第47卷 第2期 气象学报 Vol.47, No. 2
1989年5月 ACTA METEOROLOGICA SINICA May, 1989

地形与Ekman边界层中的气流*

伍荣生

（南京大学大气科学系）

提要

利用σ坐标讨论地形与边界层气流是有很多方便的地方，因为，在此坐标中，下边界条件较为简单。在本工作中，首先将混合长理论加以推广并将它用于σ坐标，于是导得了用以描述地形上空边界层气流的控制方程，对边界层气流的特征，特别是对于Ekman抽吸作用进行了详细分析。指出有三种因子影响边界层顶部的垂直运动，第一种因子是边界层内涡度分布，这是与边界层中由于摩擦作用所引起的辐合辐散有直接联系；第二种因子是由于边界层顶部的气流爬坡运动所引起的；第三种是由于边界层中跨越等压线的分量爬坡所引起的，它出现于当等压线与地形等高线相平行时，或地转风呈现绕流情况时，这一作用最为明显。

一、引言

在山地上空，边界层内的气流除了受到摩擦作用外，还受到地形的影响，而地形与边界层的共同作用，又将影响到自由大气，因此，对这些问题的研究，是有一定意义的。尽管在现有的数值预告模式或数值模拟的工作中，都考虑了边界层和地形影响[1]，但由于在进行数值计算时，在垂直方向往往作了差分处理，因此，对于边界层内气流连续变化的特点以及物理过程的研究，并不是十分清晰的。

作者[2]曾采用z坐标研究了这些问题，由于下边界条件较为复杂，而对于结果亦有较大的敏感性，因此，仍有必要采取较为合理的方案进行研究。σ坐标的优点是使下边界条件化简，因此，在研究地形影响时，大多采用σ坐标，但是，用它来研究边界层气流，还不是多见，在文献[3]中，曾分析了σ坐标中湍流应力的表示方法，得出了许多复杂的结果。为了避免这些缺点，在本工作中，推广了混合长的概念，并将它应用于σ坐标，同时，引用了加权的时间平均[5]的方法，得出了描述边界层内运动的基本方程组，然后，利用它进行求解得出一些有兴趣的结果。

在本工作中，仍采用湍流交换系数k为常数的假定，这一假定是有其缺陷的，然而，采用此粗略假定，可以使问题化简，同时，可使我们对边界层运动的特征，有一概括的了解，有助于对问题深入细致的研究。事实上，完全可以避免这一假定，采用不同条件下k与l（混合长）的形式，利用数值方法，进行计算与分析，达到精细的结果，但这并不能使人对其结果有更深入的物理了解。

地转动量对于边界层的影响在作者以前工作中[2,4]，已有过分析与讨论，指出气压场在水平方向分布的不均匀，对于气流垂直分布以及Ekman抽吸作用均有重要影响，在

* 本文于1986年6月30日收到，1987年8月7日收到最后修改稿。本工作是在自然科学基金会支持下完成的，特此致谢。

本文中，仍采用地转动量的假定，得出了考虑地形、摩擦与地转动量共同作用的解，但为了更好地突出地形作用，在作分析讨论时，暂不研究地转动量的作用。而它的作用事实上也是相仿于[4]的讨论而得出的。

二、σ 坐标中的边界层方程

为了考虑地形影响，采用 σ 坐标，令

$$\sigma=\frac{p}{p_s} \tag{1}$$

其中 $P_s(x,y,t)$ 为场面气压，p 为气压。于一般动力气象或数值预告的教科书中，例如[1]，对 σ 坐标的基本方程都有了描述，于此就不再重复。下面只给出以后将用到的 p 坐标与 σ 坐标中，水平梯度算子的关系式，它为：

$$\nabla_\sigma(\quad)=\nabla_p(\quad)+\frac{\sigma}{p_s}\nabla p_s\frac{\partial(\quad)}{\partial\sigma} \tag{2}$$

其中附标 p 或 σ 表示 p 或 σ 坐标中的算符。

在 σ 坐标中，连续方程为：

$$\frac{\partial p_s}{\partial t}+\nabla\cdot p_s\boldsymbol{V}+\frac{\partial}{\partial\sigma}(p_s\dot{\sigma})=0 \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{V}$ 为水平风速矢，$\dot{\sigma}$ 表示 $\frac{d\sigma}{dt}$。运动方程可以写成：

