

球面定常行星波的几种传播路径*

陆 维 松

(南京气象学院)

近年来, Hoskins 用 Longuet-Higgins 首先提出的大圆理论^[1], 和球面上二维 Rossby 波的能量频散来解释由资料分析得到的遥相关和模式得到的遥响应, 取得了重要进展。但是大圆理论是在基流角速度为常数时得到的, 而在球面上讨论真实的基流难以得到解析解。本文依据 Fermat 原理, 利用变分法, 直接求得球面上普遍的射线方程, 从物理上直观地导得大圆理论, 对球面上常见的几种基流型式, 也求得解析解。并且应用了“平均变分原理”直接求得波作用守恒方程。

1. 大圆理论的另一推导

球面坐标中的线性无辐散正压涡度方程为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_P \frac{\partial}{\partial x}\right) \nabla^2 \psi + \beta_P \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

式中 $dx = a \cos \varphi d\lambda$, $dY = a d\varphi$, λ, φ 分别为经度和纬度, a 是地球半径, ψ 是水平扰动流函数。基本纬向气流速度 $\bar{u}_P = a \cos \varphi \bar{u}$, $\beta_P = \frac{2 \Omega \cos \varphi}{a} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\bar{u}_P \cos \varphi) \right]$, $\nabla^2 = \frac{1}{a^2 \cos \varphi} \left[\frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right]$ 。

由(1)式可求得 WKB 近似解, 与文献[2]结果一致,

$$\psi = A \frac{1}{\sqrt{m \cos \varphi}} \exp \left\{ i \left(kx + \int^r m dy - \omega t \right) \right\} \quad (2)$$

由(2)式可得程函方程^[3]为

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 = n^2 \quad (3)$$

式中程函或位相 $S = kx + \int^r m dy - \omega t$, $m^2 = \frac{\beta_P}{\bar{u}_P - c} - k^2$, 并应用了波数和频率的关系式 $k^2 + m^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = n^2$ 。这里全波数 n 表示折射率, 下面简单地作一证明。

考虑到 $S = \text{const.}$ 是几何波阵面^[3], 由定义, 波射线就是与波阵面正交的线。换言之, 与波射线相切的单位矢量同 ∇S 的方向一致, 注意到(3)式, 则得

$$\mathbf{J} = \frac{\nabla S}{|\nabla S|} = \frac{k}{n} \mathbf{i} + \frac{m}{n} \mathbf{j} \quad (4)$$

则单位矢量 $\mathbf{J}$ 在 x, y 两个方向的投影分别为

$$J_x = \frac{k}{n} \quad \text{和} \quad J_y = \frac{m}{n} \quad (5)$$

我们将单位矢量 $\mathbf{J}$ 与 y 轴所成锐角记作 $\theta = \theta(y)$, 则 $J_x = \sin \theta$, 令它与(5)式中的 J_x 相等, 我们求得关

* 本文于 1987 年 6 月 30 日收到, 1987 年 9 月 12 日收到修改稿。

系式 $n \sin \theta = k$, 不妨设 $k = n_0 \sin \theta_0$, 因为 k 是一常数, 则上式为

$$n \sin \theta = n_0 \sin \theta_0. \quad (6)$$

上式即为斯涅耳(Snell)定律。从而证得 n 即为射线的折射率。

由此, 我们可以应用费马(Fermat)原理, 即最短光程原理^[3]。一条射线上任意两点 P_1, P_2 之间的光程为

$$L = \int_{P_1}^{P_2} n ds \quad (7)$$

式中 n 是折射指数, ds 是两点间几何长度微元。注意此处光程是无量纲的, 与光学中的稍有点不同。利用球面上几何长度微元

$$ds = a \sqrt{1 + \left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)^2 \cos^2 \varphi} d\varphi \quad (8)$$

来研究球面上波射线的特征。

注意到只考虑定常波 $c=0$ 且基流角速度为常数 $\bar{u} = \frac{d\lambda}{dt} = \text{const.}$ 的情况, 利用 n, m 的定义得

$$n^2 = \frac{\beta_p}{\bar{u}_p - c} = \frac{2(\Omega + \bar{u})}{a^2 \bar{u}} = \text{const.} \quad (9)$$

