline{r}_3=\overline{r}_4=0$，仅当波长为中等的波才可

能是非线性不稳定的。显然，$\bar{r}_3$，$\bar{r}_4$ 在某一波长L_c处有极大值，L_c为最不稳定波长。L_c取决于具体的基流。

当位相差$-\frac{\pi}{2}<\alpha_1-\alpha_2<\frac{\pi}{2}$，有 $M_0^2\geqslant 2I_0^2$，$N_0^2\leqslant 2I_0^2$，(62)式仍成立，而(64)式难以得到，而$\frac{\pi}{2}<|\alpha_1-\alpha_2|<\frac{3\pi}{2}$，则(63)式仍成立，而(62)式得不到。

若不考虑基流的垂直切变($U_T=0$)，则(64)为

$$r>\hat{r}_3=\frac{kM_1(I_0+J_0)|\bar{u}'''|_{max}}{M_2^2+2k^2M_1^2+k^4M_0^2} \tag{65}$$

且

$$r>\hat{r}_4=\frac{kN_1(I_0+J_0)|\bar{u}'''|_{max}}{N_2^2+2(k^2+F)N_1^2+k^2(k^2+2F)N_0^2} \tag{66}$$

为非线性正压稳定性条件。$\bar{u}=\bar{u}_1=\bar{u}_2$。

若不考虑基流的水平切变，$\bar{u}_1$，$\bar{u}_2$ 均为常数，令 $\psi_j=A_j\cos\left(\frac{\pi}{2}Y\right)\exp\{ik(X-ct)\}$ ($j=1$，2)代入(45)、(46)的Euler方程，得非线性斜压稳定性判据

$$r>\frac{1}{\mu}=\frac{kF^2U_T}{\left(k^2+\frac{\pi^2}{4}\right)^{3/2}\left(k^2+\frac{\pi^2}{4}+2F\right)^{1/2}} \tag{67}$$

与[8]中(4.14)式等价。

3．几种基流的稳定性判据

$$1)\qquad \begin{cases}\bar{u}_1=\hat{U}_T(1-Y^2)\\ \bar{u}_2=0\end{cases} \tag{68}$$

Pedlosky曾讨论过这种基流的稳定性[11]。其中已令$a=1$。(68)式满足边条件 $U_T|_{Y=\pm1}=(\bar{u}_1-\bar{u}_2)|_{y=\pm1}=0$，将(68)式代入(35)、(36)两式得 $\bar{r}_1>\bar{r}_2$，则当

$$r>\bar{r}_1=2\hat{U}_T\left(1+\frac{2Fk}{4k^2+\pi^2}\right) \tag{69}$$

时，扰动稳定。(69)式化为

$$\hat{U}_T<\hat{U}_C(k)\qquad 和\frac{2\hat{U}_C}{r}=\frac{4k^2+\pi^2}{(4k^2+\pi^2)+2Fk} \tag{70}$$

易证，当$k=\frac{\pi}{2}$得最小临界热成风$(\hat{U}_C)_{min}=\frac{\pi r}{2\pi+F}$。

$$2)\qquad \begin{cases}\bar{u}_1=\hat{U}_T\left\{F(1+\cos\pi y)+\frac{\pi^2}{2}\right\}\\ \bar{u}_2=0\end{cases} \tag{71}$$

上式满足边条件$(U_T''-2FU_T)|_{y=\pm1}=0$，(71)式代入(62)、(63)式，

$$\bar{r}_3=F\hat{U}_T(\pi^2+2F)\left\{\frac{\pi^2+4F}{4}\frac{k}{\lambda_0^2+\frac{\pi^2}{2}k^2+k^4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{k}{\lambda_0+k^2}\right\} \tag{72}$$

$$\bar{r}_4=F\hat{U}_T(\pi^2+2F)\left\{\frac{\pi^2+4F}{4}\frac{k}{\lambda_0^2+\frac{\pi^2}{2}(k^2+F)+k^2(k^2+F)}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{k}{\lambda_0+F+k^2}\right\} \tag{73}$$

显然，$\bar{r}_3>\bar{r}_4$，则对于$|\alpha_1-\alpha_2|\leqslant\frac{\pi}{2}$，有$r>\bar{r}_3$,即

$$\hat{U}_T<\hat{U}_C(k)\text{ 和 }\frac{\hat{U}_C}{r}=\frac{1}{F(\pi^2+2F)}\left\{\frac{\pi^2+4F}{4}\frac{k}{\lambda_0^2+\frac{\pi^2}{2}k^2+k^4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{k}{\lambda_0+k^2}\right\}^{-1} \tag{74}$$