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial p_s u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(p_s uu)\frac{\partial}{\partial y}(p_s uv)+\frac{\partial}{\partial\sigma}(p_s u\dot{\sigma})\\&\qquad=fp_s v-p_s\frac{\partial\varphi}{\partial x}-RT\frac{\partial p_s}{\partial x}\\&\frac{\partial p_s v}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(p_s uv)+\frac{\partial}{\partial y}(p_s vv)+\frac{\partial}{\partial\sigma}(p_s v\dot{\sigma})\\&\qquad=-fp_s u-p_s\frac{\partial\varphi}{\partial y}-RT\frac{\partial p_s}{\partial y}\end{aligned}\right. \tag{4}$$

考虑到大气的湍流性质，引入时间平均的概念，它定义为：

$$(\overline{\quad})=\frac{1}{\Delta t}\int_{t-\frac{1}{2}\Delta t}^{t+\frac{1}{2}\Delta t}(\quad)dt \tag{5}$$

用$(\quad)''$表示对$(\overline{\quad})$的偏差，偏差具有性质：

$$(\overline{\quad})''=0 \tag{6}$$

将场面气压 $p_s(x,y,t)$ 写成：

$$p_s(x,y,t)=\bar{p}_s(x,y,t)+p_s''(x,y,t) \tag{7}$$

但对风场与位势场用对 p_s 的加权平均及对此平均的偏差来表示，加权平均的定义如下：

$$(\tilde{\quad})=\frac{\overline{p_s(\quad)}}{\bar{p}_s} \tag{8}$$

用$(\tilde{\quad})$表示加权平均，用$(\quad)'$表示对此平均的偏差。如此有

$$\boldsymbol{V}=\tilde{\boldsymbol{V}}+\boldsymbol{V}',\ \ \phi=\tilde{\phi}+\phi' \tag{9}$$

加权平均的性质，可参见[5]。下面只给出对我们有用的结果。例如，按定义有

$$p_s\boldsymbol{V}=(\bar{p}_s+p_s'')(\widetilde{\boldsymbol{V}}+\boldsymbol{V}')$$
$$=\bar{p}_s\widetilde{\boldsymbol{V}}+p_s''\widetilde{\boldsymbol{V}}+p_s\boldsymbol{V}' \tag{10}$$

将上式对时间平均，则有

$$\overline{p_s\boldsymbol{V}}=\bar{p}_s\widetilde{\boldsymbol{V}}+\overline{p_s\boldsymbol{V}'} \tag{11}$$

再利用加权平均定义，可得

$$\overline{p_s\boldsymbol{V}'}=0 \tag{12}$$

同理，可得

$$\overline{p_s\nabla\phi'}=0 \tag{13}$$

利用这些性质，将连续方程对时间平均，可得

$$\frac{\partial\bar{p}_s}{\partial t}+\nabla\cdot\bar{p}_s\widetilde{\boldsymbol{V}}+\frac{\partial}{\partial\sigma}(\bar{p}_s\widetilde{\dot{\sigma}})=0 \tag{14}$$

这就是描述时间平均运动的连续方程。

将运动方程对时间平均，经过整理之后，可得：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\bar{p}_s\tilde{u}}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}(\bar{p}_s\tilde{u}\tilde{u})+\dfrac{\partial}{\partial y}(\bar{p}_s\tilde{u}\tilde{v})+\dfrac{\partial}{\partial\sigma}(\bar{p}_s\tilde{u}\widetilde{\dot{\sigma}})\\ \qquad=f\bar{p}_s\tilde{v}-\bar{p}_s\dfrac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x}-R\widetilde{T}\dfrac{\partial\bar{p}_s}{\partial x}+F_x\\ \dfrac{\partial\bar{p}_s\tilde{v}}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}(\bar{p}_s\tilde{u}\tilde{v})+\dfrac{\partial}{\partial y}(\bar{p}_s\tilde{v}\tilde{v})+\dfrac{\partial}{\partial\sigma}(\bar{p}_s\tilde{v}\widetilde{\dot{\sigma}})\\ \qquad=-f\bar{p}_s\tilde{u}-\bar{p}_s\dfrac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial y}-R\widetilde{T}\dfrac{\partial\bar{p}_s}{\partial y}+F_y\end{cases} \tag{15}$$