将(9)、(8)两式代入(7)式, 得

$$L(\varphi, \lambda) = \int_{P_1}^{P_2} \left\{ \left[\frac{2(\Omega + \bar{u})}{\bar{u}} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)^2 \cos^2 \varphi} \right\} d\varphi \quad (10)$$

光程 L 为一泛函, 按变分原理, 当 L 取极值时, (10)式右端花括号内的量满足 Euler 方程, 即

$$\frac{d}{d\varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda'_\varphi} \left(\sqrt{1 + (\lambda'_\varphi)^2 \cos^2 \varphi} \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\sqrt{1 + (\lambda'_\varphi)^2 \cos^2 \varphi} \right) = 0 \quad (11)$$

或

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = \frac{\pm b_0}{\cos \varphi \sqrt{\cos^2 \varphi - b_0^2}} \quad (12)$$

积分上式得

$$\text{tg} \varphi = \text{tg} \alpha \sin(\lambda - \lambda_0) \quad (13)$$

式中 $\alpha = \arccos b_0$, b_0, λ_0 都是积分常数。(13)式即为大圆方程。此大圆是经过 $\lambda = \lambda_0, \varphi = 0$ 的球面上大圆, 且当 $\varphi = \alpha$ 时, 大圆到达拐点。此结果与文献[2]一致。实际上, 上述结果可从物理上直接得出: 根据初始假设基流角速度为常数, 可知折射指数为常数, 从而按 Fermat 原理, 即得两点间光程最短, 就是两点间几何距离最短, 因球面上两点间距离最短的曲线是测地线——大圆, 则推得当基流角速度为常数时, 球面上的波射线即为大圆。此方法在物理上简明直观。

2. 基流角速度随纬度有变化

现在考虑基流角速度仅是纬度的函数的情况, 此时折射指数也是纬度的函数, 即

$$n^2 = n^2(\varphi) = \frac{\beta_p}{\bar{u}_p} \quad (14)$$

与(9)式类似可得, 且取 $c=0$ 。将(14)式代入(7)式, 并利用(8)式, 得对应的泛函的 Euler 方程为

$$\frac{n(\varphi) \lambda'_\varphi \cos^2 \varphi}{\sqrt{1 + (\lambda'_\varphi)^2 \cos^2 \varphi}} = N = \text{const.} \quad (15)$$

由上式积分得波射线方程为

$$\lambda - \lambda_0 = \pm \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{N d\varphi}{\cos \varphi \sqrt{n^2 \cos^2 \varphi - N^2}} \quad (16)$$

式中 N 为积分常数, (λ_0, φ_0) 为射线通过的已知点。积分号前的正负号由 $\frac{d\lambda}{d\varphi} > 0$ 或 $\frac{d\lambda}{d\varphi} < 0$ 确定。

先考察常数 N 的意义, (8) 式和 $dx = a \cos \varphi d\lambda$ 代入 (15) 式, 得

$$N = n(\varphi) \cos \varphi \frac{dx}{ds} = n \cos \varphi \sin \theta \quad (17)$$

式中 θ 是射线与正 Y 轴的夹角, 成立 $\frac{dx}{ds} = \sin \theta$ 。则由 (17) 式得

$$n \cos \varphi \sin \theta = n_0 \cos \varphi_0 \sin \theta_0 = N \quad (18)$$

式中 (λ_0, φ_0) 为射线的初始位置, θ_0 为射线的初始方向 (即入射角), N 由 $(\lambda_0, \varphi_0, \theta_0)$ 确定。(18) 式即为球面情形下的 Snell 定律。有趣的是, 与通常情形不同, 现在 $\cos \varphi$ 作为附加因子出现在 Snell 定律中。显然, 这是由于纬圈的几何长度微元沿 y 轴正向按比例因子 $\cos \varphi$ 减小所致。由 (16) 式可见, 波射线只可能存在于 $n^2 \cos^2 \varphi > N^2$ 的区域内, 在临界纬度 $\varphi = \varphi_c$ 处有 $n^2 \cos^2 \varphi_c = N^2$ 。

为了进一步研究基流角速度随纬度变化时波射线的特征, 下面考虑几种基流的理想型式, 注意到在这几种型式中, 前面 β_P 中第二项是小项, 为简单计, 可将其略去, 则我们可求得这几种情况的解析解。

