

用大气湍流资料计算 Lyapunov 指数和分数维*

郑祖光

刘式达

(北京气象学院)

(北京大学地球物理系)

提 要

本文从混沌和奇怪吸引子的遍历理论出发,用大气湍流资料计算了 Lyapunov 指数(LE)和分数维数(FD)。结果表明,在一定参数下,由所用资料算得第一个指数 LE_1 为 $+0.1-+0.4$, FD 为 2.3 。根据计算结果讨论了大气运动的混沌状态。

一、引 言

在非线性的耗散的大气动力系统中,确定混沌(Chaos)运动状态是很有意义的。用 Lyapunov 特征指数和分数维数等参量可以定性和定量地刻画大气运动的特征包括混沌。

计算特征指数 LE 的方法有两种:一是从微分动力方程计算 LE 谱,即 ODE 方法;二是基于混沌和奇怪吸引子的遍历理论^[1],根据实验资料作出 LE 的近似估计。A. Wolf^[2]首先提出后一种方法,并对上述两种方法的结果加以比较,说明后一种方法的可行性。分数维的定义和算法有很多种,我们认为关联维数的算法^[5]比较适用于实验资料。最近几年,用实验资料计算和分析 LE 和 FD 的工作在国外发展很快。我们基于文献[2]和[5]的算法,用大气观测资料首先作功率谱分析,然后计算 LE 和 FD ,并对计算结果进行分析,这对于进一步认识大气湍流(或混沌)现象有一定的意义。

二、Lyapunov 指数的计算

设在 m 维相空间中给定一个连续的动力系统:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad (1)$$

同时定义一个切空间矢量 \mathbf{W} 以及切空间矢量的方程:

$$\dot{\mathbf{W}}(t) = \hat{J}(\mathbf{X}) \mathbf{W}(t) \quad (2)$$

上面两式中带“ \cdot ”表示对时间 t 的微商,而

* 本文于1986年5月2日收到,1986年10月8日收到修改稿。本文是国家自然科学基金资助项目。

$$\hat{J}(\mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \quad (3)$$

为 Jacobi 矩阵。

对方程(1)和(2)联合求解, 在给定初条件 \mathbf{X}_0 和 \mathbf{W}_0 下解得:

$$\begin{cases} \mathbf{X}(t) = \mathbf{f}^t(\mathbf{X}_0) \\ \mathbf{W}(t) = \hat{U}_{\mathbf{X}_0}^t \cdot \mathbf{W}_0 \end{cases} \quad (4)$$

式中 \mathbf{f}^t 表示相空间的轨道, \hat{U} 是 \mathbf{f}^t 的微分。如令

$$e^{\hat{L}(t)} = [\hat{U}^T(t) \cdot \hat{U}(t)]^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

则按遍历理论, 在一定条件下矩阵 \hat{L} 的 m 个本征值就是轨道 \mathbf{f}^t 的 m 个 Lyapunov 指数, $LE_1 \geq LE_2 \geq \dots \geq LE_m$ 。 LE 谱的意义在于, 用遍历理论观察初始时刻一个任意小的 m 维球体在长时间内演变时, 由于流动局部变形(膨胀或收缩)的不均匀性, 这个球将变成不定形状的 m 维椭球, 它的第 j 个轴向长度的平均变化率就是第 j 个特征指数 LE_j 。显然, 若 $LE_j > 0$, 说明该轴趋于膨胀。对于一个耗散的动力系统, 若含一个以上正指数, 则系统存在奇怪吸引子, 由任意一种不确定性所规定的系统初态经过长时间演变后无法预测其状态, 亦即混沌。长期过程的不可预测性的含义就在于此^[6]。

我们计算所用的资料是中国科学院大气物理所用 Sonic Anemometer 在北京观测得到的。时间是 1985 年 1 月 21 日 14 时, 风速取样间隔是 1s。本文列出的计算结果是用其中 X 方向风速分量的时间序列得到的, 记为 $X(t)$, 单位是 m/s, 样本容量 $N=4096$ 。