其中

$$\begin{cases}F_x=-\left(\dfrac{\partial}{\partial x}(\overline{p_su'u'})+\dfrac{\partial}{\partial y}(\overline{p_su'v'})+\dfrac{\partial}{\partial\sigma}(\overline{p_su'\dot{\sigma}'})\right)\\ F_y=-\left(\dfrac{\partial}{\partial x}(\overline{p_su'v'})+\dfrac{\partial}{\partial y}(\overline{p_sv'v'})+\dfrac{\partial}{\partial\sigma}(\overline{p_sv'\dot{\sigma}'})\right)\end{cases} \tag{16}$$

在[3]中，曾分析与研究了与(16)式相似的表示式，将其中 $\dot{\sigma}'$ 用Z坐标中的 w' 来表示，得出了很复杂的结果。事实上，这并不是必要的，将混合长的概念加以推广，则可以得出简单的结果。设一气块，从 $\sigma+l$ 处移到 σ，在此距离内，动量是守恒的，因此，在 σ 高度上，动量的脉动值，例如 u'，它为

$$u'=\tilde{u}(\sigma+l)-\tilde{u}(\sigma)\simeq l\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\sigma} \tag{17}$$

l 此处为一个无因次量，它具有随机性质，相仿于混合长理论，现在把 l 看作是一个平均量，称为广义的混合长。同时，假设

$$u'\sim v'\sim\alpha\dot{\sigma}' \tag{18}$$

其中 α 为一参量，具有长度的因次，如此 u' 动量的 σ 方向输送，可以写作

$$\overline{p_su'\dot{\sigma}'}=-\overline{p_s\frac{l^2}{\alpha}\left|\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\sigma}\right|}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\sigma} \tag{19}$$

至于其余动量的其他方向输送，可仿此求得。因此，在 σ 坐标中，在水平方向上不再由于地形存在而出现侧向边界，故水平方向的边界层或者侧向的湍流交换作用可以略去不计，如此，可得：

$$\begin{cases} F_x = \dfrac{\partial}{\partial\sigma}\left(\bar{p}_s K \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial\sigma}\right) \\ F_y = \dfrac{\partial}{\partial\sigma}\left(\bar{p}_s K \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial\sigma}\right) \\ K = \dfrac{l^2}{a}\left|\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial\sigma}\right| \end{cases} \tag{20}$$

对于 σ 坐标中 Ekman层,可取最简单的情况,即 $K=$常数,关于这一假定的缺点与方便地方,在引言中已给予分析与讨论。此时,(15)式便可最终化为:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial t}+\tilde{u}\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial x}+\tilde{v}\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial y}+\tilde{\dot\sigma}\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial\sigma}=f\tilde{v}-\dfrac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x} \\ \qquad -\dfrac{R\tilde{T}}{\bar{p}_s}\dfrac{\partial\bar{p}_s}{\partial x}+K\dfrac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\sigma^2} \\ \dfrac{\partial\tilde{v}}{\partial t}+\tilde{u}\dfrac{\partial\tilde{v}}{\partial x}+\tilde{v}\dfrac{\partial\tilde{v}}{\partial y}+\tilde{\dot\sigma}\dfrac{\partial\tilde{v}}{\partial\sigma}=-f\tilde{u}-\dfrac{\partial\tilde{\phi}}{\partial y} \\ \qquad -\dfrac{R\tilde{T}}{\bar{p}_s}\dfrac{\partial\bar{p}_s}{\partial y}+K\dfrac{\partial^2\tilde{v}}{\partial\sigma^2} \end{cases} \tag{21}$$

(21)式,便是我们用以讨论的基本方程。

三、地转动量假定下的 Ekman 气流

在[2]中,曾考虑了地转动量条件下 Ekman 气流问题,在本节中,将利用 σ 坐标来加以分析与研究,因为,地形的作用可以更好地反映出来。现令

$$\begin{cases} f\tilde{v}_g=\dfrac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x}+\dfrac{R\tilde{T}}{\bar{p}_s}\dfrac{\partial\bar{p}_s}{\partial x} \\ f\tilde{u}_g=-\dfrac{\partial\tilde{\phi}}{\partial y}-\dfrac{R\tilde{T}}{\bar{p}_s}\dfrac{\partial\bar{p}_s}{\partial y} \end{cases} \tag{22}$$