取$F=0.8$，则当$k=1.9$,$\hat{U}_C$有最小临界热成风,对应最不稳定波长$L\approx3.3\times16^6\text{m}$。而对于$\frac{\pi}{2}<|\alpha_1-\alpha_2|<\frac{3\pi}{2}$，$r>\bar{r}_4$，也可类似进行讨论。

三、浅水中切变流的非线性稳定性

含摩擦和地形作用的非线性浅水波方程

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial X}+v\frac{\partial u}{\partial Y}-fu+\frac{\partial\phi}{\partial X}=F_X+Q\\ \frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial X}+v\frac{\partial v}{\partial Y}+fu+\frac{\partial\phi}{\partial Y}=F_Y\\ \frac{\partial H}{\partial t}+\nabla\cdot(H\boldsymbol{V})=F_H\end{cases} \tag{75}$$

式中$H=\phi-\phi_s$，$\phi=gh$，$\phi_s=gh_s$，h，h_s分别为流体高度和地形高度。F_X，F_Y，F_H均为摩擦耗散项，Q为X方向的动量源。为简便计，可取

$$F_X=-\nu u,\ F_Y=-\nu v,\ F_H=-\nu H \tag{76}$$

这是Rayleigh摩擦[6]，将扰动量与基本量分开，

$$u=\bar{u}(Y)+u'\qquad v=v'\qquad \phi=\bar{\phi}(Y)+\phi' \tag{77}$$

在南北边界处取刚壁条件

$$Y=\pm D,\ v'=0,\ u'=\text{常数},\ \Delta\phi'=\text{常矢} \tag{78}$$

所有的变量在X方向都取为周期的。并设平均动量源$\bar{Q}$与平均摩擦在X方向的分量$\bar{F}_X$平衡，$\bar{F}_H$与地形引起的平均强迫作用平衡。

1．总能量变分问题

由(75)式可得扰动总能量方程为

$$\frac{dE}{dt}=-\nu D_E+P_E \tag{79}$$

式中

$$\begin{cases}E=\frac{1}{2}\langle H_0(u^2+v^2)+gh^2\rangle\\ D_E=\langle\frac{3}{2}H_0\boldsymbol{V}^2+gh^2\rangle\\ P_E=-\langle H_0uv\frac{d\bar{u}}{dY}\rangle\end{cases} \tag{80}$$

为方便,(80)式中u,v,h均略去撇号,$H_0=\frac{H}{g}$。与(10)、(11)式讨论类似,$\nu_1^*=\text{Max}\left(\frac{P_E}{D_E}\right)$对应的变分问题是$\delta(P_E-\mu D_E)=0$，得Euler—Lagrange方程为

$$3H_0u+\mu\frac{d\bar{u}}{dY}H_0v=0 \tag{81}$$

$$3H_0v+\mu\frac{d\bar{u}}{dY}H_0u=0 \tag{82}$$

$$\frac{3}{2}V^2+2gh+\mu\frac{d\bar{u}}{dY}uv=0 \tag{83}$$

由前二式，要使u，v有非零解，则其系数行列式为零，得

$$\frac{1}{\mu^2}=\frac{1}{9}\left(\frac{d\bar{u}}{dY}\right)^2 \quad 或 \quad \frac{1}{\mu}\leqslant\frac{1}{3}\left|\frac{d\bar{u}}{dY}\right|_{max} \tag{84}$$

对(83)式两边作面积分($0\leqslant X\leqslant L$，$-D\leqslant Y\leqslant D$)，得

$$\frac{1}{\mu}=-\frac{\langle\frac{d\bar{u}}{dY}uv\rangle}{\langle\frac{3}{2}V^2+2gh\rangle}\leqslant\frac{2}{3}\frac{\langle u^2\rangle^{\frac{1}{2}}\langle v^2\rangle^{\frac{1}{2}}}{\langle u^2\rangle+\langle v^2\rangle}\left|\frac{d\bar{u}}{dY}\right|_{max}\leqslant\frac{1}{3}\left|\frac{d\bar{u}}{dY}\right|_{max} \tag{85}$$

