

积雨云微物理过程的数值模拟

(一) 微物理模式*

胡志晋 何观芳

(国家气象局气象科学研究院)

提 要

本文提出了一个比较完整的积雨云参数化微物理模式, 推导了 26 种主要微物理过程中水汽、云滴比水量和冰晶、雨滴、霰、雹的群体比水量和比浓度的转化率, 它们包括凝结(凝华)、蒸发、粒子间的碰并(撞冻)、冰晶核化、繁生、冻结、融化、云-雨、冰-霰、霰-雹的自动转化以及雹的干湿增长等。

一、引 言

积雨云是我国的主要降水云, 有时伴有暴雨、冰雹。它的动力过程很剧烈, 微物理过程也十分复杂。过去曾认为积雨云的降水主要由冰晶过程形成^[10], 五十年代以来发现暖雨过程也很重要^[2-4]。为了研究积雨云的降水机制和催化的可能性, 必须建立一个微物理学比较完整但又简单易算的模式。Cotton(1972)的一维定常模式^[5]中虽有相当复杂的冰相过程方程, 但基本上不适用时变模式。而且未考虑下落、融化、繁生等过程。Wisner(1972)和 Orville(1977)的雹云时变模式中实际上没有对冰晶作定量描述^[6,7]。Cotton(1982)的 CSU 三维模式中包括了冰晶, 但他们所用方法不能正确预报冰粒子的浓度, 致使地形云的计算结果欠佳, 该模式也没有专门考虑冰雹的生长下落^[8]。最近许焕斌(1985)考虑了雨和雹的数浓度演变, 在冰雹融化速率等方面对 Wisner(1972)模式有了明显的改进, 但是有关冰晶的过程仍未考虑^[9]。

本文在作者过去工作基础上^[10-12]提出了云滴、冰晶、霰、雹、雨的比质量和比浓度的预报方程(即双参数模式), 包括了积雨云中主要的 26 种微物理过程。模式直接计算贝吉隆过程(冰晶凝华增长), 冰晶长大成霰和雨滴碰并冰晶成霰的过程。专门计算了具有特大落速和危害的雹的形成、干湿增长、在强上升气流中的落出及其伴随的动力热力效应以及地面降雹特征。模式考虑了冰晶和降水粒子的浓度, 能够直接计算冰晶核化、繁生等过程, 并且更精确地计算各种过程的速率和降水粒子谱分布特征。因此, 利用这一模式可以

* 本文于 1986 年 1 月 13 日收到, 1986 年 6 月 27 日收到修改稿。

分析具体条件下各种降水过程的相对重要性,提出其主导的降水机制。目前,人工影响天气主要是人工增加冰晶或降水胚胎的浓度,以期增加降水量,减少大雹块数量,或者促进相变潜热的释放改变云的动力过程。利用这一模式就能比较逼真地模拟人工催化过程及其引起的变化。下面各节我们详细介绍这一模式对云和降水微物理特征所采用的双参数模拟方法,云物理特征量的计算方程组,凝结(华)蒸发(升华)过程的方程组,碰并(撞冻)过程的方程组,冰晶核化、繁生和各种粒子间自动转化过程方程组以及冻结、融化过程的方程组。在本文第二部分将介绍模式在实例中的试用情况。

二、微物理特征的参数化

云中各种水粒子的形状特性和大小有很大差别,我们根据积云中水粒子的物理特性,考虑到它们增长和下落的不同,将它们分成云滴、雨滴(直径 $D > 0.02$ cm的水滴)、冰晶(包括雪团)、霰(包括冻雨滴)、雹(直径 $D > 0.5$ cm的冰球)等五种。用它们的比水量和比浓度(单位质量空气中所含该粒子的质量和个数)来描述它们,即 $Q_c, Q_r, Q_i, Q_s, Q_h, N_c, N_r, N_i, N_s, N_h$,云滴浓度 N_c 根据实测变化较小而取为常数,其余均为计算预报量。同作者的层状云模式^[12]一致,各种粒子都假定有一定的谱分布,根据实测采用下式

$$N(D) = N_0 D^\alpha \exp(-\lambda D) \quad (1)$$

式中 D 为直径, N_0, λ 为参数。

1. 云滴谱

取 $\alpha = 2$,即为Хргнан-Мазин分布,

$$N_c = \int_0^\infty N_0 D^2 \exp(-\lambda D) dD = \Gamma(3) N_0 \lambda^{-3} \quad (2)$$

$$Q_c = \int_0^\infty N_0 D^3 \exp(-\lambda D) \frac{\pi}{6} D^3 \rho_w dD = \Gamma(6) \frac{\pi}{6} \rho_w N_0 \lambda^{-6} = 10 \pi \rho_w N_0 \lambda^{-6} \quad (3)$$

$$\bar{D}_c \approx \frac{6}{\pi \rho_w} \left(\frac{Q_c}{N_c} \right)^{1/4} \quad (4)$$

式中 $\bar{D}_c$ 为平均立方直径, ρ_w 为液水密度, $\Gamma(x)$ 为伽马函数,云滴的落速略去为0。

2. 雨滴谱、霰谱

取 $\alpha = 0$,即Marshall-Palmer分布,但 N_0 据实测取为变量。

$$N_{r(s)} = \int_0^\infty N_0 \exp(-\lambda D) dD = N_{0,r(s)} \lambda_{r(s)}^{-1} \quad (5)$$

$$Q_{r(s)} = \int_0^\infty N_0 \exp(-\lambda D) A_m D^3 dD = 6 A_{m,r(s)} N_{0,r(s)} \lambda_{r(s)}^{-4} \quad (6)$$

$$\bar{D}_{r(s)} = \left(\frac{Q_{r(s)}}{A_m N_{r(s)}} \right)^{1/4} \quad (7)$$

$$V_{r(s)} = A_{r(s)} D_{r(s)}^{0.8} \left(\frac{P_0}{P} \right)^{a_1} \quad (8)$$

$$M_{r(s)} = A_{m,r(s)} D_{r(s)}^3 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_{r(s)} &= \frac{1}{Q} \int_0^\infty N_0 \exp(-\lambda D) A_m D^{3.8} \left(\frac{P_0}{P} \right)^{a_1} dD \\ &= \frac{\Gamma(4.8)}{\Gamma(4)} A_{r(s)} \lambda_{r(s)}^{-3.8} \left(\frac{P_0}{P} \right)^{a_1} \end{aligned} \quad (10)$$

式中 $V_{r(e)}$, $M_{r(e)}$ 为单个雨滴 (或霰) 的落速和质量, $A_{mr} = \frac{\pi}{6} \rho_w = 0.524 \text{ gcm}^{-3}$, $A_{ms} = 0.065 \text{ gcm}^{-3}$ [16], $\bar{V}_{r(e)}$ 为雨滴 (霰) 的群体平均落速。雨滴落速 [8] 用 Lin & Orville 的近似式 [6], 但限定标准状况下的雨滴落速小于 9.7 m/s 。霰粒落速是根据 Locatelli & Hobbs 的观测结果 [13a] 建立的经验近似式。粒子落速受空气的压力和温度影响, 在实际大气中主要受气压影响。根据理论计算结果 [13f] 归纳成 $\left(\frac{P}{P_0}\right)^{\alpha_1}$ 的经验近似式。式中 $A_{vr} = 2100 \text{ cm}^{0.2} \text{ s}^{-1}$, $A_{vs} = 500 \text{ cm}^{0.2} \text{ s}^{-1}$, $\alpha_1 = 0.286$ 。

3. 冰晶谱

取 $\alpha = 1$,

$$N_i = \int_0^\infty N_0 D \exp(-\lambda D) dD = N_{0i} \lambda_i^{-2} \quad (12)$$

$$Q_i = \int_0^\infty N_0 D \exp(-\lambda D) dD A_{mi} D^2 dD = 6 N_{0i} A_{mi} \lambda_i^{-4} \quad (13)$$

$$\bar{D}_i = \left(\frac{Q_i}{A_{mi} N_i} \right)^{1/2} = 2.88 \lambda_i^{-1} \quad (14)$$

$$V_i = A_{vi} D_i^{1/3} \left(\frac{P_0}{P} \right)^{\alpha_1} \quad (15)$$

$$M_i = A_{mi} D_i^3 \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_i &= \frac{1}{Q_i} \int_0^\infty N_0 D_i \exp(-\lambda D_i) A_{mi} D_i^2 A_{vi} D_i^{1/3} \left(\frac{P_0}{P} \right)^{\alpha_1} dD_i \\ &= \frac{\Gamma(4.33)}{\Gamma(4)} A_{vi} \lambda_i^{-1/3} \left(\frac{P_0}{P} \right)^{\alpha_1} \end{aligned} \quad (17)$$

式中 $A_{mi} = 0.001 \text{ gcm}^{-2}$, $A_{vi} = 70 \text{ cm}^{2/3} \text{ s}^{-1}$, $\alpha_2 = 0.3$ 。式(15)和(16)是根据实测结果归纳得出的 [12]。

4. 雹谱

取截断的指数谱, 即

$$\begin{cases} N(D) = N_0 \exp(-\lambda D), & \text{当 } D \geq D_* \\ N(D) = 0, & \text{当 } D < D_* \end{cases} \quad (18)$$