利用(2)式可知,$\tilde{u}_g$,$\tilde{v}_g$ 实际上就是通常 p 坐标系中的地转风分量。现再将(21)式无因次化,为此,令

$$\begin{cases} (\tilde{u},\tilde{v})=V(\tilde{u}',\tilde{v}') \\ (\tilde{u}_g,\tilde{v}_g)=V(\tilde{u}'_g,\tilde{v}'_g) \\ (x,y)=L(x',y') \\ t=\dfrac{L}{V}t' \end{cases} \tag{23}$$

同时,引入扩张变量 η

$$\eta=\frac{1-\sigma}{\sqrt{2\tilde{K}}},\quad \tilde{K}=\frac{K}{f} \tag{24}$$

则无因次的动量方程化为(已略去撇号):

$$\begin{cases} \mathrm{Ro}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\tilde{u}\dfrac{\partial}{\partial x}+\tilde{v}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\tilde{u}_g-\tilde{v}+\tilde{v}_g=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2} \\ \mathrm{Ro}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\tilde{u}\dfrac{\partial}{\partial x}+\tilde{v}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\tilde{v}_g+\tilde{u}-\tilde{u}_g=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\tilde{v}}{\partial\eta^2} \end{cases} \tag{25}$$

其中 Ro 为 Rossby 数,在正压的边界层中,$\tilde{u}_g$,$\tilde{v}_g$ 随 σ 或 η 的变化可以略去不计,故(25)式可近似地看作是关于 η 的常微分方程,整理后可得:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2}+a_1\tilde{u}+b_1\tilde{v}=c_1\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\tilde{v}}{\partial\eta^2}+a_2\tilde{u}+b_2\tilde{v}=c_2\end{cases}\tag{26}$$

其中

$$\begin{cases}a_1=-\mathrm{Ro}\dfrac{\partial\tilde{u}_g}{\partial x},\ b_1=1-\mathrm{Ro}\dfrac{\partial\tilde{u}_g}{\partial y},\ c_1=\tilde{v}_g+\mathrm{Ro}\dfrac{\partial\tilde{u}_g}{\partial t}\\ a_2=-\left(1+\mathrm{Ro}\dfrac{\partial\tilde{v}_g}{\partial x}\right),\ b_2=-\mathrm{Ro}\dfrac{\partial\tilde{v}_g}{\partial y},\ c_2=-\left(\tilde{u}_g-\mathrm{Ro}\dfrac{\partial\tilde{v}_g}{\partial t}\right)\end{cases}\tag{27}$$

此式与[2]所得的控制方程是完全相同的，此方程的下边界条件，可取作无滑的，即

$$\eta=0;\ \tilde{u},\tilde{v}=0\tag{28}$$

而上边界条件为 $\sigma=\sigma_0$ 时，$\tilde{K}\to 0$，故有：

$$\eta\to\infty;\ \tilde{u}=\tilde{u}_T,\ \tilde{v}=\tilde{v}_T\tag{29}$$

其中 $\tilde{u}_T,\tilde{v}_T$ 为边界层顶部的风速。事实上，可以利用(26)式，略去湍流作用，便可求得 $\tilde{u}_T,\tilde{v}_T$，它们可表示为

$$\tilde{u}_T=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{D^4},\ \tilde{v}_T=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{D^4}\tag{30}$$

$$D^4=a_1b_2-a_2b_1=1+Ro\left(\frac{\partial\tilde{v}_g}{\partial x}-\frac{\partial\tilde{u}_g}{\partial y}\right)$$
$$+\mathrm{Ro}^2\left(\frac{\partial\tilde{u}_g}{\partial x}\frac{\partial\tilde{v}_g}{\partial y}-\frac{\partial\tilde{v}_g}{\partial x}\frac{\partial\tilde{u}_g}{\partial y}\right)\tag{31}$$