计算分三步: (1)对时间序列 $X(t)$ 作功率谱分析, 以考察其是否具有湍流(混沌)性质; (2)由时间序列构造一个(嵌入的) m 维的相空间 R^m ; (3)在 R^m 中计算 LE 指数。

首先, 我们用 FFT 方法对 $X(t)$ 作功率谱分析, 图 1 即是谱图的一部分。

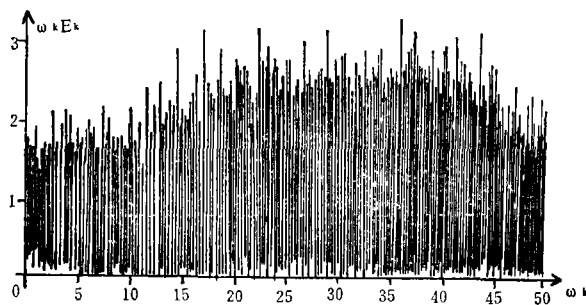


图 1 大气观测资料序列 $X(t)$ (风速分量) 的功率谱图

(序列长度 $N=4096$; 横坐标是频率 $\omega_k (K=1, 2, \dots)$; 纵坐标是 $\omega_k E_k$, E_k 是对应于 ω_k 的功率)

从图 1 看出, 它具有(弱)湍流运动功率谱的特点, 小幅度的波动夹杂着不规则的尖峰。为了看清楚这个特点, 列出一段数据于表 1 中。

表 1 风速分量时间序列 $X(t)$ 功率谱的部分数据

ω_K	22.14	22.16	22.19	22.21	22.24	22.26	22.29	22.31	22.33	22.36	22.38	22.41	22.43	22.46	22.48
$\omega_K E_K$	0.84	0.05	0.20	0.09	0.64	0.02	3.53	1.10	2.18	0.09	0.19	0.90	0.08	0.60	1.26
ω_K	22.50	22.53	22.55	22.58	22.60	22.63	22.65	22.69	22.71	22.73	22.75	22.77	22.80	22.82	22.85
$\omega_K E_K$	0.61	0.12	0.32	0.33	0.30	0.03	0.24	0.59	0.01	1.37	0.86	1.29	1.02	0.15	0.19
ω_K	22.87	22.90	22.92	22.94	22.97	22.99	23.02	23.04	23.07	23.09	23.12	23.14	23.16	23.19	23.21
$\omega_K E_K$	1.54	0.05	0.40	0.07	0.61	0.63	0.13	0.04	2.20	1.40	15.9	0.95	0.19	0.03	0.14
ω_K	23.24	23.26	23.29	23.31	23.33	23.36	23.38	23.41	23.43	23.46	23.48	23.51	23.53	23.55	23.58
$\omega_K E_K$	0.21	0.51	0.05	0.73	0.25	0.36	0.42	0.40	0.12	3.33	1.29	0.85	0.83	0.88	1.16

因此可以认为, 计算所用的资料反映出当时大气运动处于湍流或浑沌状态。

为了用离散时间点上风速分量的实测序列 $X(t)$ 算出特征指数 LE , 要重建或嵌入 m 维相空间 R^m 。如取 $m=3$, R^3 中的点 Y_i 与原序列 $X(t)$ 的关系是,

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_0 = [x(t_0), x(t_1), x(t_2)] \\ Y_1 = [x(t_1), x(t_2), x(t_3)] \\ \vdots \\ Y_{N-2} = [x(t_{N-2}), x(t_{N-1}), x(t_N)] \end{array} \right. \quad (6)$$

按照 F. Takens 的观点, 时间序列按某个滞后时间 τ 重新构造一个相空间 R^m 后, 能得到一个吸引子, 它的 LE 指数谱与原序列吸引子的 LE 指数谱相一致^[3]。因此, 由大气湍流资料重构的新空间中, 奇怪吸引子的性质不会改变。我们已从功率谱分析证实所用的序列反映出大气的浑沌状态, 所以 R^3 中 LE 指数谱的第 1 个指数 LE_1 应大于零, 下面就要把 LE_1 求出来。