式中 D_* 为冰雹的最小直径, 根据观测规范取 $D_* = 0.5 \text{ cm}$ 。

雹块质量同直径立方成正比, 落速按 Auer(1972)的经验公式 [13a], 加上空气密度订正, 即

$$M_h = A_{mh} D_h^3 \quad (19)$$

$$V_h = A_{vh} D_h^{1.4} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/2} \quad (20)$$

$$N_h = \int_{D_*}^\infty N_{0h} \exp(-\lambda_h D) dD = N_{0h} \exp(-\lambda_h D_*) \lambda_h^{-1} \quad (21a)$$

$$\begin{aligned} Q_h &= \int_{D_*}^\infty N_0 \exp(-\lambda_h D) A_{mh} D^3 dD \\ &= 6 N_h \lambda_h^{-2} A_{mh} \left[1 + \lambda_h D_* + \frac{1}{2} (\lambda_h D_*)^2 + \frac{1}{6} (\lambda_h D_*)^3 \right] \end{aligned} \quad (21b)$$

解(21b)得:

$$\lambda_1^{-1} = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + p^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + p^3}} - \frac{D_*}{3} \quad (22)$$

$$\text{式中} \quad q = -\frac{2D_*^3}{27} + \frac{Q_1}{6A_{m1}N_1}, \quad p = \frac{D_*^3}{18}$$

因为 $\frac{Q_1}{6A_{m1}N_1} > D_*^3$ 所以 $\frac{1}{4}q^2 \gg p^3$, 因此

$$\lambda_1^{-1} \approx \sqrt[3]{q} + p \frac{1}{\sqrt[3]{q}} - \frac{D_*}{3} = \sqrt[3]{q} + \frac{D_*^3}{18\sqrt[3]{q}} - \frac{D_*}{3} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_1 &= \int_{D_*}^{\infty} A_{r1} \exp(-\lambda_1 D) D^{3.5} dD / \int_{D_*}^{\infty} \exp(-\lambda_1 D) D^3 dD \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} \\ &= \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} A_{r1} \lambda_1^{-0.5} [\beta_1^{3.5} + 3.8 \beta_1^{2.5} + 10.64 \beta_1^{1.5} + 19.5 \int_{D_*}^{\infty} \exp(-\lambda D) D^{3.5} dD] / \\ &\quad [\beta_1^3 + 3 \beta_1^2 + 6 \beta_1 + 6] \end{aligned}$$

$$\approx \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} A_{r1} \lambda_1^{-0.5} [\beta_1^{3.5} + 3.8 \beta_1^{2.5} + 10.64 \beta_1^{1.5} + 17.84 (0.8 \beta_1 + 1)] / [\beta_1^3 + 3 \beta_1^2 + 6 \beta_1 + 6] \quad (24)$$

从近似式同相应的数值积分计算结果对比来看, 近似式的误差小于 2%。

$$\bar{D}_1 = \left(\frac{Q_1}{A_{m1}N_1} \right)^{1/3} = [\beta_1^3 + 3 \beta_1^2 + 6 \beta_1 + 6]^{1/3} \lambda_1^{-1} \quad (25)$$

式中 $\beta_1 = \lambda_1 D_*$, $D_* = 0.5 \text{ cm}$, $A_{m1} = 0.471 \text{ g cm}^{-3}$, $A_{r1} = 810 \text{ cm}^{0.2} \text{ s}^{-1}$ (已订正到标准状况)。

在上述各种粒子谱分布的假定下, N_0 和 λ 两个参数是待定的, 它们是粒子比质量和比浓度的函数, 反之亦然。这种方法我们最初在层状云模式^[10]中提出的, 称为“双参数模式”。国外的云模式一般都假定 N_0 不变, λ 是唯一的参数。实测表明^[13]雨滴谱的 N_0 变化很大, 有时在一次降水中就可改变 3 个数量级。在单参数模式中粒子浓度同平均直径成正比, 但实际上两者不一定是正相关的。这就影响了它们描述粒子微物理特征和演变速率的能力。许焕斌^[9]曾指出描述冰雹融化过程速率时单参数模式的缺点。对于其它过程也有类似情况。

三、微物理方程组

模式中考虑了 10 个微物理变量, 即 $Q_v, Q_c, Q_r, Q_i, Q_g, Q_h, N_r, N_i, N_g, N_h$ 。根据第二节的方程组可以推出它们的谱分布(λ, N_0)和特征量($\bar{D}, \bar{V}$)。这 10 个变量(M)的预报方程中考虑了它们的平流、湍流、夹卷、自身下落和源汇项即

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -(W - V_m) \frac{\partial M}{\partial z} + k \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} - E(M - M_e) + \frac{M}{\rho} \frac{\partial \rho V_m}{\partial z} + \frac{\delta M}{\delta t} \quad (26)$$

式中 W 为气流升速, k 为湍流交换系数, E 为夹卷率, M_e 为云外 M 值, $\bar{V}_m$ 为 M 的平均落速, 向下为正。 $\frac{\delta M}{\delta t}$ 为源汇项, 即微物理转化项。除了这 10 个变量外, 为了计算云雨自动转化过程而引入了云滴谱宽度 F_e 。由于云滴自身落速 $\bar{V}_m = 0$, 而且云内外混合只会使云滴全部减少而不影响云滴谱的宽度, 所以预报方程为

$$\frac{\partial F_c}{\partial t} = -W \frac{\partial F_c}{\partial z} + k \frac{\partial^2 F_c}{\partial z^2} + \frac{\partial F_c}{\partial t} \quad (27)$$

模式考虑了积雨云中 26 种主要微物理过程,即冰、雨、云、霰的凝结(华)和蒸发(S_{vi} , S_{vr} , S_{vc} , S_{vg});冰、霰、雹、雨对云滴的碰并(C_{ci} , C_{cg} , C_{ch} , C_{cr});雨和冰碰并(C_{ri} , C_{ir});霰、雹碰并雨(C_{rg} , C_{rh});霰、雹碰并冰晶(C_{ig} , C_{ih});冰晶核化、繁生(P_{vi} , P_{ci});云雨转化(A_{cr});冰霰转化(A_{ig});霰雹转化(A_{gh});雨冻结成霰(M_{rg});霰、雹、冰融化成雨(M_{gr} , M_{hr} , M_{ir});冰晶相并(C_{ii});雨滴相并(C_{rr});雹的湿增长极限(C_{wh})。这些过程都用三个英文字母表示,第一个指过程名称,第二个是被消耗的相,第三个是生成相或作用相。它们同时用来表达过程中的比质量变化速率。在该符号前加 N 表示过程中的比浓度变化率。如 C_{ir} 表示冰晶被雨滴碰并的过程和冰晶被雨滴碰并的速率, $N_{C_{ir}}$ 表示冰晶浓度被碰并的速率。当 $T > T_0$ 时,冰晶被碰并融化在雨滴中,它对冰晶和雨滴的比质量和比浓度的作用为:

$$C_{ir} = -\frac{\delta Q_i}{\delta t} = -\frac{\delta Q_r}{\delta t}, N_{C_{ir}} = -\frac{\delta N_i}{\delta t}, \frac{\delta N_r}{\delta t} = 0 \text{。当 } T \text{ 小于 } T_0 \text{ 时,冰晶碰并雨滴后雨滴冻结成}$$

$$\text{霰, } \frac{\delta Q_i}{\delta t} = -C_{ir}, \frac{\delta Q_r}{\delta t} = -C_{ri}, \frac{\delta Q_g}{\delta t} = C_{ir} + C_{ri}, \frac{\delta N_g}{\delta t} = -\frac{\delta N_i}{\delta t} = -\frac{\delta N_r}{\delta t} = N_{C_{ir}} \text{。}$$

考虑 26 种过程后,各个物理量的源汇项为:

$$\frac{\delta Q_r}{\delta t} = -S_{vc} - S_{cr} - S_{vi} - S_{vg} - S_{vh} - NP_{vi}Q_{co} \quad (28)$$

$$\frac{\delta Q_c}{\delta t} = S_{vc} - C_{ci} - C_{cr} - C_{cg} - C_{ch} - A_{cr} - NP_{ci}Q_{co} \quad (29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta Q_r}{\delta t} = S_{vr} + C_{cr} + A_{cr} + M_{gr} + M_{hr} + M_{ir} - M_{rg} \\ \text{当 } T \geq 273 \text{ K, } +C_{ch} + C_{ir} \\ \text{当 } T < 273 \text{ K, } -C_{rh} - C_{rg} - C_{ri} \quad (kk=0) \\ \quad -C_{wh} + C_{oh} - C_{rg} - C_{ri} \quad (kk=1) \end{array} \right. \quad (30)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta N_r}{\delta t} = NS_{vr} + A_{cr}/Q_{co} + NM_{gr} + NM_{hr} - NM_{rg} + NC_{rr} \\ \text{当 } T \geq 273 \text{ K, } (M_{hr} + C_{ch})/Q_{ho}; \\ \text{当 } T < 273 \text{ K, } -NC_{rh} - NC_{rg} - NC_{ri} \quad (kk=0) \\ \quad -NC_{rh} - NC_{rg} - NC_{ri} - (C_{oh} + C_{rh} - C_{wh})/Q_{ho} \quad (kk=1) \end{array} \right. \quad (31)$$

$$\frac{\delta Q_i}{\delta t} = S_{vi} + C_{ci} - C_{ir} - M_{ir} - C_{ig} - C_{ih} - A_{ig} + NP_{vi}Q_{co} + NP_{ci}Q_{co} \quad (32)$$