1) $\bar{u} = \mu \sin^2 \varphi$

由 (14) 式求得折射指数为 $n^2 = \frac{\Omega_0}{\sin^2 \varphi}$, $\Omega_0 = \frac{2\Omega}{a^2 \mu}$, μ 为常数, 可取 $\bar{u}$ 的极大值。将 n^2 的表达式代入 (15) 式, 积分得

$$\cos \varphi = \frac{1}{a_1 \sin [\pm (\lambda - \lambda_0) + \lambda_1]} \quad (19)$$

式中

$$\lambda_1 = \arcsin \frac{1}{a_1 \cos \varphi_0}, \quad a_1 = \sqrt{\frac{\Omega_0}{N^2} + 1} \quad (20)$$

此式即为波射线方程。由 (19) 式可见, 当 $0 < \lambda_1 \pm (\lambda - \lambda_0) < \frac{\pi}{2}$ 时, φ 随 λ 增加而增大, 而当 $\frac{\pi}{2} < \lambda_1 \pm (\lambda -$

$\lambda_0) < \pi$ 时, φ 随 λ 增加而减小。临界纬度 $\varphi_c = \arctg \sqrt{\frac{\Omega_0}{N^2}}$ 。取 $\bar{u}_P = 20 \text{ m/s}$, $\mu = 4.2 \times 10^{-6} \text{ /s}$, $\lambda_0 = 0$,

$\varphi_0 = 15^\circ \text{ N}$, 求得波数为 1—6 的波射线。如图 1 所示, 各波都有向东向极地传播的趋势, 且到达临界纬度又折向赤道传播。波长越长, 传播到同纬度的跨度越大。

2) $\bar{u} = \mu \cos^2 \varphi$

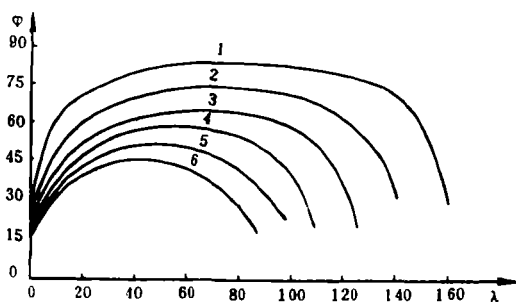
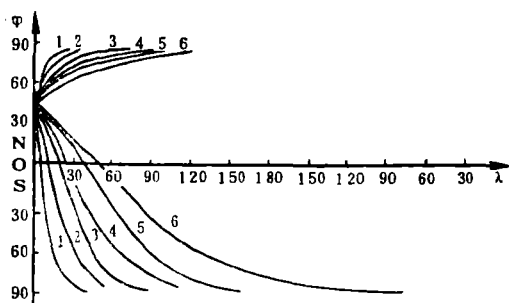
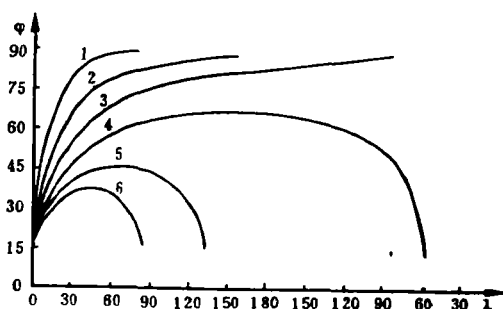
由 (14) 式可求得折射指数为 $n^2 = \frac{\Omega_0}{\cos^2 \varphi}$, 将此式代入 (15) 式, 积分得

$$\text{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \text{tg} \left(\frac{\varphi_0}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \exp [\pm a_2 (\lambda - \lambda_0)] \quad (21)$$

式中 $a_2 = \sqrt{\frac{\Omega_0}{N^2} - 1}$ 。取 $\lambda_0 = 0$, $\varphi_0 = 45^\circ \text{ N}$, 可按 (21) 式求出此扰源激发的波射线。如图 2 所示, 1—6

波均可能向南半球传播, 且波长越长, 波射线越接近正南方向。而波射线另一解是, 随着波长越长, 越接近正北方向。前一解对于研究北半球的扰源如何影响南半球有着重要意义。同样, 对于扰源位于南半球, 也得到类似结果, 即南半球的扰源可以影响北半球。