为此, 在初始时刻 (t_0) 取 Y_0 作为基准点, 在余下的空间点中挑出与 Y_0 距离最近的点记为 Y'_0 , 得到线段 $\overline{Y_0 Y'_0}$, 其长度为 $L_1(t_0)$ 。下一时刻 (t_1) 基准点传播到 $Y(t_0+T)$, T 是演变步长, 此时 Y'_0 则沿着通过该点的轨线转移到 $Y'(t_0+T)$, 新线段 $\overline{Y(t_0+T)Y'(t_0+T)}$ 的长度为 $L_1(t_1)$, 见图 2。这样, 经过第一步演变 (step=1) 后, 初始时刻所规定的线段长度由 $L_1(t_0)$ 变为 $L_1(t_1)$, 由前述原理知, 长度的变化由 LE_1 来表征, 故在第一步有,

$$LE_{11} = \frac{1}{T} \log_2 \frac{L_1(t_1)}{L_1(t_0)} \quad (7)$$

若 $LE_{11} > 0$, 表示线段伸长。计算中为避免伸长累积导致计算精度下降乃至溢出, 规定伸长上限, 当伸长超过此限则寻找替换点 $Y''(t_0+T)$ 来取代 $Y'(t_0+T)$, 接着考察替换线段 $\overline{Y(t_0+T)Y''(t_0+T)}$ 的长度 $L'_1(t_1)$ 在下一步 (step=2) 的变化。替换点应取在基准轨线附近, 替换线段的长度 $L'_1(t_1)$ 以及与原线段的偏离角度 θ_1 都应当最小 (对于相空间的其它点而言)。演变逐步进行直到基准点传播到点集 $\{Y_i\}$ 的终点, 最后取特征指数的平均值作为 LE_1 的近似估计:

$$LE_1 = \frac{1}{t_s - t_0} \sum_{i=1}^s \log_2 \frac{L_1(t_i)}{L'_1(t_{i-1})} \quad (8)$$

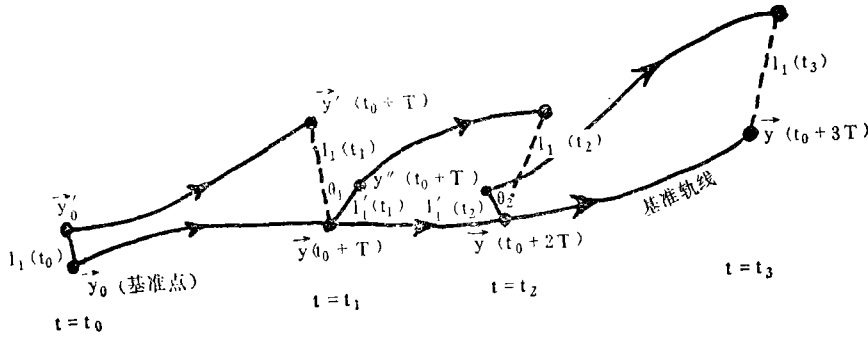


图 2 相空间中在 $t=t_i$ 时刻取定线段的演变过程和替换过程示意图

式中 S 是演变总步数, $t_s = ST$, LE_1 的单位是 bits/s, 即单位时间的信息量。

三、 LE_1 指数计算结果及分析

我们取 N, τ, T, S, m 为参数, 在不同的参数值下计算 LE_1 , 所得的结果部分列于表 2 中。图 3 给出不同参数值下 LE_1 随演变步数变化的曲线, 该曲线形式具有普遍的意义。

分析计算结果表明:

1. $LE_1 > 0$, 这与理论分析是一致的。当 $m=3$ 时, 不同参数值下 LE_1 数值在 $+0.1$ 至 $+0.4$ 之间。

2. LE_1 与步数有密切的关系。从图 3 看出, 随着步数增大, 计算值由前几步的很大数值急降, 转为缓降, 而后趋于稳定少变。这种现象说明计算方法是有效的, 经过一段时间后可以收敛; 如果系统存在 $LE_1 > 0$, 就可以用适当的方案把它估计出来。

3. LE_1 与原序列的长度 N (或转化为嵌入空间的点数) 有一定的关系。表 2 中当 $\tau=1, T=10$ 时, $N=512, LE_1=0.353$; $N=1024, LE_1=0.192$; $N=2048, LE_1=0.191$; $N=4096, LE_1=0.125$ 。这说明, 对于截取长度不同的序列, LE_1 的数值有所差别, 一般

表 2 不同参数*值下特征指数 LE_1 (单位: bits/s) 的计算值

N	512	512	512	512	512	1024	1024	1024	1024	2048	2048
m	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
τ	1	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1
T	10	2	5	2	5	10	5	5	10	10	20
LE_1	0.353	0.332	0.369	0.389	0.390	0.192	0.120	0.225	0.353	0.191	0.159
N	2048	2048	2048	2048	2048	2048	4096	4096	4096	4096	4096
m	3	4	5	5	5	6	3	3	4	4	4
τ	2	1	1	2	2	1	1	2	1	1	2
T	20	10	10	10	20	10	10	20	10	10	10
LE_1	0.105	0.197	0.089	0.070	0.065	0.077	0.125	0.115	0.110	0.110	0.057

* N 是原序列长度; m 是嵌入空间的维数; τ 是滞后时间; T 是演变步长; LE_1 是第一个 LE 指数(bits/s)。

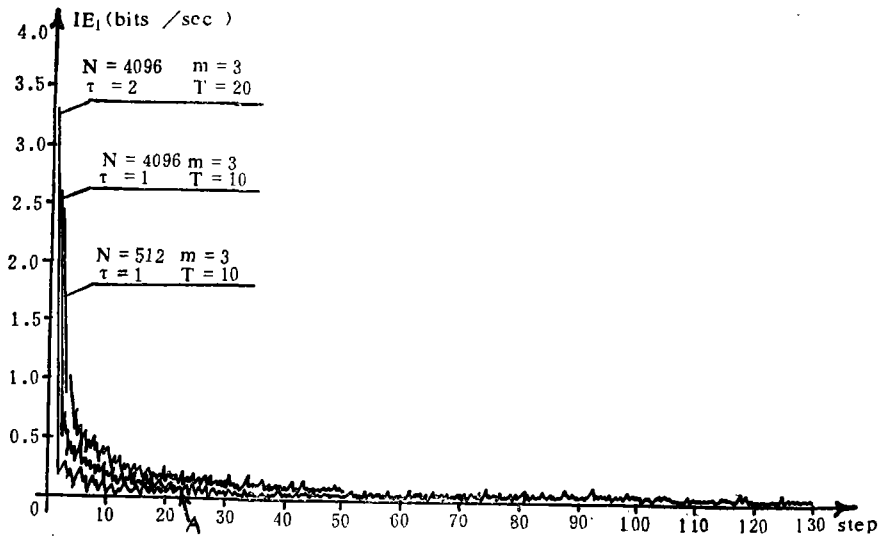


图 3 不同参数值下 LE_1 指数与演变步数 step 的关系
(130 步以后变化很小, 略绘出。 $N=4096$ 的两条线在 A 处以右基本重迭)

说来, 序列短, LE_1 大些。还可以从图 3 中 $N=512$ 和 $N=4096$ 两条线看出, 当 m, τ, T 相同时, 这两条线很接近, 根据前面第 2 点分析, 由于资料短而步数少 ($N=512, S=50$; $N=4096, S=409$), 所以 LE_1 的平均值较大。从 LE_1 的变化幅度看, 序列较短, LE_1 变化较小。