$$\frac{\delta N_i}{\delta t} = NS_{vi} - NC_{ir} - NM_{ir} - NC_{ig} - NC_{ih} - NA_{ig} + NP_{vi} + NP_{ci} + NC_{ii} \quad (33)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta Q_g}{\delta t} = S_{vg} + C_{cg} + C_{ig} - C_{gh} + A_{ig} + M_{gr} - M_{rg} - A_{gh} \\ \text{当 } T < 273 \text{ K, } \quad +C_{rg} + C_{ir} + C_{ri} \end{array} \right. \quad (34)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta N_g}{\delta t} = NS_{vg} + NA_{ig} - NA_{gh} + NM_{gr} - NM_{rg} - NC_{gh} \\ \text{当 } T < 273 \text{ K} \quad +N_{C_{ir}} \end{array} \right. \quad (35)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta \theta_h}{\delta t} = S_{vh} + C_{oh} + C_{gh} - M_{hr} + A_{gh} \\ \text{当 } T < 273 \text{ K} \quad +C_{ch} + C_{rh} \quad (kk=0) \\ \quad +C_{wh} \quad (kk=1) \end{array} \right. \quad (36)$$

$$\frac{\delta N_h}{\delta t} = N A_{ch} - N M_h, \quad (37)$$

式中当 $T \geq 273 \text{ K}$ 时, 雹碰并的云滴将不能冻结而同雹块上融化的水一起从雹上“流散”成次生雨滴, 雨碰并的冰晶将使雨滴长大。当 $T < 273 \text{ K}$ 时, 雨滴碰并冰晶后将冻结成雹, 雨滴碰到雹使雹长大。 kk 是冰雹增长状态指示, 当 $C_{ch} + C_{rh} \leq C_{wh}$ 时, 冰雹处于干增长, $kk=0$, 被碰并的云滴和雨滴冻结成雹; 当 $C_{ch} + C_{rh} > C_{wh}$ 时, 冰雹处于湿增长状态, $kk=1$, 被碰并的云雨滴中只有一部分 (C_{wh}) 冻结, 其余的成为水膜。我们假定这些水膜将从雹上流散成为次生雨滴, 其平均质量为 Q_{ho} , 这一过程中雨滴质量的收支为 $-C_{rh} + [(C_{ch} + C_{rh}) - C_{wh}] - C_{ch} - C_{wh}$; 雨滴浓度收支则为 $-N C_{rh} + [(C_{ch} + C_{rh}) - C_{wh}]/Q_{ho}$ 。据 Joe 和 List (1980) 实验得出, 湿增长时流散雨滴的体积平均直径为 1.4 mm [14], 即 $Q_{ho} = 1.47 \cdot 10^{-3} \text{ g}$ 。雨滴最小直径一般取 0.2 mm , 即 $Q_{ro} = 4.19 \cdot 10^{-6} \text{ g}$ 。冰晶最小直径取 $3 \mu\text{m}$, 即 $Q_{oo} = 10^{-10} \text{ g}$ 。次生冰晶的平均直径取 $10 \mu\text{m}$, 即 $Q_{eo} = 10^{-9} \text{ g}$ 。

四、凝结(华)蒸发过程的参数化方程

1. 云滴和冰晶的蒸发凝结率(升华凝华率)

在一般的积云模式中采用过饱和度为 0 的假定, 使凝结率的计算简化。这种假定不能正确描述三相并存时的贝吉隆过程和强烈上升气流中高过饱和度下的凝结过程。本模式用过饱和度来计算凝结率和冰晶凝华率:

$$\begin{aligned} S_{ro} &= \int_0^\infty N_o D^3 \exp(-\lambda D) 2 \pi k_d \rho D \left[1 + \frac{L_r k_d \rho Q_{sw}}{k_r T} \left(\frac{L_r}{RT} - 1 \right) \right]^{-1} (Q_r - Q_{sw}) dD \\ &= A_{ro} (Q_r - Q_{sw}) \\ A_{ro} &= 6 \pi k_d \rho \left[1 + \frac{L_r k_d \rho Q_{sw}}{k_r T} \left(\frac{L_r}{RT} - 1 \right) \right]^{-1} N_o (10 \pi N_o / Q_o)^{-\frac{1}{3}} \end{aligned} \quad (38)$$

Koenig (1972) 给出各种温度下冰晶在水面饱和条件下的增长率为 $\frac{\delta m_i}{\delta t} = a_1 \cdot m_i^{a_2}$,

式中 a_1, a_2 为温度的函数 [15]。我们把它推广到任意湿度下:

$$\begin{aligned} S_{ri} &= \int_0^\infty N_i D \exp(-\lambda D) a_1 (A_{mi} D^3)^{a_2} \frac{(Q_r - Q_{si})}{(Q_{sw} - Q_{si})} dD = A_{ri} (Q_r - Q_{si}) \\ A_{ri} &= 2 a_1 N_i (6 N_i / Q_i)^{-a_2} (Q_{sw} - Q_{si})^{-1} \\ N S_{ri} &\begin{cases} = 0 & , \text{ 当 } S_{ri} \geq 0 \\ = S_{ri} \cdot N_i / Q_i & , \text{ 当 } S_{ri} < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (39 \text{ a})$$

凝结(蒸发)过程对水汽量有很大的负反馈作用。 $\frac{\delta Q_r}{\delta t} = -S_{ro} = -A_{ro} (Q_r - Q_{sw})$,

凝结潜热对空气温度有很大影响, 从而对饱和比湿值有很大作用。考虑潜热对饱和比湿的作用后, 可得

$$\frac{\delta (Q_r - Q_{sw})}{\delta t} = \frac{\delta Q_r}{\delta t} \left(1 + \frac{\epsilon L^2 Q_{sw}}{C_p R T^3} \right) = -A_{ro} (Q_r - Q_{sw}) \left(1 + \frac{\epsilon L^2 Q_{sw}}{C_p R T^3} \right) \quad (40)$$

从(40)式可得凝结过程对 $(Q_r - Q_{sw})$ 作用的弛豫时间为

$$t_* = \left[A_{ro} \left(1 + \frac{\epsilon L^2 Q_{sw}}{C_p R T^3} \right) \right]^{-1} \quad (40 \text{ a})$$

由于云滴浓度很大, N_c 为 10^8 个/kg 的数量级, 所以弛豫时间很短, t_* 一般为 1 s 的数量级。所以用式(38)计算云滴凝结(蒸发)过程对水汽和温度的作用时必须采用小于 1 s 的时间步长, 否则会引起不稳定。雨滴、霰、雹的浓度一般小于 10^3 /kg 数量级, 相应弛豫时间为 10^3 s 的数量级。可以采用一般的计算时间步长。冰晶的凝华(升华)过程有时同云滴凝结(蒸发)相匹配, 形成贝吉隆过程, 所以我们将冰晶凝华过程同云滴凝结过程一起用小步长计算。为了节省计算机时, 我们采用分步长的方法, 即在计算凝结过程对水汽和温度的作用时采用小步长 $Dt_s = \frac{1}{N_s} Dt$, 即

$$\begin{cases} Q_v^{t+\Delta t} = Q_v^t + [B_v - A_{vi}(Q_v - Q_{si})' - A_{vc}(Q_v - Q_{sw})'] Dt_s \\ T^{t+\Delta t} = T^t + \left[B_T + \frac{L_s}{C_p} A_{vi}(Q_v - Q_{si})' + \frac{L_v}{C_p} A_{vc}(Q_v - Q_{sw})' \right] Dt_s \end{cases} \quad (41)$$

式中 B_v, B_T 为水汽和温度除云、冰凝结过程外的全部其它过程的变化率。 B_v, B_T, A_{vi}, A_{vc} 均按大步长计算, 在小步长中不变。完成一个大步长后 (即 N_s, Dt_s) 用平均凝结率 S_{vi}, S_{vi} 来计算云滴和冰晶, 即

$$\begin{cases} S_{vi} = \frac{1}{Dt} \sum_{i=1}^{N_s} A_{vi}(Q_v - Q_{si})' Dt_s \\ S_{vi} = \frac{1}{Dt} \sum_{i=1}^{N_s} A_{vi}(Q_v - Q_{si})' Dt_s \end{cases} \quad (41a)$$

采用上述分步长方法后计算稳定而机时增加不多。

2. 霰的凝结率

对于单个质量为 m , 直径为 D 的霰粒, 凝结率为:

$$\frac{dm}{dt} = 2\pi D k_d \rho (Q_v - Q_d) (1 + 0.23 Re^{\frac{1}{2}}) \quad (42)$$

式中 Q_d, T_d 为霰粒表面比湿和温度。

当霰粒处于湿增长时, $T_d = T_0, Q_d = Q_{s0}$, 式中 T_0, Q_{s0} 为冰点温度及相应饱和比湿。

$$\left. \frac{dm}{dt} \right|_w = 2\pi D k_d \rho (Q_v - Q_{s0}) (1 + 0.23 Re^{\frac{1}{2}}) \quad (43)$$

当霰粒处于干增长时

$$\frac{Q_s - Q_d}{Q_s} = \frac{Q_s(T) - Q_s(T_d)}{Q_s(T)} \approx \frac{T - T_d}{T} \left(\frac{L}{RT} - 1 \right) \quad (44)$$

霰粒热平衡方程为:

$$L_s \frac{dm}{dt} - 2\pi D k_d (T - T_d) (1 + 0.23 Re^{\frac{1}{2}}) + L_s (C_{is} + C_{rs}) = 0 \quad (45)$$

(44)代入(42)得:

$$\frac{dm}{dt} = 2\pi D k_d \rho \left[Q_v - Q_s + Q_s \left(\frac{L}{RT} - 1 \right) \frac{T - T_d}{T} \right] (1 + 0.23 Re^{\frac{1}{2}})$$

