

简单气候模式的随机分析解*

冯 九 华

(上海气象局)

提 要

本文根据热力学第一定律和随机函数建立了一个随机、非线性气候模式,并求出了模式的解析解。结果表明:模式的温度概率密度是一条有双峰值的曲线,太阳辐射的改变将使曲线上峰的数目发生突变;另外,在利用模式分析海温时还发现:各纬度海温对天气过程的扰动作用将呈现不同的响应。

一、引 言

1976年,Hasselmann^[1]提出了一种新的气候模式。他认为:气象变量可以分为迅速变化的天气变量与缓慢变化的气候变量。在气候变化中,气候变量除了自己本身缓慢演变以外,还要对快速变化的短期天气扰动的随机激发作出总的响应。根据这一原理,天气过程对气候系统的作用将作为一个随机函数出现在气候模式之中,此时,模式不再具有确定性的解,模式方程也将成为随机微分方程,这将大大增加了求解模式的难度,因此,在Hasselmann以及后来的一些工作中,只是建立了几个简单的零维线性随机气候模式。

近年来,随着微分方程理论取得了重大的进展,一元随机非线性常微分方程已获得较为满意的解决,这给我们研究随机、非线性气候模式提供了强有力的工具。在本文中,我们设计了一个考虑非线性和能量南北输送等物理过程的气候模式,并引入代表天气过程的随机函数,通过求解模式的解析解,分析在随机强迫作用下气候模式的统计特性,考察天气过程和气候系统的相互作用,从统计学的角度上来解释气候温度的多平衡态、突变和振荡机制。

二、模 式

根据热力学第一定律,地球气候系统温度的变化方程为

$$\frac{dT}{dt} = \frac{R \downarrow - R \uparrow}{C} + W(t) \quad (1)$$

式中, T 为地球表面平均温度; C 为地表热容量;长波辐射 $R \uparrow$ 用参数化形式^[2]描述:

$$R \uparrow = A + BT \quad (2)$$

式中, $A = -229.8 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$; $B = 1.62 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ 。

地球净入射辐射

* 该文是1986年首届优秀青年气象科技工作者学术交流会议的论文,本刊于1986年6月30日收到,1986年10月25日收到修改稿。

$$R \downarrow = \mu Q(1 - \alpha_p) \tag{3}$$

式中 Q 是太阳常数, μ 是太阳常数的变化参数, 对于现在的情况, $\mu = 1.0$ 。 α_p 为行星反照率, 在本文中, 我们在 Sellers^[3] 公式的基础上, 参照实测的地球行星反照率资料, 选择了一条解析的拟合曲线来逼近 α_p , 这给模式的数学处理和解析分析带来了很大的便利。当然, 这种拟合是以保持气候系统实际存在的基本特性为前提的。 α_p 的公式为

$$\alpha_p = a \cdot \text{th}\{b(d - T)\} + 0.55 \tag{4}$$

a, b 和 d 均是由实测值确定的常数, 这里取

$$a = 0.31; \quad b = 0.04 \text{K}^{-1}; \quad d = 250.0 \text{K}.$$

图 1 是 Sellers 公式和(4)式各自所对应的全球能量收支平衡过程, 比较可知: 本文采用的 α_p 曲线大体上反映了实际气候系统的基本特征。

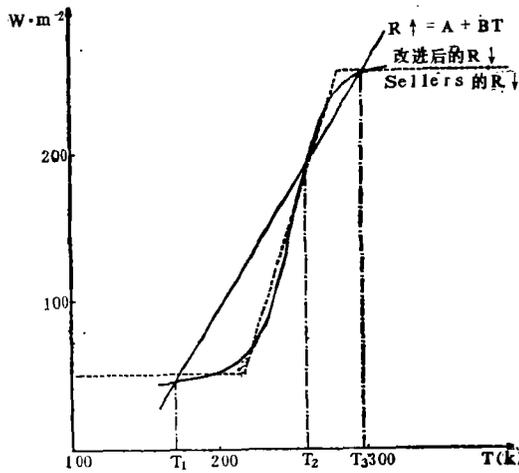


图 1 Sellers 公式和(4)式各自对应的全球能量收支平衡过程

(1)式中最右边一项是随机强迫项, 它代表了天气过程对气候温度的扰动作用, 这里, $W(t)$ 取一个期望为零, 方差是 $2D$ 的距平化维纳过程。

从数学角度讲, (1)式是一个非线性的 $It\hat{o}$ 方程, 由于这种方程已在理论上获得基本解决, 因此, 我们能够通过对气候模式—— $It\hat{o}$ 方程的讨论, 得到(1)式的一些统计特性, 从而进一步地认识气候系统的基本特性以及控制气候的各种物理过程。

三、温度概率密度的多极值和突变

气候资料分析表明: 地球上存在着两种截然不同的稳定持续气候, 即寒冷的冰期和现在地球所处的间冰期。一百万年来, 气候已发生了多次冰期、间冰期的转换, 而转换所需的时间相对于它们持续的时间却要短得多, 地球气候系统的这种多平衡态和突变现象, 一直是人们感兴趣的问题。在下面的讨论中, 将通过求解随机模式(1)式, 使上述现象得以重现。

(1)式两边同除以 C , 同时令

$$\varphi(T, \mu) = (R \downarrow - R \uparrow) / C \tag{5}$$

可得

$$\frac{dT}{dt} = \varphi(T, \mu) + w(t) \quad (6)$$

其对应的 Fokker-Planck 方程为

$$\frac{\partial P(T, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial T} \varphi(T, \mu) P(T, t) + D \frac{\partial^2 P(T, t)}{\partial T^2} \quad (7)$$