3) $\bar{u} = \mu \sin 2\varphi$

图 1 扰源位于 $\lambda_0 = 0, \varphi_0 = 15^\circ N$ 的 1—6 波的波射线图 2 $\bar{u} = \mu \cos^2 \varphi, \lambda_0 = 0, \varphi_0 = 45^\circ N$ 处 1—6 波的波射线图 3 $\bar{u} = \mu \sin 2\varphi, \lambda_0 = 0, \varphi_0 = 15^\circ N$ 处 1—6 波的波射线

由(14)式可求得折射指数为 $n^2 = \frac{\Omega_0}{\sin^2 2\varphi}$, 将此式代入(15)式, 积分得两种不同的解, 令 $b =$

$$\frac{\Omega_0}{4N^2} - 1, a_3^2 = |b|, \text{ 则}$$

当 $b > 0$ 时, 解为

$$\cos \varphi = \frac{a_3}{\text{sh} \{ \pm a_3 (\lambda - \lambda_0) + \lambda_3 \}} \quad (22)$$

当 $b < 0$ 时, 解为

$$\cos \varphi = \frac{a_3}{\cos \{ \pm a_3 (\lambda - \lambda_0) + \lambda_4 \}} \quad (23)$$

上面两式中, $\lambda_3 = A, \text{sh} \left(\frac{a_3}{\cos \varphi_0} \right), \lambda_4 = \arccos \frac{a_4}{\cos \varphi_0}$. 取 $\lambda_0 = 0, \varphi_0 = 15^\circ N$, 按(22)、(23)两式求出对应的波射线。如图 3 可见, 图中有两种类型的波射线。一类是 1—3 波的波射线随纬度的增加趋于北极; 另一类是 4—6 波的波射线呈抛物线路径。由于这种基流廓线是较为常见的, 其结果有可能用来解释实际大气中遥相关现象。1—3 波的波射线接近经向传播, 这与通常所得的遥相关波列基本一致。

上述三种基流情况, 对于其它纬度的扰源也能得到类似结果。

3. 平均 Lagrange 函数和波作用守恒

将方程(1)变换为麦卡托投影的形式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_M \frac{\partial}{\partial X} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \right) + \beta_M \frac{\partial \psi}{\partial X} = 0 \quad (24)$$

式中 $X = a\lambda$, $\cos\varphi = \text{sech}(Y/a)$, $\bar{u}_M = \frac{\bar{u}_P}{\cos\varphi}$, $\beta_M = \beta_P \cos\varphi$ 。则由上式可得对应的 Lagrange 函数^[4]为

$$L = \frac{1}{2} \varphi_{,x}^2 + \frac{1}{2} \varphi_{,r}^2 + \frac{\bar{u}_M}{2} \varphi_{,x} \varphi_{,xx} + \frac{\bar{u}_M}{2} \varphi_{,x} \varphi_{,rr} - \frac{\beta_M}{2} \varphi_{,x} \varphi_{,r} \quad (25)$$

令 $\psi = \varphi_{,t}$, 考虑缓变波列^[5]

$$\psi = A \cos(\theta + \eta) \quad (26)$$

式中 $\theta = kX + lY - \omega t$, 将此式代入(25)式, 略去小量, 再将所得结果在一个周期内平均, 得

$$\bar{L} = \frac{A^2}{4} \left\{ (k^2 + l^2) - (k^2 + l^2) \frac{k \bar{u}_M}{\omega} + \frac{k \beta_M}{\omega} \right\} \quad (27)$$

对于函数 $(A, \theta)(t, X, Y)$, 有“平均变分原理”

$$\delta \int \int \int_R \bar{L}(-\theta_t, \theta_x, \theta_r, A) dX dY dt = 0 \quad (28)$$

式中 R 为给定的时空坐标 t, X, Y 的区间。则由(28)式得关于 A 和 θ 的变分方程分别为

$$\bar{L}_A = 0 \quad (29)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{L}_\omega + \frac{\partial}{\partial X} (-\bar{L}_k) + \frac{\partial}{\partial Y} (-\bar{L}_l) = 0 \quad (30)$$