上式代入(45)得

$$\begin{aligned} L_s \frac{dm}{dt} + \left[\frac{k_d \rho Q_s}{k_i T} \left(\frac{L}{RT} - 1 \right) \right]^{-1} \frac{dm}{dt} - 2\pi D k_d (1 + 0.23 Re^{\frac{1}{2}}) \rho (Q_v - Q_s) \times \\ \times \left[\frac{k_d \rho Q_s}{k_i T} \left(\frac{L}{RT} - 1 \right) \right]^{-1} + L_s (C_{is} + C_{rs}) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{即 } \left. \frac{dm}{dt} \right|_d = [2\pi D k_d \rho (Q_v - Q_s) (1 + 0.23 Re^{\frac{1}{2}}) - \frac{L_s k_d \rho Q_s}{k_i T} \left(\frac{L}{RT} - 1 \right) (C_{is} + C_{rs})] \times$$

$$\times \left[1 + \frac{L_s k_s \rho Q_s}{k_i T} \left(\frac{L}{RT} - 1 \right) \right]^{-1} \quad (46)$$

比较(43)和(46)取 $\frac{dm}{dt}$ 较大的一个就行了。对于霰群有:

$$\begin{aligned} S_{r, \pi} &= \int_0^\infty 2 \pi k_s \rho (Q_r - Q_{s_i}) N_0 \exp(-\lambda D) D \left(1 + 0.23 \sqrt{\frac{\rho A_{r, \pi}}{\mu}} D^{0.5} \right) dD \\ &= 2 \pi k_s \rho (Q_r - Q_{s_i}) N_s (6 A_{m, \pi} N_s / Q_s)^{-\frac{1}{3}} \times \\ &\quad \times \left[1 + 0.23 \sqrt{\frac{\rho A_{r, \pi}}{\mu}} \Gamma(2.9) (6 A_{m, \pi} N_s / Q_s)^{0.3} \right] \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} S_{r, \pi} &= \left\{ \int_0^\infty 2 \pi k_s \rho (Q_r - Q_{s_i}) N_0 \exp(-\lambda D) D \left(1 + 0.23 \sqrt{\frac{\rho A_{r, \pi}}{\mu}} D^{0.5} \right) dD \right. \\ &\quad \left. - \frac{L_s k_s \rho Q_{s_i}}{k_i T} \left(\frac{L_s}{RT} - 1 \right) (C_{r, \pi} + C_{r, s}) \right\} \left[1 + \frac{L_s k_s \rho Q_{s_i}}{k_i T} \left(\frac{L_s}{RT} - 1 \right) \right]^{-1} \\ &= \left\{ 2 \pi k_s \rho (Q_r - Q_{s_i}) N_s (6 A_{m, \pi} N_s / Q_s)^{-\frac{1}{3}} \left[1 + 0.23 \sqrt{\frac{\rho A_{r, \pi}}{\mu}} \Gamma(2.9) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (6 A_{m, \pi} N_s / Q_s)^{0.3} \right] - \frac{L_s k_s \rho Q_{s_i}}{k_i T} \left(\frac{L_s}{RT} - 1 \right) (C_{r, \pi} + C_{r, s}) \right\} \left[1 + \frac{L_s k_s \rho Q_{s_i}}{k_i T} \left(\frac{L_s}{RT} - 1 \right) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (48)$$

$$S_{r, \pi} = \begin{cases} \text{MAX}[S_{r, \pi}, S_{r, s}], & \text{当 } T < T_s \\ S_{r, s}, & \text{当 } T \geq T_s \end{cases} \quad (49)$$

凝结(凝华)对浓度无影响,蒸发(升华)将使浓度减少。在式(43)中 $R_s^{\frac{1}{2}} \sim D^{0.9}$, $\frac{dm}{dt} \sim D^{1.9}$, $\frac{dD}{dt} \sim D^{0.1}$, 即大粒子的直径减小率略小于小粒子,谱分布曲线近似平移,即 λ 的变化很小。因此采用

$$NS_{r, \pi} = \begin{cases} 0 & , \text{当 } S_{r, \pi} \geq 0 \\ = S_{r, \pi} N_s / Q_s & , \text{当 } S_{r, \pi} < 0 \end{cases} \quad (50)$$

3. 雨滴的凝结蒸发

$$\begin{aligned} S_{r, r} &= \int_0^\infty 2 \pi k_s \rho (Q_r - Q_{s, r}) N_0 \exp(-\lambda D) D \left[1 + 0.23 \sqrt{\frac{\rho A_{r, r}}{\mu}} D^{0.5} \right] dD \left[1 + \frac{L_r k_s \rho Q_{s, r}}{k_i T} \left(\frac{L_r}{RT} - 1 \right) \right]^{-1} \\ &= 2 \pi k_s \rho (Q_r - Q_{s, r}) N_r (6 A_{m, r} N_r / Q_r)^{-\frac{1}{3}} \left[1 + 0.23 \Gamma(2.9) \sqrt{\frac{\rho A_{r, r}}{\mu}} (6 A_{m, r} N_r / Q_r)^{0.3} \right] \times \\ &\quad \times \left[1 + \frac{L_r k_s \rho Q_{s, r}}{k_i T} \left(\frac{L_r}{RT} - 1 \right) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (51)$$

雨滴数浓度的变化为:

$$NS_{r, r} = \begin{cases} 0 & , \text{当 } S_{r, r} \geq 0 \\ = S_{r, r} N_r / Q_r & , \text{当 } S_{r, r} < 0 \end{cases} \quad (52)$$

式中 L 为相变潜热, k_s, k_i, μ 为空气中水汽扩散系数、导热系数和动力学粘性系数,都是温度的函数; $L_s, L_r, L_{s, r}$ 分别为冻结、凝结、凝华潜热。

4. 冰雪的凝华、升华

鉴于雹块的通风系数 $1 + 0.29 R_s^{\frac{1}{2}} \approx 0.29 R_s^{\frac{1}{2}}$, 我们得出:

在湿增长时($k=1$),

$$S_{r,1} = 2\pi k d \rho (Q_r - Q_{s,1}) 0.29 \sqrt{\frac{\rho A_{r,1}}{\mu}} \int_{D_*}^{\infty} N_0 D^{1.5} \exp(-\lambda_1 D) dD$$

$$\approx 2\pi k d \rho (Q_r - Q_{s,1}) 0.29 \sqrt{\frac{\rho A_{r,1}}{\mu}} N_0 \lambda_1^{-1.5} [(\lambda_1 D_*)^{1.5} + \Gamma(2.9)(0.9 \lambda_1 D_* + 1)] \quad (54)$$

这一近似式的误差在 2% 以内。

在干增长时($k=0$),

$$S_{r,0} = \left[\int_{D_*}^{\infty} 2\pi k d \rho (Q_r - Q_{s,1}) 0.29 \sqrt{\frac{\rho A_{r,1}}{\mu}} D^{0.5} N_0 \exp(-\lambda D) dD - \frac{L_s k d \rho Q_{s,1}}{k_i T} \right. \\ \left. \left(\frac{L_s}{RT} - 1 \right) (C_{s,1} + C_{r,1}) \right] \left[1 + \frac{L_s k d \rho Q_{s,1}}{k_i T} \left(\frac{L_s}{RT} - 1 \right) \right]^{-1}$$

$$= \left\{ 2\pi k d \rho (Q_r - Q_{s,1}) 0.29 \sqrt{\frac{\rho A_{r,1}}{\mu}} N_0 \lambda_1^{-1.5} [(\lambda_1 D_*)^{1.5} + \Gamma(2.9)(0.9 \lambda_1 D_* + 1)] \right. \\ \left. - \frac{L_s k d \rho Q_{s,1}}{k_i T} \left(\frac{L_s}{RT} - 1 \right) (C_{s,1} + C_{r,1}) \right\} \left[1 + \frac{L_s k d \rho Q_{s,1}}{k_i T} \left(\frac{L_s}{RT} - 1 \right) \right]^{-1} \quad (55)$$

五、碰并过程的参数化方程

1. 冰晶碰并云滴^[12]

冰晶同云滴的碰并系数同云滴大小和冰晶大小有关。根据已有的观测理论和实验研究结果^[13], 可以近似地认为, 直径小于 15 μm 的云滴碰并系数接近于 0, 对于直径更大的云滴, 碰并系数可近似地取一平均值。碰并系数平均值同冰晶尺度有关, 可归纳成下式:

$$\bar{E}_{ci} = \begin{cases} = 0 & \text{当 } D_i < 0.03 \text{ cm} \\ = 15(D_i - 0.03) & 0.03 < D_i < 0.05 \text{ cm} \\ = 0.3 + 10(D_i - 0.05) & 0.05 < D_i < 0.07 \text{ cm} \\ = 0.5 + 5(D_i - 0.07) & 0.07 < D_i < 0.11 \text{ cm} \\ = 0.7 & D_i > 0.11 \text{ cm} \end{cases} \quad (56)$$

这样可以推出下述冰晶碰并云滴的方程:

$$C_{s,1} = \int_0^{\infty} \int_{D_*}^{\infty} \pi D_i^2 A_{r,i} D_i^{\frac{1}{3}} N_{0,i} \exp(-\lambda_i D_i) D_i \rho \frac{\pi}{6} D_c^2 N_{0,c} \exp(-\lambda_c D_c) D_c^2 dD_c dD_i$$

$$= \frac{\pi}{4} \Gamma\left(4\frac{1}{3}\right) A_{r,i} \rho Q_{s,i} \bar{E}_{ci} (6 A_{m,i} N_i / Q_i)^{-\frac{1}{3}} N_i \exp(-\beta_i) \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{i!} \right] \quad (57)$$