式中已利用h在X方向平均值为零和Schwarz不等式及$\frac{2ab}{a^2+b^2}\leqslant1$。(84)式和(85)式结果一致，则稳定性判据为

$$\nu>\nu_1^*=\frac{1}{3}\left|\frac{d\bar{u}}{dY}\right|_{max} \tag{86}$$

非线性稳定性的临界值ν_1^*与基流$\bar{u}$在南北方向的切变成正比，切变越强，越容易出现不稳定。为便于比较，将(86)式无量纲化，取

$$(X^*,\ Y^*)=(X,\ Y)/\bar{L},\ \bar{u}^*=\bar{u}/U,\ (u^*,\ v^*)=(u,\ v)/U \tag{87}$$

式中带星号的量为无量纲量，U，$\bar{L}$为速度和水平长度尺度。(87)式代入(86)式，得

$$\nu^*=\frac{1}{3}\left|\frac{d\bar{u}^*}{dY^*}\right|_{max}=\bar{\nu}_1^* \tag{88}$$

式中$\nu^*=\frac{\bar{L}}{U}\nu$ 。按Satomura(1986)所取的基流$\bar{u}^*=\tanh(Y^*)$[6],得$\left|\frac{d\bar{u}^*}{dY^*}\right|_{max}=1$，代入(88)式得$\bar{\nu}_1^*=\frac{1}{3}$。Satomura曾用数值试验的方法[6],对此基流确定使得每个扰动振幅衰减为零时ν^*的临界值为$0.25<\nu_c^*<0.3$。可见，$\bar{\nu}_1^*$与ν_c^*的上界相当一致。本文结果对任意基流普遍成立，而Satomura的结果只是基流为$\bar{u}^*=\tanh(Y^*)$的特例。由(39)式，$\frac{r^*}{2}>\frac{1}{2}\left|\frac{d\bar{u}^*}{dY^*}\right|_{max}$，考虑(1)、(2)式与(76)式相比多了$\frac{1}{2}$因子，$\frac{r^*}{2}$与$\nu^*$相当，显然，有辐散时的临界值$\bar{\nu}_1^*$比无辐散时的$\frac{1}{2}\left|\frac{d\bar{u}^*}{dY^*}\right|_{max}$小。因此，有辐散时扰动比无辐散时更容易稳定。

2．总位涡拟能变分问题

由(75)式可得扰动总位涡拟能方程为

$$\frac{dB}{dt}=-rD_B+P_B \tag{89}$$

式中

$$\begin{cases} B=D_B=\langle\frac{H_0q^2}{2}\rangle,\ P_B=-\langle q\nabla\cdot(\bar{\zeta}_aV)\rangle \\ q=\frac{\zeta}{H_0}, \qquad \bar{\zeta}_a=f-\frac{d\bar{u}}{dY} \end{cases} \tag{90}$$

式中q为扰动位涡，并补充新的边界条件

$$Y=\pm D \qquad \frac{\partial u}{\partial Y}=0 \tag{91}$$

与(43)、(44)二式讨论类似，$\nu_2^*=\mathrm{Max}\left(\frac{P_B}{D_B}\right)$，当$\nu>\nu_2^*$时，$\frac{dB}{dt}\leqslant 0$。$\nu>\nu_2^*$为稳定性的充分条件，$\nu_2^*$的极大值问题也可化为变分原理$\delta(D_B-\mu P_B)=0$。得对应的Euler—Lagrange方程为

$$\frac{\zeta^2}{2}+\mu\zeta\nabla\cdot(\bar{\zeta}_a\boldsymbol{V})=0 \tag{92}$$

$$\frac{\partial q}{\partial Y}+\mu\left\{\frac{\partial}{\partial Y}\left[\frac{1}{H_0}\nabla\cdot(\bar{\zeta}_a\boldsymbol{V})\right]-\bar{\zeta}_a\frac{\partial q}{\partial X}\right\}=0 \tag{93}$$

$$\frac{\partial q}{\partial X}+\mu\left\{\frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{1}{H_0}\nabla\cdot(\bar{\zeta}_a\boldsymbol{V})\right]+\bar{\zeta}_a\frac{\partial q}{\partial Y}\right\}=0 \tag{94}$$