4. 当取相同的 N 和 m 时, LE_1 与 τ, T 的关系不明显。考察图 3 中 $N=4096, m=3$ 时, $\tau=1, T=10$ 和 $\tau=2, T=20$ 两条线在 200 步以内的变化可知, 前者在 40 步以后 LE_1 降到 0.1 以下, 而后者 20 步以后就降到 0.1 以下。从那以后, 二者的变幅都很小, 110 步以后都稳定在 0.02 附近。

5. 当 m 变化而其它参数取定时, LE_1 与 m 的关系。例如表 2 中 $N=2048, \tau=1, T=10$ 时, $m=3, 4, 5, 6$, 相应的 LT_1 为 0.191, 0.197, 0.089, 0.077, 随着 m 增大 LE_1 有减小的趋势, 但符号保持不变。

6. 线段长度的变化过程。计算中用到长度比 L_K :

$$L_K = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^K \log_2 \frac{L_1(t_i)}{L_1(t_{i-1})} \quad (9)$$

其中 K 是步数 ($K=1, 2, \dots, S$)。 L_K 表示在前 K 步所规定的线段随时间按对数增长的累积结果。相邻两步的 L_K 与 L_{K-1} 反映线段的伸缩, 而线段长度的变化过程, 则由图 4 所示。

图 4 是 $N=4096, m=3, \tau=1, T=10$ 的 $L_K (K=1, 2, \dots, 409)$ 演变的情形。从图上大体看出, 230 步以前, L_K 值在 2.0—5.0 之间; 230 到 350 步, L_K 增大到 5.0—8.0; 350 步之后有些减小但仍维持较高值。这说明, 在基准轨线附近的足够短的线段, 随时间而拉长, 因而与基准轨线紧邻的轨线随时间而拉开距离, 趋于辐散, 这正是混沌状态的基本特

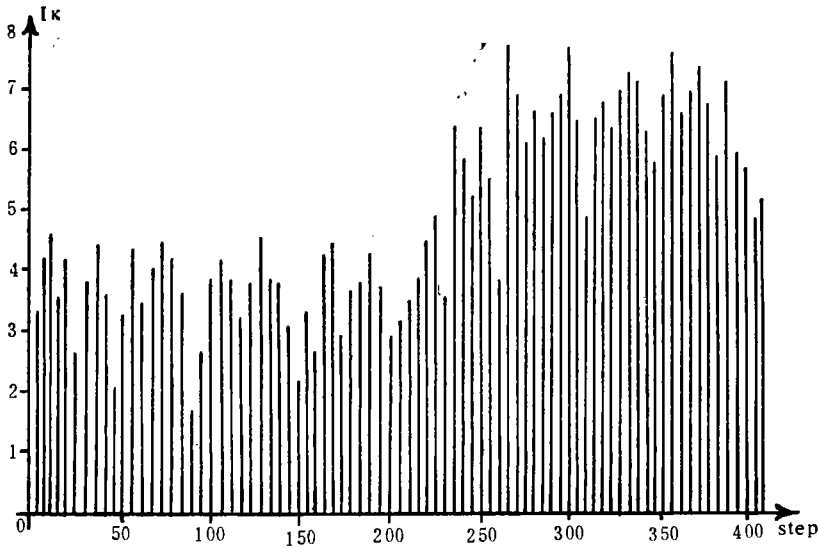


图 4 长度比 L_k 与演变步数 step 的关系

征。线段在整个演变过程中固然有时缩短,但长时间内伸缩行为的总效果是加快伸长,平均而言就有 $LE_1 > 0$ 。

四、分数维数的计算

在浑沌和奇怪吸引子的遍历理论中,除了上述特征指数外,分数维是又一个重要的概念。文献[4]从大气动力学的角度讨论维数问题,指出在准二维(小尺度)和准三维(大尺度)大气运动之间不存在维数的过渡,理论和经验上得到大气运动的维数是分数(fractal), $FD = 23/9 \approx 2.56$ 。因此,大气结构既不是“平面”,也不是各向同性(维数分别是 2 和 3),但经常表现出这两方面的特性。分数维还可以同 Kandelbrot(1974_a)^[7]提出的“间歇性”联系起来研究大气湍流问题。文献[5]指出,奇怪吸引子具有分数维的典型特征,并且提出用时间序列也可以对分数维作出近似估计。我们基于[5]的思路,计算关联维数 D_r 用来估计 FD 。