式中 $\beta_i = \lambda_c D_i^*$, $\lambda_c = (10 \rho_w \pi N_c / Q_c)^{\frac{1}{3}}$, $D_i^* = 15 \mu\text{m}$ 。用冰晶群体的质量中值直径 $D_{i,0}$ $= \frac{3.67}{\lambda_i}$ 从式(56)算出 $\bar{E}_{ci}$ 用于式(57)。

2. 雨滴和霰碰并云滴^[12]

$$C_{s,r} = \int_0^{\infty} N_0 \exp(-\lambda D) \pi D^2 A_{r,r} D^{0.5} \rho Q_c E \left(\frac{P_c}{P} \right)^{a_1} dD$$

$$= \frac{\pi}{4} \Gamma(3.8) A_{r,r} \rho Q_c \bar{E} N_r [6 A_{m,r} N_r / Q_r]^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{P_c}{P} \right)^{a_1} \quad (58)$$

$$C_{r,r} = \int_0^\infty N_r \exp(-\lambda D) \pi D^2 A_{r,r} D^{2.5} \rho Q_r E \left(\frac{P_r}{P} \right)^{0.1} dD \\ = \frac{\pi}{4} \Gamma(3.8) [A_{m,r} 6]^{-1} \rho Q_r \bar{E} Q_r [6 A_{m,r} N_r / Q_r]^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{P_r}{P} \right)^{0.1} A_{r,r} \quad (59)$$

3. 霰碰并云滴

$$C_{s,s} = \frac{\pi}{4} A_{r,s} \rho Q_s E \int_0^\infty N_{s,s} \exp(-\lambda_s D) D^{2.5} dD \left(\frac{\rho_s}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \approx \frac{\pi}{4} A_{r,s} \rho Q_s E N_s \lambda^{-2.5} [(\lambda_s D_s)^{2.5} + 2.8(\lambda_s D_s)^{1.5} + \Gamma(3.8)(0.8 \lambda_s D_s + 1)] \left(\frac{\rho_s}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (60)$$

4. 雨滴碰并冰晶

由于雨滴落速一般大于冰晶，故采用平均落速近似。

$$C_{i,r} = \frac{\pi}{4} \rho A_{m,i} (\bar{V}_r - \bar{V}_i) \bar{E}_{r,i} \int_0^\infty \int_0^\infty N_{r,i} N_{s,i} (D_r + D_i)^2 D_i^2 \exp(-\lambda_i D_i) \exp(-\lambda_r D_r) dD_i dD_r \\ = \frac{\pi \rho}{12 A_{m,r}} Q_r Q_i \lambda_r \left[1 + 4 \frac{\lambda_r}{\lambda_i} + 10 \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_i} \right)^2 \right] |\bar{V}_r - \bar{V}_i| \bar{E}_{r,i} \quad (61)$$

式中 $\bar{V}_r$ 和 $\bar{V}_i$ 按式(11)和(18)算出。

$$NC_{i,r} = \frac{\pi}{4} \rho (\bar{V}_r - \bar{V}_i) E_{r,i} \int_0^\infty \int_0^\infty N_{r,i} N_{s,i} (D_r + D_i)^2 D_i^2 \exp(-\lambda_i D_i) \exp(-\lambda_r D_r) dD_i dD_r \\ = \frac{\pi}{12 A_{m,r}} \rho N_i Q_r \lambda_r \left[1 + 2 \frac{\lambda_r}{\lambda_i} + 3 \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_i} \right)^2 \right] |\bar{V}_r - \bar{V}_i| E_{r,i} \quad (62)$$

对于雨滴和冰晶的碰并系数研究较少，我们取 $\bar{E}_{r,i} = 0.8$ 。

5. 冰晶碰并雨滴

$$C_{r,i} = \frac{\pi}{4} \rho A_{m,r} |\bar{V}_r - \bar{V}_i| \bar{E}_{r,i} \int_0^\infty \int_0^\infty N_{r,i} N_{s,i} (D_r + D_i)^2 D_i^2 \exp(-\lambda_i D_i) \exp(-\lambda_r D_r) dD_i dD_r \\ = 5 \pi N_i \rho Q_r \lambda_r^{-1} \left[1 + 0.8 \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_i} \right) + 0.3 \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_i} \right)^2 \right] \bar{E}_{r,i} |\bar{V}_r - \bar{V}_i| \quad (63)$$

$$NC_{r,i} = NC_{i,r} = \frac{\pi}{4} \rho |\bar{V}_r - \bar{V}_i| \bar{E}_{r,i} \int_0^\infty \int_0^\infty N_{r,i} N_{s,i} D_i (D_r + D_i)^2 \exp(-\lambda_i D_i) \exp(-\lambda_r D_r) dD_i dD_r \\ = C_{r,i} N_r / Q_r \left[1 + 4 \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_i} \right) + 10 \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_i} \right)^2 \right] \left[10 + 8 \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_i} \right) + 3 \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_i} \right)^2 \right]^{-1} \quad (64)$$

6. 霰碰并雨滴

$$C_{r,s} = \frac{\pi}{4} \rho \int_0^\infty \int_0^\infty N_{s,s} N_{r,s} \exp(-\lambda_s D_s) \exp(-\lambda_r D_r) E(D_s + D_r) |A_{r,s} D_r^{1.5} - A_{r,s} D_s^{1.5}| A_{m,r} D_r^2 dD_r dD_s \\ = \frac{\pi}{24} \bar{E}_{r,s} A_{r,r} Q_r \rho (6 A_{m,r} N_r / Q_r)^{-\frac{1}{2}} N_s K M_{r,s} \quad (65)$$

$$K M_{r,s} = \int_0^\infty \int_0^\infty \exp[-(D_i + D_s)] \left(D_i + \frac{\lambda_r}{\lambda_s} D_s \right)^2 D_i^2 \left| D_i^{1.5} - \frac{A_{r,s}}{A_{r,r}} \left(D_s \frac{\lambda_r}{\lambda_s} \right)^{1.5} \right| dD_i dD_s \quad (66)$$

如果采用平均落速差近似，则

$$C'_{r,s} = \frac{\pi}{24} \bar{E}_{r,s} A_{r,r} Q_r (6 A_{m,r} N_r / Q_r)^{-\frac{1}{2}} \rho N_s K M'_{r,s} \quad (67)$$

$$KM'_{r,s} = 120 \times 2.97 \left[1 + 0.4 \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_s} \right) + 0.1 \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_s} \right)^2 \right] \left| 1 - \frac{A_{rs}}{A_{rr}} \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_s} \right)^{0.8} \right| \quad (68)$$

根据(66)式的数值积分结果同(68)式比较,可取 Orville 的订正^[6]:

$$KM'_{r,s} = 356.4 \left[1 + 0.266 \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_s} \right) + 0.044 \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_s} \right)^2 \right] \left| 1 - \frac{A_{rs}}{A_{rr}} \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_s} \right)^{0.8} \right| \quad (69)$$

$$\begin{aligned} VC_{r,s} &= \frac{\pi}{4} \rho \int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-\lambda_s D_s) \exp(-\lambda_r D_r) E(D_s + D_r)^2 |A_{rs} D_r^{0.8} - A_{rs} D_s^{0.8}| dD_r dD_s \\ &= \frac{\pi}{4} A_{rs} \bar{E}_{rs} N_r \rho (6 A_m N_r / Q_r)^{-\frac{2.8}{3}} N_s K N_{rs} \end{aligned} \quad (70)$$

$$KN_{rs} = \int_0^\infty \int_0^\infty \exp[-(D_1 + D_2)] \left(D_1 + \frac{\lambda_r}{\lambda_s} D_2 \right)^2 \left| D_1^{0.8} - \frac{A_{rs}}{A_{rr}} \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_s} D_2 \right)^{0.8} \right| dD_1 dD_2 \quad (71)$$

如果采用平均落速近似,则

$$NC'_{rs} = \frac{\pi}{4} A_{rs} \bar{E}_{rs} N_r (6 A_m N_r / Q_r)^{-\frac{2.8}{3}} \rho N_s K N'_{rs} \quad (72)$$

$$KN'_{rs} = 2 \times 2.97 \left[1 + \frac{\lambda_r}{\lambda_s} + \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_s} \right)^2 \right] \left| 1 - \frac{A_{rs}}{A_{rr}} \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_s} \right)^{0.8} \right| \quad (73)$$

7. 雹碰并雨滴

由于雹的落速一般比雨滴大,可采用平均落速近似

$$\begin{aligned} C_{r,h} &= \frac{\pi}{4} \rho |\bar{V}_h - \bar{V}_r| \int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-\lambda_r D_r - \lambda_h D_h) N_r N_h E(D_r + D_h)^2 A_{rh} D_r^2 dD_r dD_h \\ &= \frac{\pi}{4} \rho |\bar{V}_h - \bar{V}_r| \bar{E}_{rh} Q_r N_r \lambda_h^{-2} \left[(\lambda_h D_r)^2 + 2 \lambda_h D_r + 2 + 8 \frac{\lambda_h}{\lambda_r} (\lambda_h D_r + 1) + 20 \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_r} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} NC_{r,h} &= \frac{\pi}{4} \rho |\bar{V}_h - \bar{V}_r| \int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-\lambda_r D_r - \lambda_h D_h) N_r N_h E(D_r + D_h)^2 dD_r dD_h \\ &= \frac{\pi}{4} \rho |\bar{V}_h - \bar{V}_r| \bar{E}_{rh} N_r N_h \lambda_h^{-2} \left[(\lambda_h D_r)^2 + 2 (\lambda_h D_r) + 1 + 2 \frac{\lambda_h}{\lambda_r} (\lambda_h D_r + 1) + 2 \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_r} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (75)$$