(26)式，在边界条件(28)，(29)式下的解为[2,4]：

$$\begin{cases}\tilde{u}=\tilde{u}_T-\tilde{u}_Te^{-\beta}\cos\beta-c_1D^{-2}e^{-\beta}\sin\beta\\ \tilde{v}=\tilde{v}_T-\tilde{v}_Te^{-\beta}\cos\beta-c_2D^{-2}e^{-\beta}\sin\beta\end{cases}\tag{32}$$

$$\beta=D\eta\tag{33}$$

在形式上，此解与作者前得的结果完全相同，但是，η 的定义是有所区别的，它包括了地形的贡献。

为了使它较易为人所了解，现将 σ 坐标下的解再回到 p 坐标中去，考虑到边界层是近似地看作正压的，即令 $\dfrac{\partial\tilde{u}_g}{\partial\sigma}$，$\dfrac{\partial\tilde{v}_g}{\partial\sigma}$ 等于零，如此，(2)式就化为：

$$\nabla_\sigma\tilde{u}_g=\nabla_p(\tilde{u}_g),\nabla_\sigma\tilde{v}_g=\nabla_p\tilde{v}_g\tag{34}$$

因此，在(32)式中，除了 β 以外，其余的量均可直接换成 p 坐标中的量。而

$$\beta=D\eta=D\frac{\bar{p}_S-p}{\bar{p}_S\sqrt{2\tilde{K}}}\tag{35}$$

当 $R_0\to 0$，$D=1$，$\tilde{u}_T=\tilde{u}_g$，$\tilde{v}_T=\tilde{v}_g$，则(32)式就化为经典的 Ekman 边界层，此时，它们为

$$\begin{cases}\tilde{u}=\tilde{u}_g-\tilde{u}_ge^{-\eta}\cos\eta-\tilde{v}_ge^{-\eta}\sin\eta\\ \tilde{v}=\tilde{v}_g-\tilde{v}_ge^{-\eta}\cos\eta+\tilde{u}_ge^{-\eta}\sin\eta\end{cases}\tag{36}$$

现假定 $\tilde{V}_g=0$，且令 $\tilde{V}$ 第一次等于零的高度为边界层顶的高度，则此时应有关系式

$$1-\sigma_T=\sqrt{2\tilde{K}}\,\pi\tag{37}$$

或者

$$\bar{p}_T=(1-\sqrt{2\tilde{K}}\,\pi)\bar{p}_S\tag{38}$$

例如，$\bar{p}_s \approx 1000$hPa，一般情况下边界层顶部气压 $\bar{p}_T$ 大约为 900 hPa，如此可算得：

$$\sqrt{2\tilde{K}} \simeq 0.0318 \tag{39}$$

因此，在不同高度的地形上空，边界层厚度即底部与顶部气压差 $\bar{p}_S - \bar{p}_T$ 为

$$\bar{p}_S - \bar{p}_T = 0.1\bar{p}_S \tag{40}$$

从此可见，在 1000 hPa 处，厚度约为 100 hPa，而山地的地面气压为 500 hPa 时，其厚度只有 50 hPa，即只有 1000 hPa 的一半，事实上，气压越低，相对于同一气压差的高度差也就愈大，所以就高度言，厚度相差并没有这么大。例如按标准大气而言。1000hPa 与 900hPa 之高度差约为 880 m，而 500 hPa 与 450 hPa 的高度差约为 770 m。尽管如此，这一特点是很明显的，即边界层顶部并不是与地形高度相平行的，而在山顶处边界层顶部厚度就要薄些。这一点，是与[2]及[6]的结果是有所不同的。

四、边界层顶部的垂直速度

陈秋士曾对时间平均的连续方程进行过尺度分析[7]，认为对于大尺度运动，连续方程可以简化为：

$$\nabla\cdot\bar{p}_S\tilde{\boldsymbol{V}} + \frac{\partial}{\partial\sigma}(\bar{p}_S\tilde{\dot{\sigma}}) = 0 \tag{41}$$

利用 η 的表示式，再将上式无因次化，可得：

$$\frac{\partial}{\partial\eta}(\bar{p}_S\tilde{\dot{\sigma}}) = \sqrt{2\tilde{K}}\,\nabla\cdot(\bar{p}_S\tilde{\boldsymbol{V}}) \tag{42}$$

将上式对 η 从 0 到 ∞ 积分，且考虑到 $\sigma=1$ 即 $\eta=0$ 时，$\tilde{\dot{\sigma}}=0$，于是有

$$\begin{aligned}\bar{p}_S\tilde{\dot{\sigma}}_T &= \nabla\cdot\int_0^\infty \bar{p}_S\tilde{\boldsymbol{V}}\sqrt{2\tilde{K}}\,d\eta \\ &= \bar{p}_S\nabla\cdot\int_0^\infty \tilde{\boldsymbol{V}}\sqrt{2\tilde{K}}\,d\eta + \int_0^\infty \tilde{\boldsymbol{V}}\sqrt{2\tilde{K}}\,d\eta\cdot\nabla\bar{p}_S\end{aligned} \tag{43}$$