和

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial Y} - \frac{\partial l}{\partial X} = 0 \quad (31)$$

易证, (67)式即为熟知的波作用守恒方程^[5],

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E}{\omega} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left(C_{sx} \frac{E}{\omega} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(C_{sy} \frac{E}{\omega} \right) = 0 \quad (32)$$

式中 E 为能量密度, C_{sx}, C_{sy} 分别为 X, Y 方向的群速。由(27)式得

$$\begin{cases} \bar{L}_\omega = \frac{(k^2 + l^2) A^2}{4 \omega} = \frac{E}{\omega} \\ \bar{L}_k = \frac{A^2}{4 \omega} \left[2 k \omega - (3 k^2 + l^2) \frac{\bar{u}_M}{\omega} + \frac{\beta_M}{\omega} \right] = -C_{sx} \frac{E}{\omega} \\ \bar{L}_l = \frac{A^2}{4 \omega} (2 l \omega - 2 k l \bar{u}_M) = -C_{sy} \frac{E}{\omega} \end{cases} \quad (33)$$

式中已利用由(29)式求得线性色散关系式, $\omega = k \left(\bar{u}_M - \frac{\beta_M}{k^2 + l^2} \right)$, 和群速 $C_{sx} = \frac{\omega}{k} + \frac{2 \beta_M k^2}{(k^2 + l^2)^2}$,

$C_{sy} = \frac{2 \beta_M k l}{(k^2 + l^2)^2}$ 。并由单位质量空气的扰动动能 $\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial Y} \right)^2 \right]$, 得对应的能量密度 $E =$

$\frac{A^2}{4} (k^2 + l^2)$ 。将(33)式代入(30)式即证得(32)式的正确性。若考虑基流 $\bar{u}_M$ 为 Y 的缓变函数, 则以

$\frac{\omega}{\omega - k \bar{u}_M}$ 乘(32)式两边, 得另一波作用守恒方程

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E}{\omega - k \bar{u}_M} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left(C_{sx} \frac{E}{\omega - k \bar{u}_M} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(C_{sy} \frac{E}{\omega - k \bar{u}_M} \right) = 0 \quad (34)$$

这一结果与文献[2]一致。

4. 结 语

本文分别对求波射线方程和波作用守恒提出一种新方法, 前者按 Fermat 原理求得波射线方程; 后者按“平均变分原理”求得波作用守恒。这两种新方法, 物理意义直观, 推导简明, 有可能成为研究波传播的新的途径。

参 考 文 献

- [1] Longuet-Higgins, M. S., Planetary waves on a rotating sphere I, *Proc. Roy. Soc. London*, **279**, 446—473, 1964.
- [2] Hoskins, B. J., and D. J. Karoly, The steady linear response of a spherical atmosphere to thermal and orographic forcing, *J. Atmos. Sci.*, **38**, 1179—1196, 1981.
- [3] Born, M., and F. Wolt, *Principles of optics*, Pergamon Press, (6th ed.), 109—117, 127—132, 1980.
- [4] 伍荣生, Rossby 波的能量、能量通量与 Lagrange 函数, *气象学报*, **44**, 2, 158—165, 1986.
- [5] Whitham, G. B., *Linear and nonlinear waves*, Springer-Verlag, New York, 1974.

A FEW PROPAGATING APPROACHES OF THE SPHERICAL STATIONARY PLANETARY WAVES

Lu Weisong

(*Nanjing Institute of Meteorology*)

Abstract

In recent years, using the great circle routes theorem found first by Longuet-Higgins and the energy dispersion of the spherical twodimensional Rossby waves, Hoskins explained both the teleconnections gained with the data analysis and the tele-response calculated in the numerical models, and made important advance. But the great circle routes theorem is found only when the basic flow angular velocity is constant, however the analytic solutions are difficultly found for the real basic flow on the sphere. On the basis of Fermat's principle, using the variational method, the general ray equation on the sphere is directly found. When the angular velocity of the basic flow is constant, the great circle routes theorem, visibly in the physics, is gained. For a few usual basic flow patterns, the analytical solutions can be found also. In addition, using "the average variational principle", the conservation equation of the wave action is directly found.