8. 雹碰并霰

同式(74),(75)相似可以推出:

$$C_{s,h} = \frac{\pi}{4} \rho |\bar{V}_h - \bar{V}_s| \bar{E}_{sh} Q_s N_s \lambda_h^{-2} \left[(\lambda_h D_s)^2 + 2 \lambda_h D_s + 2 + 8 \frac{\lambda_h}{\lambda_s} (\lambda_h D_s + 1) + 20 \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_s} \right)^2 \right] \quad (76)$$

$$NC_{s,h} = \frac{\pi}{4} \rho |\bar{V}_h - \bar{V}_s| \bar{E}_{sh} N_s N_h \lambda_h^{-2} \left[(\lambda_h D_s)^2 + 2 \lambda_h D_s + 1 + 2 \frac{\lambda_h}{\lambda_s} (\lambda_h D_s + 1) + 2 \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_s} \right)^2 \right] \quad (77)$$

雹霰的碰并系数同雹的表面状态有关,对于干雹($kk=0$), $\bar{E}_{sh}=0.1$,对于湿雹($kk=$), $\bar{E}_{sh}=0.8$ 。

9. 雹碰并冰晶

采用平均落速近似,得出:

$$\begin{aligned} C_{i,s} &= \int_0^\infty \int_0^\infty \pi N_s N_i D_i (D_s + D_i)^2 |\bar{V}_s - \bar{V}_i| \exp(-\lambda_i D_i - \lambda_s D_s) \bar{E}_{is} \rho Q_i dD_i dD_s \\ &= \frac{\pi}{12 A_{ms}} Q_i \rho Q_s \lambda_i \left[1 + 4 \frac{\lambda_s}{\lambda_i} + 10 \left(\frac{\lambda_s}{\lambda_i} \right)^2 \right] |\bar{V}_s - \bar{V}_i| \bar{E}_{is} \end{aligned} \quad (78)$$

$$NC_{i,s} = C_{i,s} N_i / Q_i \quad (79)$$

霰对冰晶的碰并系数同温度及霰的表面状态有关,这里简单取 $\bar{E}_{is}=0.1$ 。

10. 雹碰并冰晶

$$\begin{aligned}
 C_{i,k} &= \frac{\pi}{4} \rho \int_{D_{*}}^{\infty} \int_0^{\infty} N_{oi} N_{ok} \exp(-\lambda_i D_i - \lambda_k D_k) E(D_i + D_k)^3 A m_i D_i^3 dD_i dD_k |\bar{V}_k - \bar{V}_i| \\
 &= \frac{\pi}{4} \rho |\bar{V}_k - \bar{V}_i| \bar{E}_{ik} Q_i N_i \lambda_i^{-1} [(\lambda_i D_{*})^2 + 2(\lambda_i D_{*}) + 2 + 8 \frac{\lambda_k}{\lambda_i} (\lambda_i D_{*} + 1) \\
 &\quad + 20 \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_i} \right)^2] \quad (80)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 NC_{i,k} &= \frac{\pi}{4} \rho \int_{D_{*}}^{\infty} \int_0^{\infty} N_{oi} N_{ok} \exp(-\lambda_i D_i - \lambda_k D_k) E(D_i + D_k)^3 D_i dD_i dD_k |\bar{V}_k - \bar{V}_i| \\
 &= \frac{\pi}{4} \rho |\bar{V}_k - \bar{V}_i| \bar{E}_{ik} N_i N_k \lambda_i^{-1} [(\lambda_i D_{*})^2 + 2(\lambda_i D_{*}) + 2 + 4 \frac{\lambda_k}{\lambda_i} (\lambda_i D_{*} + 1) + \\
 &\quad + 6 \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_i} \right)^2] \quad (81)
 \end{aligned}$$

式中雹、冰碰并系数取

$$\begin{cases} \bar{E}_{i,k} = 0.1, & \text{当 } k=0 \text{ (干雹块)} \\ \bar{E}_{i,k} = 0.8, & \text{当 } k=1 \text{ (湿雹块)} \end{cases} \quad (82)$$

11. 雨滴相互碰并

根据 Srivastava 的数值模拟结果^[16]归纳成:

$$\begin{aligned}
 NC_{r,r} &= 4 \times 10^{-8} N_r^2 \lambda_r \rho [-\exp(-0.15 \lambda_r) + S_n \exp(-0.2305 \lambda_r)] \\
 &\quad + 3.66 \times 10^{-8} N_r \lambda_r (34 - 2 \lambda_r) [\exp(0.4(34 - 2 \lambda_r)) - 1] \quad (83)
 \end{aligned}$$

上式右边第一项是雨滴相互碰并和破碎产生次生雨滴项, 平均每次碰并破碎产生的次生滴为 S_n 个, 我们取 $S_n = 3$ 。第二项是雨滴的自发破碎项。

12 冰晶相互碰并^[12]

$$\begin{aligned}
 NC_{ii} &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\pi}{4} (D_1 + D_2)^3 A v_i |D_1^{\frac{1}{2}} - D_2^{\frac{1}{2}}| E_{ii} N_i^2 \exp(-\lambda_i D_1 - \lambda_i D_2) D_1 D_2 \rho \left(\frac{P_i}{P} \right)^{q_i} dD_1 dD_2 \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{24} \frac{A v_i}{A_{mi}} \rho E_{ii} N_i Q_i \lambda_i^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{P_i}{P} \right)^{q_i} K N_{ii} \quad (84)
 \end{aligned}$$

$$K N_{ii} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp(-(D_1 + D_2)) D_1 D_2 (D_1 + D_2)^2 |D_1^{\frac{1}{2}} - D_2^{\frac{1}{2}}| dD_1 dD_2 \approx 7.703$$

冰晶的碰并系数 E_{ii} 研究较少, 其结果相互差异较大, 但总的看来同温度的关系密切, 我们综合实验结果^[13e]取:

$$\bar{E}_{ii} = 0.2 \exp[0.35(T - 273)] \{1 + 4 \exp[-0.4(T - 259)^2]\}$$

六、核化、繁生和自动转化的参数化方程

1. 冰核的活化^[12]

根据云室观测自然空气在不同温度下冰核活化的浓度可用下式表示:

$$N_N = N_{i,N} \exp[B_{i,N}(273 - T)] / \rho \quad (85a)$$

有人取 $N_{p,i} = N_N / \Delta t$, 这样做是不妥当的。因为云室观测的 N_N 值实际上是该温度

下云室能测到的全部冰晶数。云室中的冰晶在某一温度下并不是以定常速率增加的。式中 Δt 又是人为选取的。我们取 $N_{pvi} = \frac{\partial N_N}{\partial T} \frac{dT}{dt}$ 来计算, 在物理上同实验条件更为接近。实验还表明冰核活化速率同水汽过饱和度有关, $N_N \propto (Q_v - Q_{si})^k$, k 按观测结果为 $3-8$ [13d]。本文取 $k=5$ 。式(85 a)是在水面饱和的云室里得出的, 相当于 $Q_v - Q_{si} = Q_{sw} - Q_{si}$ 的条件。而当 $Q_v \leq Q_{si}$ 时冰相是不稳定的, 核化率应为 0。这样可以得出下述冰晶核化方程:

$$N_{pvi} \begin{cases} = 0 & \text{当 } \frac{dT}{dt} \geq 0 \text{ 或 } Q_v \leq Q_{si} \\ = -N_{iN} B_{iN} \exp[B_{iN}(273-T)] / \rho \left(\frac{Q_v - Q_{si}}{Q_{sw} - Q_{si}} \right)^k \frac{pT}{dt} & \text{当 } \frac{dT}{dt} < 0 \text{ 和 } Q_v > Q_{si} \end{cases} \quad (85)$$

式中 $N_{iN}=6.53$, $B_{iN}=0.342$, $k=5$, $\frac{dT}{dt} \approx w \frac{\partial T}{\partial z}$

2. 冰晶繁生 [12]

在各种冰晶繁生过程中, 只有 Hallett-Mossop 过程研究比较详细, 可以定量模拟。这指的是霰粒碰并 $D > 24 \mu\text{m}$ 的大云滴时产生次生冰晶 [17]。在 -5°C 时繁生率最大为 $1/250$, 温度在 $-3-8^\circ\text{C}$ 区间以外繁生率为 0。

$$\begin{aligned} N_{pvi} &= \frac{A(T)}{250} \int_{D_{*s}}^{\infty} \int_{D_{*s}}^{\infty} N_{og} \exp(-\lambda_s D_s) \frac{\pi}{4} D_s^2 A_{rs} D_s^{0.5} \bar{E} \rho N_{oc} D_c^2 \exp(-\lambda_c D_c) dD_s dD_c \\ &= \frac{A(T)}{250} C_{cs} \frac{N_o}{Q_c} \exp(-\beta_2) (1 + \beta_2 + \frac{1}{2} \beta_2^2) \end{aligned} \quad (86)$$