另一方面，利用(32)式，有

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \tilde{\boldsymbol{V}}\sqrt{2\tilde{K}}\,d\eta &= -\int_1^{\sigma_T}\tilde{\boldsymbol{V}}_T d\sigma - \int_0^\infty \tilde{\boldsymbol{V}}_T e^{-\beta}\cos\beta\cdot\sqrt{2\tilde{K}}\,d\eta \\ &\quad -\int_0^\infty \boldsymbol{C}D^{-2}e^{-\beta}\sin\beta\sqrt{2\tilde{K}}\,d\eta \\ &= -\tilde{\boldsymbol{V}}_T(\sigma_T-1) - \tilde{\boldsymbol{V}}_T\frac{\sqrt{2\tilde{K}}}{2D} - \boldsymbol{C}\frac{\sqrt{2\tilde{K}}}{2D^3}\end{aligned} \tag{44}$$

其中

$$\boldsymbol{C} = C_1\boldsymbol{i} + C_2\boldsymbol{j} \tag{45}$$

$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 为 x,y 方向的单位矢，$1-\sigma_T-\dfrac{\sqrt{2\tilde{K}}}{2D}$ 可取作为常数 a，$a\geqslant 0$；故有近似式

$$\int_0^\infty \tilde{\boldsymbol{V}}\sqrt{2\tilde{K}}\,d\eta \approx a\tilde{\boldsymbol{V}}_T - \boldsymbol{C}\frac{\sqrt{2\tilde{K}}}{2D^3} \tag{46}$$

此外，在 z 坐标中的垂直速度 $\tilde{w}$ 与 $\tilde{\dot{\sigma}}$ 之间有近似关系式[1)]

$$p_S\tilde{\sigma}_T\approx-\rho g\tilde{w}_T \tag{47}$$

考虑到 $\bar{p}_S=\bar{\rho}_S R\tilde{T}_S$, $W=ww'$, $\tilde{\dot{\sigma}}=\frac{V}{L}\tilde{\dot{\sigma}}'$，且令大气标高 $H\sim\frac{R\bar{T}_S}{g}$, $\frac{W}{H}\frac{L}{V}\sim1$，如此上式无因次化之后，略去撇号，有

$$\tilde{\sigma}_T\simeq-\tilde{w}_T \tag{48}$$

为了更清楚地突出地形作用，在下面讨论中，均不计地转动量的影响，此时，有

$$D'=1,\ C_1=\tilde{V}_g,\ C_2=-\tilde{u}_g$$

$$\widetilde{\boldsymbol{V}}_T=\widetilde{\boldsymbol{V}}_g \tag{49}$$

将这些关系式代入(43)式，即得

$$\tilde{w}_T\simeq-\frac{\alpha}{p_S}\widetilde{\boldsymbol{V}}_g\cdot\nabla\bar{p}_S+\frac{\sqrt{2\tilde{K}}}{2p_S}\left(\tilde{V}_g\frac{\partial\bar{p}_S}{\partial x}-\tilde{u}_g\frac{\partial\bar{p}_S}{\partial y}\right)+$$
$$+\frac{\sqrt{2\tilde{K}}}{2}\zeta_g \tag{50}$$

或者，写成

$$\tilde{w}_T\simeq-\alpha\widetilde{\boldsymbol{V}}_g\cdot\nabla\ln\bar{p}_S-\frac{\sqrt{2\tilde{K}}}{2}(\boldsymbol{K}\cdot\widetilde{\boldsymbol{V}}_g\times\nabla\ln\bar{p}_S)+$$
$$+\frac{\sqrt{2\tilde{K}}}{2}\zeta_g. \tag{51}$$