我们所用的时间序列仍然是前面计算 LE 用的大气湍流资料 $X(t)$ 。首先,沿用前面的方法,由 $X(t)$ 重构相空间 R^m , 点集 $\{Y_i\}$ 与原序列的关系亦是(6)式。

然后,定义关联函数 $C(r)$:

$$C(r) \equiv \lim_{N_R \rightarrow \infty} \frac{1}{N_R^2} \sum_{i,j=1}^{N_R} H(r - |Y_i - Y_j|) \quad (10)$$

式中 N_R 是 Y_i 的总点数, $r - |Y_i - Y_j| = Z$ 表示 R^m (这里取 $m=3$) 中两个点 Y_i 与 Y_j 的距离与给定的距离上限 r 之差, $H(Z)$ 是 Heaviside 函数:

$$H(Z) \begin{cases} = 1, Z > 0 \\ = 0, Z < 0 \end{cases}$$

对于很小的 r ,成立

$$C(r) \propto r^\nu \quad (11)$$

即 $C(r)$ 与 r 的指数幂成正比。指数 ν 是双对数图 $\log_2 C(r), \log_2(r)$ 图上直线的斜率:

$$\nu = \frac{\log_2 C(r)}{\log_2(r)} \quad (12)$$

并且定义满足(11)或(12)式的 ν 为关联维数 D_r ,作为分数维 FD 的近似值。对于大气湍流运动,我们通过物理考虑和上机调试,选取了适当的距离上限 r 。

五、 FD 的计算结果及分析

我们取 N 和 r 为参数,计算分数维的部分结果由图5和表3给出。

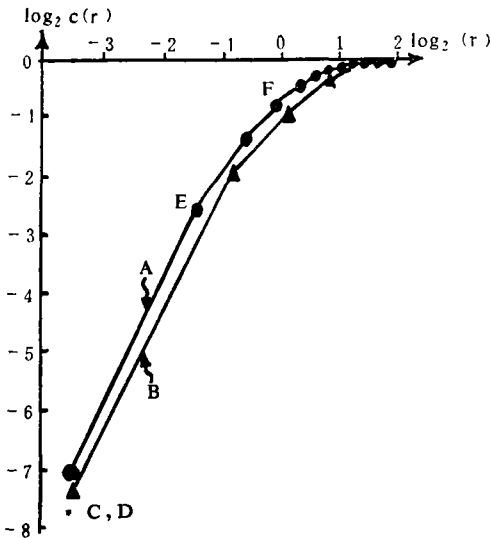


图5 双对数图 $\log_2 C(r), \log_2(r)$
(曲线A表示 $N=512$, B表示 $N=1024$,
曲线C, D只标其起点*)

表3 关联维数 D_r 与参数 N, r 的关系

N	512	512	512	512	1024	1024	2048	4096
r	0.1	0.4	0.5	0.7	0.1	0.6	0.1	0.1
D_r	2.136	2.006	2.085	2.688	2.192	2.685	2.307	2.273

分析计算结果表明:

1. 由(10)式知,

$$0 \leq C(r) \leq 1,$$

因而 $\log_2 C(r) \leq 0$,

当 $\log_2(r) < 0$ 时,由(16)式知 $FD = \nu \geq 0$ 。从表3看出,取 $r=0.1$ 时,对序列 $X(t)$ 截取不同长度 N ,得到 FD 在2.1—2.3之间。对于取定的 N ,由不同的 r 算出 FD 在2.1—2.7之间。