式中

$$A(T) \begin{cases} = 0 & , T > 270 \text{ K 或 } T < 265 \text{ K} \\ = 1 - \frac{1}{4}(T-268)^2 & , 270 > T > 268 \text{ K} \\ = 1 - \frac{1}{9}(T-268)^2 & , 268 > T > 265 \text{ K} \end{cases} \quad (87)$$

$$\beta_2 = \lambda_c D_s^* = (10 \rho_w \pi N_o)^{-1/3} Q_c^{-1} 0.0024 = 1.6 \beta_1 \quad (88)$$

3. 云滴自动转化为雨滴

根据 Berry(1968)对随机重力碰并数值模拟结果 [18] 我们提出下述云雨转化方程 [11]

$$A_{cr} \begin{cases} = 0 & \text{当 } F_c \leq 1 \\ = J_1 \rho^2 Q_c^2 [360 \rho Q_c + 1.20 N_s / D_s]^{-1} & \text{当 } F_c > 1 \end{cases} \quad (89)$$

式中 $J_1=0.25$, N_s , D_s 为云底取初生云滴谱的浓度和相对离散度, 我们取 $N_s/D_s=1200$ 。 F_c 从式(27)算出, 其中

$$\frac{\delta F_c}{\delta t} = \rho^2 Q_c^2 [120 \rho Q_c + 1.6 N_s / D_s]^{-1} \quad (90)$$

4. 霰转化为雹

按气象观测定义雹为直径大于 $D_* = 0.5 \text{ cm}$ 的冰球, 这对于积云中粒子下落分选的模拟很重要。我们认为霰粒增长到 D_{*s} 即转化为冰雹 (D_{*s} 的霰粒质量和 D_* 雹粒的质量相当)。其转化率为:

$$A_{r,1} = A \int_{D_{*r}}^{\infty} \exp(-\lambda_r D) D^3 A_{m,r} N_{r,r} dD$$

$$= A \exp(-\lambda_r D_{*r}) \left[1 + \lambda_r D_{*r} + \frac{1}{2} (\lambda_r D_{*r})^2 + \frac{1}{6} (\lambda_r D_{*r})^3 \right] Q_r \quad (91)$$

$$N A_{r,1} = A \int_{D_{*r}}^{\infty} \exp(-\lambda_r D) N_{r,r} dD A \exp(-\lambda_r D_{*r}) N_r \quad (92)$$

式中 A 为转化速率, 取 $A = 0.01 \text{ s}^{-1}$ 。由于霰和雹的比重不同, 质量同直径为 D_* 的冰雹相当的霰直径 $D_{*r} = \sqrt{\frac{A_{m,h}}{A_{m,r}}} D_* = 0.97 \text{ cm}$ 。式中 $\exp(-\lambda_r D_{*r}) \left[1 + \lambda_r D_{*r} + \frac{1}{2} (\lambda_r D_{*r})^2 + \frac{1}{6} (\lambda_r D_{*r})^3 \right]$ 和 $\exp(-\lambda_r D_{*r})$ 为直径大于 D_{*r} 的霰粒在质量和数浓度上所占比例, 其典型值如下表所列:

λD_*	20	15	10	5
$D \geq D_*$ 的质量比例	3.6×10^{-4}	2.1×10^{-4}	1.0×10^{-4}	2.6×10^{-5}
$D \geq D_*$ 的浓度比例	2.3×10^{-3}	3.1×10^{-7}	4.5×10^{-8}	6.7×10^{-8}
质量比/浓度比	1554	691	228	39

从表可见霰雹转化速率同 λ_r 有密切关系, 也就是说同霰粒平均直径 ($\bar{D}_r = 1.82 \lambda_r^{-1}$) 有密切关系。 $\bar{D}_r$ 的典型值为 0.1—0.4 cm, 相应的 $\lambda_r D_{*r}$ 为 20—5。随着平均直径的增大, 转化率显著提高约 5 个数量级。在转化过程中质量转化比浓度转化大得多, 在平均直径较小时更是如此。因此转化过程使剩下的霰粒平均直径减小, 从而使转化率减小。这就是说, 在没有其它过程作用时, 转化是负反馈过程, 本身趋于减弱。只有当其它过程使霰粒平均直径增大时, 转化率才得以提高。所以上述方程计算的转化率是同霰粒其它增长过程隐含耦合的。速率常数的取值 ($A = 0.01 \text{ s}^{-1}$) 也是从耦合角度出发的。

5. 冰晶转化为霰

积云中过冷水一般比较丰富, 当冰晶大于临界值 (D_{*i}) 后即能迅速碰并过冷水长大, 其速率一般大于凝华增长。所以我们简单假定积云中冰晶直径长到 $D \geq D_{*i}$ 时开始转化为霰。根据理论和实测结果^[13]取 $D_{*i} = 0.03 \text{ cm}$ 。

$$A_{i,r} = 0.01 \int_{D_{*i}}^{\infty} N_{i,i} D_i^3 \exp(-\lambda_i D) A_{m,i} dD$$

$$= 0.01 \exp(-\lambda_i D_{*i}) Q_i \left[1 + \lambda_i D_{*i} + \frac{1}{2} (\lambda_i D_{*i})^2 + \frac{1}{6} (\lambda_i D_{*i})^3 \right] \quad (93)$$

$$N A_{i,r} = 0.01 \int_{D_{*i}}^{\infty} N_{i,i} D_i \exp(-\lambda_i D) dD = 0.01 \exp(-\lambda_i D_{*i}) N_i \quad (94)$$

上述方程同霰雹转化率相似。冰晶谱的 λ_i^{-1} 值一般为 0.0015—0.006 cm, 其相应的 $\lambda_i D_{*i}$ 值为 20—5。所以上表所列数值对冰霰转化过程也是典型的, 物理上的考虑也相似。

七、冻结融化过程的参数化方程

1. 雨冻结成霰

雨滴的冻结有两种理论^[13e], Bigg 的和 Mason 的。相应可以推出:

$$(1) \quad \begin{aligned} NM_{r,s}(\text{Bigg}) &= \int_0^\infty N_{o,r} \exp(-\lambda_r D) \frac{\pi}{6} D^3 B_s [\exp(A_s T_s) - 1] dD \\ &= \frac{1}{\rho_w} Q_r B_s [\exp(A_s T_s) - 1] \end{aligned} \quad (95)$$

式中 B_s, A_s 为参数, ρ_w 为水密度, $T_s = 273 - T$ 。

$$M_{rg}(\text{Bigg}) = -\frac{20 Q_r^2}{\rho_w N_r} B_s [\exp(A_s T_s) - 1] \quad (96)$$

Wisner(1972)^[7]曾用类似(96)的单参数方程, 并取

$B_s = 10^{-4} \text{cm}^{-3} \text{s}^{-1}$, $A_s = 0.66 \text{K}^{-1}$ 。

$$(2) \quad \begin{aligned} NM_{i,s}(\text{Mason}) &= - \int_0^\infty N_{o,r} \exp(-\lambda_r D) \frac{\pi}{6} D^3 B_m A_m \exp(A_m T_s) \frac{dT}{dt} dD \\ &= \frac{Q_r}{\rho_w} B_m A_m \exp(A_m T_s) \frac{dT}{dt} \end{aligned} \quad (97)$$

$$M_{r,s}(\text{Mason}) = \frac{20 Q_r^2}{\rho_w N_r} B_m A_m \exp(A_m T_s) \frac{dT}{dt} \quad (98)$$

Cotton(1972)^[5]曾用类似式(98)的方程, 但形式复杂得多。他取 $B_m = 1.67 \cdot 10^{-5} \text{cm}^{-3}$, $A_m = 0.8 \text{K}^{-1}$, 这是双蒸馏水滴的实验值, 估计比自然雨水值低得多。根据 Vali(1971)^[19]对自然雨和雹的水样实验值, 我们取 $B_m = 8 \cdot 10^{-3} \text{cm}^{-3}$, $A_m = 0.6 \text{K}^{-1}$ 。在上述两种理论中 Bigg 认为冻结率同降温率 $\left(\frac{dT}{dt}\right)$ 无关, Mason 认为冻结率同降温率成正比。实验表明当温度下降到某一温度后维持不变, 冻结率既不是不变也不是立刻降为 0, 而是明显下降, 在 10 min 内下降到原来冻结率的 10%^[13e]。我们引进一个订正, 使冻结率更接近实验结果。即

$$NM_{r,s} \begin{cases} = \frac{Q_r}{\rho_w} B_m A_m \exp[A_m (T_s - 3.2)] \left(-\frac{dT}{dt}\right)^{1-1.54m} & \text{当 } \frac{dT}{dt} \leq 0 \\ = 0 & \text{当 } \frac{dT}{dt} > 0 \end{cases} \quad (99)$$

$$M_{r,s} = 20 \frac{Q_r}{N_r} NM_{r,s} \quad (100)$$

实例计算表明式(99)的值一般介乎式(95)和(97)之间。

2. 冰晶的融化

冰晶外形为圆盘状, $\left(C = \frac{D}{\pi}\right)$, 通风系数为

$1 + 0.23 R_s^{\frac{1}{2}}$, 则

$$\begin{aligned} M_{ir} &= \int_0^\infty N_{o,i} D \exp(-\lambda_i D) \frac{2\pi C}{L_i} [k_i (T - T_0) + l_i k_s \rho (Q_r - Q_{s,i})] \\ &\quad \left(1 + 0.23 \sqrt{\frac{A_{s,i} \rho}{\mu}} D^{\frac{1}{2}}\right) dD + \frac{C_w}{L_i} C_{s,i} (T - T_0) \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{L_r} [k_i(T-T_0) + L_r k_d \rho (Q_r - Q_{s0})] N_i (6 A_{m1} N_i / Q_i)^{-\frac{1}{3}} \\ [1 + 0.23 \Gamma(2\frac{2}{3}) \sqrt{\frac{A_{s1}}{\mu}} \sqrt{\rho} (6 A_{m1} N_i / Q_i)^{-\frac{1}{3}}] + \frac{C_w}{L_r} C_{ei}(T-T_0) \quad (101)$$