对(92)式作面积分，得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu}&=-\frac{2\langle\zeta\nabla\cdot(\bar{\zeta}_a\boldsymbol{V})\rangle}{\langle\zeta^2\rangle}\leqslant\frac{2}{\langle\zeta^2\rangle}\left\{\langle|\zeta|\cdot|v|\cdot\left|\frac{d\bar{\zeta}_a}{dY}\right|\rangle+\langle|\zeta|\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{V}|\bar{\zeta}_a|\rangle\right\}\\&\leqslant 2\left\{\left|\frac{d\bar{\zeta}_a}{dY}\right|_{\max}\left(\frac{\langle v^2\rangle}{\langle\zeta^2\rangle}\right)^{1/2}+|\bar{\zeta}_a|_{\max}\left(\frac{\langle(\Delta\cdot\boldsymbol{V})^2\rangle}{\langle\zeta^2\rangle}\right)^{1/2}\right\}\\&\leqslant 2\left(\frac{1}{\lambda_1}\left|\frac{d\bar{\zeta}_a}{dY}\right|_{\max}+C|\bar{\zeta}_a|_{\max}\right)=\nu_2\end{aligned} \tag{95}$$

利用了不等式$\langle\zeta^2\rangle\geqslant\lambda_1^2\langle\boldsymbol{V}^2\rangle$，$\lambda_1^2=k^2+\frac{\pi^2}{4D^2}$。无量纲参数$C^2=\frac{\langle(\nabla\cdot\boldsymbol{V})^2\rangle}{\langle\zeta^2\rangle}$，表示总散度平方与总涡度平方之比。作运算$\langle\frac{\partial q}{\partial X}\cdot(94)+\frac{\partial q}{\partial Y}\cdot(93)\rangle$，得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu}&=-\frac{\langle\nabla q\cdot\nabla\left[\frac{1}{H_0}\nabla\cdot(\bar{\zeta}_a\boldsymbol{V})\right]\rangle}{\langle(\nabla q)^2\rangle}=\frac{\langle\frac{1}{H_0}\nabla^2 q\cdot\nabla\cdot(\bar{\zeta}_a\boldsymbol{V})\rangle}{\langle(\nabla q)^2\rangle}\\&\leqslant\frac{H_{0\max}}{H_{0\min}}\left[\frac{\langle(\nabla^2 q)^2\rangle}{\langle(\nabla q)^2\rangle}\right]^{1/2}\left\{\frac{[\nabla\cdot(\bar{\zeta}_a\boldsymbol{V})]^2}{\lambda_1^2\langle\zeta^2\rangle}\right\}^{1/2}\\&=\frac{\sqrt{2}}{\lambda_1}\frac{H_{0\max}}{H_{0\min}}\left[\frac{\langle(\nabla^2 q)^2\rangle}{\langle(\nabla q)^2\rangle}\right]^{1/2}\left\{\frac{1}{\lambda_1^2}\left|\frac{d\bar{\zeta}_a}{dY}\right|^2_{\max}+C^2|\bar{\zeta}_a|^2_{\max}\right\}^{1/2}=\nu_3\end{aligned} \tag{96}$$

利用了不等式$\langle(\nabla q)^2\rangle\geqslant\lambda_1^2\langle q^2\rangle$和$(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)$。则当

$$\nu>\nu_2 \quad 且 \quad \nu>\nu_3 \tag{97}$$

时，扰动稳定。(97)式是总位涡拟能导得的非线性稳定性的充分条件。由(95)、(96)两式可见，临界值ν_2、ν_3不仅与基流绝对涡度有关，而且与基流绝对涡度南北梯度有关。当无辐散($\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0$，$C=0$)时，则$\nu_2$，$\nu_3$仅与$\left|\frac{d\bar{\zeta}_a}{dY}\right|_{\max}$成正比；当$\left|\frac{d\bar{\zeta}_a}{dY}\right|$处处为零。则$\nu_2$，$\nu_3\propto C|\bar{\zeta}_a|_{\max}$。前者似乎与大尺度无辐散运动的正压不稳定有关，而后者似乎与中小尺度较强辐散运动的非地转不稳定有关。对于后者，可取一特例，若$f=0$，$\bar{u}=aY+b$，a，b为常数，则$\frac{d\bar{\zeta}_a}{dY}=0$，$\bar{\zeta}_a=-a$，代入(95)、(96)两式，得$\nu_2$，$\nu_3\propto C=\left\{\frac{\langle(\nabla\cdot\boldsymbol{V})^2\rangle}{\langle\zeta^2\rangle}\right\}^{1/2}$。当$\nabla\cdot\boldsymbol{V}\neq 0$时，有可能成立$\nu<\nu_2$和$\nu<\nu_3$。注意到(86)式，$\nu_1^*=\frac{1}{3}$