这表示，引起边界层顶垂直运动有三个因子：第一个因子是由于地形存在，边界层顶部的气流爬坡运动所起的。上坡时，$\widetilde{\boldsymbol{V}}_g\cdot\nabla\ln\bar{p}_S<0$，故有上升运动，下坡时，则有下沉运动，这一作用的大小是占主要的地位。第二个因子是由于地转风绕山运动时所引起的，当地转风绕山作气旋性旋转时，有$\boldsymbol{K}\cdot\widetilde{\boldsymbol{V}}_g\times\nabla\ln\bar{p}_S$向下，故有上升运动，反之，地转风绕山作反气旋旋转时，有下沉运动。这种上升与下沉运动是由于边界层的摩擦所引起的，例如，当等压线与地形等高线平行时，由于边界层内，摩擦作用使气流向低压一侧偏向，所以当此分量具有上坡时，有上升运动，反之，当所偏离等压线的分量下坡时，有下沉运动。第三个因子是由于涡度分布情况所决定，在正涡度处有上升运动，在反气旋涡度处有下沉运动，其原因是由于非地转风成份的辐合辐散所引起的，这是首先由 Charney-Eliassen[8] 所提出的。

作者在[2]中，考虑了下垫面的风速，也出现了地转风绕山运动所引起的上升运动，但它的大小决定于下垫面条件，如下垫面运动是无滑动的，则不出现此作用，但在本工作中，采取 σ 坐标之后，即使是无滑动条件，也出现了这一作用，因此，这一工作也是前一工作结果的改进。

地转动量的作用，实际上利用(43)、(44)式，便可以加以讨论与分析，为了节省篇幅也就不再予以重复了。

---

1) 按[3]处理，此式右侧还应附加小项 $\rho\,(\tilde{\boldsymbol{V}}\cdot\nabla\tilde{\phi}+\overline{\boldsymbol{V}'\cdot\nabla\phi'})$，为了便于讨论，故略去不计。

五、地形与摩擦的相互作用[1)]

Godev[9]曾进行过与本文相似的工作，由于处理方法与根据有所不同，因而有些结果也就有些差异。在这一节中，将就地形与摩擦的相互作用，结合 Godev 与本文结果，作进一步分析。

Godev 的工作与作者前文[2]相似，采用Z坐标系。最关键的一步是他假设湍流交换系数 K_Z 与地形 $Z_0(x,y)$ 有关，即假设：

$$K_z = K_z(Z_0(x,y)) \tag{52}$$

后又将此假设推广到不均匀热力条件，即令

$$K_z = \frac{G_0^2}{f}\psi(R_0, S, \lambda_x, \lambda_y) \tag{53}$$

式中 $R_0=\frac{G_0}{fZ_0}$ 为地形 Rossby 数，$S=\frac{\beta\delta\theta}{fG_0}$，它表示热力不均匀性，$\lambda_x$，$\lambda_y$ 表示斜压性。

由于引入(52)或(53)式，可以考虑地形 Z_0 与摩擦的作用，但也正由于整个工作建筑于这些假设上，从下面给出的他的简单例子，可以看到其结果存有一定局限性。

例如，在线性问题中，Godev 的基本方程为：

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z}K_z(Z_0(x,y))\frac{\partial u}{\partial z}+f(v-v_g)=0 \\ \frac{\partial}{\partial z}K_z(Z_0(x,y))\frac{\partial v}{\partial z}-f(u-u_g)=0 \end{cases} \tag{54}$$

对此式求涡度，再利用连续方程求得边界层顶部垂直速度为：

$$W_0(H)=\frac{K_z}{f}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{z=z_0}+\frac{1}{f}\frac{\partial K_z}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\left(v\frac{\partial z_0}{\partial x}-u\frac{\partial z_0}{\partial y}\right)_{z=z_0} \tag{55}$$

再用求得的 u,v 代入，即得最后表示式。从此可见，通过 K_z 是地形 $z_0(x,y)$ 的函数，引入了地形的作用。在 K_z＝常数的 Ekman 层中，得到的边界层顶部垂直速度为：

$$W_0(H)=(\boldsymbol{V}_g\cdot\nabla z_0)+\sqrt{\frac{K}{2f}}\zeta_g \tag{56}$$

第一项由于地形抬升作用，第二项是摩擦作用即通常所谓 Ekman 抽吸。其结果与 Pedlosky[6]完全相同，因之，就存在着相同的缺点，即地形与摩擦作用是相互独立的，二者的独立贡献的总和是边界层顶部的总的垂直运动。