融化的个数简单地取

$$NM_{ir} = M_{ir} \cdot N_i / Q_i \quad (102)$$

3. 霰的融化

$$M_{sr} = \int_0^\infty N_{s1} \exp(-\lambda_s D) \frac{2\pi D}{L_r} [k_i(T-T_0) + L_r k_d \rho (Q_r - Q_{s0})] (1 + 0.23 Re^{\frac{1}{2}}) dD \\ + \frac{C_w}{L_r} (C_{s1} + C_{r1})(T-T_0) \\ = \frac{2\pi}{L_r} [k_i(T-T_0) + L_r k_d \rho (Q_r - Q_{s0})] N_s (6 A_{m2} N_s / Q_s)^{-\frac{1}{3}} \left[1 + 0.23 \sqrt{\frac{A_{s2} \rho}{\mu}} \right. \\ \left. \Gamma(2.9) (6 A_{m2} N_s / Q_s)^{-0.3} \right] + \frac{C_w}{L_r} (C_{s1} + C_{r1})(T-T_0) \quad (103)$$

融化造成的个数变化简单地取:

$$NM_{sr} = M_{sr} N_s / Q_s \quad (103)$$

4. 雹的融化

$$M_{hr} = \int_{D_0}^\infty N_{h1} \exp(-\lambda_h D) \frac{2\pi D}{L_r} [k_i(T-T_0) + L_r k_d \rho (Q_r - Q_{s0})] 0.29 \sqrt{\frac{A_{s1} \rho}{\mu}} D^{0.5} dD \\ + \frac{C_w}{L_r} (C_{h1} + C_{r1})(T-T_0) \\ \approx \frac{0.58\pi}{L_r} \sqrt{\frac{A_{r1}}{\mu}} \sqrt{\rho} [k_r(T-T_0) + L_r k_d \rho (Q_r - Q_{s0})] N_h \lambda_h^{-1.5} \\ [(\lambda_h D_0)^{1.5} + 1.8274(0.9\lambda_h D_0 + 1)] + \frac{C_w}{L_r} (C_{h1} + C_{r1})(T-T_0) \quad (105)$$

融化造成的个数变化可以用几种假定来求: (A) 单参数模式中假定 N_0 不变, λ_h 增大, 结果大雹融化快, 小雹融化慢, 这同事实不符; (B) 假定 λ_h 减小, 在某一直径 $D = D_{00}$ 处浓度不变, 这样处理将使 $D > D_{00}$ 的大雹在融化后反而增多, 这也同事实不符; (C) 假定 λ_h 不变, 这相当于大小雹块融化时直径减小率相同, 这不精确, 但在谱分布形式假定不变的前提下还是比较合理的选择, 其形式十分简单, 即

$$NM_{hr} = M_{hr} N_h / Q_h \quad (106)$$

5. 雹的干湿增长临界值 (C_{wh})

$$C_{wh} = \left\{ - \int_{D_0}^\infty N_{h1} \exp(-\lambda_h D) 2\pi D^{1.5} 0.29 \sqrt{\frac{A_{r1}}{\mu}} \sqrt{\rho} [k_r(T-T_0) + L_r k_d \rho (Q_r - Q_{s0})] dD \right. \\ \left. - (C_{h1} C_i(T-T_0)) \right\} / [L_r + C_w(T-T_0)] \\ \approx - \left\{ 0.58\pi \sqrt{\frac{A_{r1}}{\mu}} \cdot \sqrt{\rho} [k_r(T-T_0) + L_r k_d \rho (Q_r - Q_{s0})] N_h \lambda_h^{-1.5} [(\lambda_h D_0)^{1.5} \right. \\ \left. + 1.8274(0.9\lambda_h D_0 + 1)] + C_{h1} C_i(T-T_0) \right\} / [L_r + C_w(T-T_0)] \quad (107)$$

式中 C_w , C_i 为水和冰的比热。

当 $C_{ch} + C_{rh} \leq C_{wh}$ 时, 冰雹上碰并的液态水能全部冻结, 冰雹处于干增长状态。当 $C_{ch} + C_{rh} > C_{wh}$ 时, 冰雹上液水冻结的速率为 C_{wh} , 而余下的未冻液水 ($C_{rh} + C_{ch} - C_{wh}$) 将剥落成为雨滴, 雨滴的数量简单地取

$$\frac{\delta N_r}{\delta t} = (C_{rh} + C_{ch} - C_{wh}) / Q_h. \quad (108)$$

上述方程同动力、热力方程一起构成了闭合方程组。各种微物理变化率(38—108)代入式(28—37)即可得出各种水物质的比质量和比浓度的源汇项。代入式(26)即可求出它们的局地变化。

我们用张家口、明港、南昌的实测探空资料, 在一维时变积云模式中计算了冰雹、暴雨和阵雨过程, 结果同实测比较一致, (详见本文第二部分: (二) 冰雹、暴雨和阵雨的个例研究)。在一维时变模式中以 5—10 S 的时间步长模拟云体生命 1 h, 只须 108-乙机半个多小时, 这样, 就有可能将这套微物理方程用于二维和三维模式中。此时式(26)可用下式代替:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -u_j \frac{\partial M}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} K \frac{\partial M}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho V_m M}{\partial Z} + \frac{\delta M}{\delta t} \quad (109)$$

式中 j 为空间维数(1—3), u_j 为 x_j 方向上的气流速度。

参 考 文 献

- [1] B. J. 梅森, 云物理学, 科学出版社, (a) 296, (b) 238, 1978.
- [2] Battan, L. J., Observation on the formation and spread of precipitation in convective clouds, *J. Meteor.*, 10, 311, 1953.
- [3] Ludlam, F. H., and P. H. Saunders, Shower formation in large cumulus, *Tellus*, 8, 424, 1956.
- [4] 胡志晋, 积云形成暖雨的条件, 气象学报, 37, 3, 72, 1979.
- [5] Cotton, W. R., Numerical simulation of precipitation development in supercooled cumuli, Part II, *Mon. Wea. Rev.*, 100, 764, 1972.
- [6] Orville, H. D., and F. J. Kopp, Numerical simulation of the life history of a hailstorm, *J. Atmo. Sci.*, 34, 1596, 1977.
- [7] Wisner, H. D., Orville, Myers, Numerical simulation of hail bearing cloud, *J. Atmos. Sci.*, 29, 1160—1181, 1972.
- [8] Cotton, W. R., and G. J. Tripoli. The CSU three-dimensional cloud/mesoscale model-1982, Part II, *J. DE Recherches Atmospheriques*, 16, 4, 295, 1982.
- [9] 许焕斌等, 一维时变冰雹云模式研究(一), 反映雨和冰雹谱的双参数演变, 气象学报, 43, 1, 13, 1985.
- [10] 胡志晋、秦瑜、王玉彬, 层状冷云数值模式, 气象学报, 41, 2, 194, 1983.
- [11] 胡志晋、严采繁, 盐粉催化不同生命史的浓积云的数值模拟, 大气科学, 9, 62, 1985.
- [12] 胡志晋、严米繁, 层云状中微物理过程的数值模拟(一)微物理模式, 国家气象局气象科学研究院院刊, 1, 1, 37, 1986.
- [13] Pruppacher, H. R., and J. D. Klett, Microphysics of clouds and precipitation, 274—279, D. Riedel Publish Comp. (a) 343—345; (b) 495—500; (c) 501—502; (d) 245; (e) 274—279; (f) 326; (g) 25, 1978, Dordrecht Holland.
- [14] Joe, P. I., R. List and G. B. Lesins, Ice accretions, *J. Rech. Atmos.*, 14, 347—364, 1980.
- [15] Koenig, L. R, Parameterization of ice growth for numerical caculation of cloud dynamics, *Mon. Wea. Rev.*, 100, 417, 1972.
- [16] Srivastara, R. C., Parameterization of rain drop size distribution, *J. Atmos. Sci.*, 35, 108, 1978.
- [17] Mossop, S. C., Production of secondary ice particles during the growth of graupel by riming, *Quart. J. Roy. Meteo. Soc.* 102, 45, 1976.
- [18] Berry, E. X., Modification of the warm rain process, Proc. First Nat. Conf. on Weat. Modif., Amer. Meteor. Soc., Albany, New York, 1968.

- [19] Vali, G., Freezing nuclei content of hail and rain in Alberta, *J. Appl. Meteor.*, 10, 73, 1971.

NUMERICAL SIMULATION OF MICROPROCESSES IN CUMULONIMBUS CLOUDS (I) MICROPHYSICAL MODEL

Hu Zhijin He Guanfang

(Academy of Meteorological Sciences, State Meteorological Administration)

Abstract

A parameterized model of microphysical processes in cumulonimbus clouds is presented. The change rates of the water contents of vapor and cloud drop-plets, water contents and number concentrations of ice crystals, graupels, hails and raindrops are deduced for 26 microprocesses which include condensation, deposition, evaporation, collection, riming, freezing, melting, nucleation and multiplication of ice crystals and autoconversions of cloud-rain, ice-graupel and graupel-hail.