$|a|>0$，也有可能成立$\nu<\nu_1^*$，则ν可能同时小于ν_1^*，ν_2，ν_3，按照稳定性的定义，此时可能出现非线性不稳定。由此可见，没有拐点、没有温度变化的无旋基流仍可能出现某种非线性不稳定。有趣的是，ν_2，ν_3非零是因为 $\langle(\nabla\cdot V)^2\rangle\neq0$，而且$\nu_2$，$\nu_3$ 与总散度平方的平方根成正比。这表明此种可能产生的非线性不稳定与非零散度有关，散度越大，越容易发生不稳定。又因此基流不可能出现正压和斜压不稳定，因此，这种不稳定实际上是一种非线性非地转不稳定。Satomura (1982) 用数值试验证实了在上述基流的情况下，存在不稳定的重力波模[5]。因此，如果在正压和斜压都稳定的区域有扰动激发，那么这种非线性不稳定很可能是这些扰动的激发机制。

四、结 语

本文用扰动总能量和总位涡拟能对非线性准地转方程组和非线性浅水波方程，分别导得切变基流的非线性稳定性判据。由准地转方程组所得结果解决了Henrotay所提出的困难，推广了他的结果[8]。而由浅水波方程所得结果进一步从理论上证实了 Satomura (1986)的数值计算所得的稳定性的临界值[6]，和证明了他(1982)用数值试验确定的正压和斜压均稳定的基流中不稳定重力波模的存在性[5]。本文所得结果是对任意基流而言的，而Satomura仅对某些特殊基流作了讨论。

参 考 文 献

[1] Pedlosky, J., The stability of currents in the atmosphere and ocean: part I, *J. A. S.*, **21**, 201—219, 1964.

[2] Pedlosky, J., The stability of currents in the atmosphere and ocean: Part II, *J. A. S.* **21**, 342—353, 1964.

[3] Blumen, W., On the stability of quasi-geostrophic flow, *J. A. S.*, **25**, 929-931, 1968.

[4] Blumen, W., Shear layer instability of an inviscid compressible fluid, *J. F. M.*, **40**, 769-781, 1970.

[5] Satomura, T., An investigation of shear instability in a shallow water, part II, *J. Meteor. Soc. J.*, **60**, 227-244, 1982.

[6] Satomura, T., Topographic disturbance in viscous shear flow, *J. Meteor. Soc. J.*, **64**, 665-680, 1986.

[7] Zeng Qingcun, Variational principle of instability of atmospheric motions, Proceedings of International Summer Colloquium on Nonlinear Dynamics of the Atmosphere, 175-186, Science Press, Beijing, 1986.

[8] Henrotay, P., Nonlinear baroclinic instability: an approach based on Serrin's energy method, *J. A. S.*, **40**, 3, 762-768, 1983.

[9] Serrin, J., On the stability of viscous fluid motions, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **3**, 1-13, 1959.

[10] Joseph, D. D., On the stability of the Boussinesq equations, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **20**, 59-71, 1965.

[11] Pedlosky, J., Geophysical Fluid Dynamics, Springer Verlag, 1979.

[12] Joseph, D. D., Stability of fluid motions I, Springer Verlag, 240-242, 1976.

[13] 柯朗，希尔伯特，数学物理方法，卷 I，144 页，科学出版社，1987。

[14] Holton, J. R., An introduction to dynamic meteorology, Academic Press, Second Edition, 227—238, 1979.

ON THE NONLINEAR STABILITY OF SHEARING BASIC FLOW IN THE FRICTIONAL DISSIPATION ATMOSPHERE

Lu Weisong

(*Nanjing Institute of Meteorology*)

Abstract

From a nonlinear quasi-geostrophic equation set including frictional dissipation and a nonlinear shallow water equation including frictional dissipation and large topography, using Serrin-Joseph's energy method, by means of the variational principle, the nonlinear stability criterions of the shearing basic flows both above two equation sets with the total energy and total enstrophy respectively are found.