而在我们的工作中，由于采用 σ 系且从最基础出发，除了仿照通常的混合长理论外，没有其他限制，因而，在 K＝常数情况下，得到(51)式，除了第一项，第三项与上式的二个作用相同外，还出现第二项，它反映了地形与摩擦的相互作用，其物理意义在上一节中已加以说明，从此可见，在 σ 坐标系所得到结果是较为理想的。Godev 的工作由于采用(52)式，使得问题具有一定限制与经验性。从(52)式可见，如 K_z 等于常数，必然要求 $z_0(x,y)$ 具有一定条件，这是有其不一致的地方。这也是(52)式的不足之处。在地转动量条件下，利用(43)式，可求得：

1) 评审者和编辑推荐并提供 Godev 的论文，使作者及时阅读同行的相似论文，本节在此基础上写出，在此，特向评审者和编辑致谢。

$$\widetilde{W}_T=-\frac{1}{\bar{p}_s}\widetilde{V}_T\cdot\nabla\bar{p}_s+\frac{\sqrt{2\widetilde{K}}}{2D^3}\frac{1}{\bar{p}_s}C\cdot\nabla\bar{p}_s$$

$$-\nabla\cdot\left(\alpha\widetilde{V}_T-\frac{\sqrt{2\widetilde{K}}}{2D^3}C\right) \tag{57}$$

$$C=\widetilde{V}_g\times K+R_0\frac{\partial\widetilde{V}_g}{\partial t} \tag{58}$$

在 C 中，除包含了气压场局地变化的贡献，特别是在讨论气旋时，局地变化项应与非线性项具有同等重要意义，而Godev 在整个过程中，采取了定常假定，这就使问题增加了另一限制。

由于引入(52)或(53)式，使地形与摩擦的相互作用，热力不均匀性的重要影响能够反映出来，这是有其特色的，如何进一步研究地形、热力与摩擦共同相互作用，这是一项有意义的工作。

参 考 文 献

[1] Haltiner, G. J., and R. T. Williams, Numerical prediction and dynamic meteorology, 2nd ed. John Wiley & Sons, 477, 1980.

[2] Wu Rongsheng, The influences of orography upon the flow within Ekman boundary layer under the assumption of geostrphic momentum, *Adv. Atm. Sci.*, 2, 1-7, 1985.

[3] Alpert, P., and J. Neuman, Horizontal components of the frictictional flow in the σ-coordinate system for mesometeorological flow model, Sixth conference on numerical weather prediction 310-312, Amer. Met. Soc., 1986.

[4] Wu Rongsheng, and W. Blumen, An analysis of Ekman boundary layer dynamics incorporating the geostrophic momentum approximation, *J. A. S.*, 39, 1774-1782, 1982.

[5] Cebeci, T., and A. M. O. Smith, Analysis of turbulent boundary layer, Academic Press, 404, 1974.

[6] Pedlosky, J., Geophysical fluid dynamics, Springer-Verlag, 1979.

[7] 陈秋士，中纬度地形影响大尺度运动简化方程及其物理过程的初步分析，气象学报 37，88-102，1979。

[8] Charney, J. G., and A. Eliassen, A numerical method for predicting the perturbation of the middle-latitude westerlies, *Tellus*, 1, 38-54, 1949.

[9] Godev, N., Contribution of the mutual effect of orographic and thermal unhomogeneities and surface friction to the generation of Mediteranean cyclones, WMO Short-and medium-Range weather predictions Research publication series, 3, 75-119, 1983.

EFFECTS OF OROGRAHY AND AIR FLOW IN EKMAN BOUNDARY LAYER

Wu Rongsheng

(Department of Atmospheric Sciences, Nanjing University)

Abstract

It is convenient to use σ-coordinate to discuss the dynamic effect of orography and the flow in Ekman boundary layer. Because the lower boundary condition in the coordinate is quite simple. In this paper, the theory of mixing length is generalized to the coordinate. Then the governing equations, describing the motion in the boundary layer over the mountain are derived. The features of flow in the boundary layer, especially the effects of Ekman pumping are discussed in details. It is pointed out that there are three factors which influence the vertical motion at the top of the boundary layer. The first is vorticity distribution in the boundary layer. This is related with the divergence of air flow caused by the friction. The second is the climbing up or down of the air flow over the mountain slopes. The third is the geostrophic wind which flows along the mountain. This is due to the climbing of air flow components which deviate from the geotrophic wind, caused by the effect of friction.