2. 由双对数图5知,随着 $\log_2(r)$ 增大, $\log_2 C(r)$ 值由急升转缓升而后趋向于零。这说明,关联函数 $C(r)$ 随 r 的增大呈指数增长且趋近于1。注意到图5上有一段近于直线的 EF ,它所对应的 r 值区间内更符合(12)式,这一段的斜率即分数维 $FD = 21/9 \approx 2.3$,这个结果与文献[4]和[5]的结果相近。

3. 对于同一个时间序列的不同截取长度 N ,得到的结果是很接近的。图5上A和B两条线分别对应 $N=512$ 和 $N=1024$,二者在 $\log_2(r) > 0$ 范围内趋于重合。图上C和D代表 $N=2048$ 和 $N=4096$,它们与 $N=1024$ 那条线很接近,为了避免线条之间交叉重迭,图上没有给出C和D两条线。

六、结 束 语

1. 用微分方程描述动力系统并且由此计算特征指数以刻画系统的状态,在很多情形

下有其局限性,因此,直接根据对系统观测的资料来计算特征指数和分数维数有一定的意义。

2. 本文用大气湍流资料得到 LE_1 为 $0.1-+0.4$, FD 为 2.3 。根据计算 LE 的原理,若在初始时刻取足够小的一个面积或体积,然后考察它们在长时间内的演变,则可以得到 LE_1+LE_2 或 $LE_1+LE_2+LE_3$ 。根据计算 FD 的原理,若取嵌入空间的维数 m 不同,则可以得到相应的分数维。本文为了与其他作者的结果作对比,也取 $m=3$ 。

3. 计算得到的 LE_1 和 FD 从不同角度表征了大气湍流的浑沌性质,为我们研究大气运动和湍流提供了新的途径。分数维不但反映了湍流的自相似结构,而且它和 Lyapunov 指数有内在的联系^[1]。

参 考 文 献

- [1] Eckmann, J. -P., and D. Ruelle, Ergodic theory of chaos and strange attractors, *Rev. of Mod Physics*, 57, 3, Part 1, 617-656, July 1985.
- [2] Wolf, A., J. B. Swift, H. L. Swinney and J. A. Vastano, Determining Lyapunov exponents from a time series, *Physica* 16D, 285-317, 1985.
- [3] Takens, F., Detecting strange attractors in turbulence, Lecture notes in mathematics, Vol. 898. D. A. Rand and L. S. Young, eds. P. 366, Spring, Berlin, 1981.
- [4] Schertzer, D., and S. Lovejoy, The dimension and intermittency of atmospheric dynamics, *Turbulent shear flows 4 selected papers from the fourth international symposium on turbulent shear flows*, 7-33, September 12-14, 1983.
- [5] Grassberger, P., and I. Procaccia, Characterization of strange attractors, *Physical Reviews Letters*, 50, 5, 346-349, 1983.
- [6] Lorenz, E. N., Predictability of fluid motion, *Am. Inst. Phys. Cont. Proc.*, 1983.
- [7] Madelbrot, B., Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier, *J. Fluid Mech.* 62, 331, 1974a.

COMPUTATION OF LYAPUNOV EXPONENT AND FRACTAL DIMENSION BY USING ATMOS- PHERIC TURBULENT DATA

Zheng Zuguang

Liu Shida

(Beijing Institute of Meteorology)

(Department of Geophysics, Peking University)

Abstract

Basing on the ergodic theory on chaos and strange attractors, Lyapunov exponent (LE) and fractal dimension (FD) are computed by using the atmospheric turbulent data $X(t)$.

In the case of fixed evolution time, the computation technique of LE can be separated into two parts: reconstruction of embedding phase space $R(m)$ from $X(t)$ and computation of LE_1 with respect to various parameters. The algorithm for FD can also be separated: reconstruction of $R(m)$ from $X(t)$ and computation of relation integral and dimension for approaching to FD.

In our work for $m=3$, LE_1 is $+0.1-+0.4$ and FD is $2.1-2.7$. These results are in accordance with theoretical analysis. Moreover, the relations of LE and FD to some control parameters are represented, respectively.