式中 $P(T, t)$ 是概率密度函数。若令 $\frac{\partial P(T, t)}{\partial t} = 0$, 则可求出终态解 $P_s(T)$

$$P_s(T) = Z^{-1} \exp \left[-\frac{U(T)}{D} \right] \quad (8)$$

其中,

$$Z = \int_{D'} \left\{ \exp \left[-\frac{U(T)}{D} \right] \right\} dT \quad (9)$$

$$U(T) = - \int \varphi(T, \mu) dT \quad (10)$$

$U(T)$ 称为势函数, D' 是 T 的定义域。再令

$$\frac{dP_s}{dT} = 0$$

讨论 $P_s(T)$ 的极值:

$$\text{即} \quad -Z^{-1} \frac{U'(T)}{D} \exp \left[-\frac{U(T)}{D} \right] = 0 \quad (11)$$

从而有

$$U'(T) = 0 \quad (12)$$

也就是

$$\varphi(T, \mu) = 0 \quad (13)$$

为了研究极值点的性质, 还需考察 $P_s''(T)$:

$$P_s''(T) = -Z^{-1} \frac{U''(T)}{D} \exp \left[-\frac{U(T)}{D} \right] + Z^{-1} \frac{[U'(T)]^2}{D^2} \exp \left[-\frac{U(T)}{D} \right] \quad (14)$$

因为在极值处

$$P_s'(T) = 0 \quad (15)$$

所以

$$P_s''(T) = -Z^{-1} \frac{U''(T)}{D} \exp \left[-\frac{U(T)}{D} \right] \quad (16)$$

显然, 若 $U''(T) < 0$, $P_s(T)$ 取得最小值; 若 $U''(T) > 0$, $P_s(T)$ 取得最大值。所以, 可以通过观察势函数 $U(T)$ 来解释 $P_s(T)$ 的极值问题:

$$U(T) = \frac{1}{C} \left\{ (\mu \cdot Q - A - 0.55 \mu \cdot Q) T - \frac{B}{2} \cdot T^2 + \frac{a \cdot Q \cdot \mu}{b} \ln \text{ch}[b(d - T)] \right\} \quad (17)$$

图 2 是对应 $\mu = 1.0$ 的 $U(T)$ 和 $P_s(T)$ 曲线, 由 (12) 和 (13) 可知:

$U(T)$ 的极值点亦是 $P_s(T)$ 的极值点, 再结合图 1 和 (5) 式不难发现: $P_s(T)$ 的极值点就是全球辐射收支的平衡点 T_1, T_2 和 T_3 , 在 T_1 和 T_3 处, $U''(T) > 0$, $P_s(T)$ 取得峰值; 在

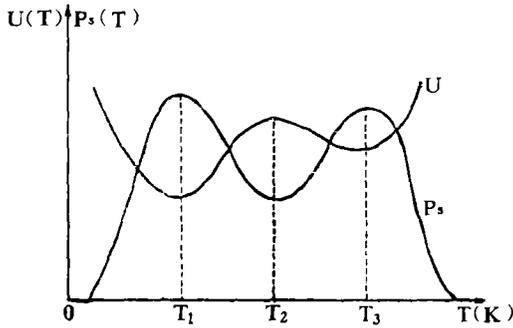


图 2 $U(T)$ 和 $P_s(T)$ 的曲线 ($\mu=1.0$)

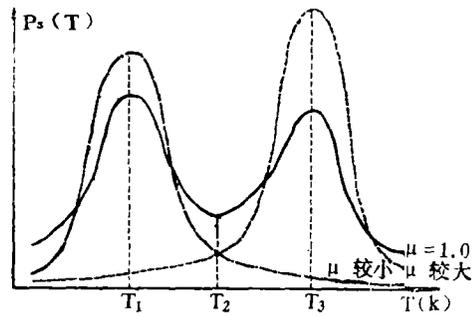


图 3 温度概率密度函数 $P_s(T)$ 随 μ 的变化

T_2 处, $U''(T) < 0$, $P_s(T)$ 处于谷底。根据(8)式, 当 μ 发生变异时, $P_s(T)$ 的形态也将发生变化, $P_s(T)$ 曲线上峰的数目会产生突然的增减, 图(3)就是不同 μ 值对应的 $P_s(T)$ 图形, μ 较小时, $P_s(T)$ 仅在 T_1 处有一极大值, μ 增至一定程度时, $P_s(T)$ 会突变成双峰值函数, 此后, 随着 μ 的增加, $P_s(T)$ 又会突然蜕化为单峰函数, 不过极值点已由 T_1 移至 T_3 ; 如果再将 μ 值逐渐减小, $P_s(T)$ 曲线会倒过来重演上述情形。

根据定义, $P_s(T)$ 是模式温度概率密度演变的最终形式, 从气候意义上说, 是气候系统温度在外界的随机扰动下, 经过调整后呈现出来的统计分布。图(2)表明温度取值的可能性集中在 T_1, T_3 附近, 而 T_1, T_3 是全球能量收支的稳定平衡点, 所以 $P_s(T)$ 的峰正好对应了地球气候两个稳定的平衡态——冰期和间冰期。

如将 $P_s(T)$ 的峰视作平衡温度的表征, 那么 $P_s(T)$ 曲线形态的突变代表了什么呢? 我们不妨通过(8)式想象一下: 当太阳辐射逐步减小到一定数值, 地球温度将会由现在的 T_3 快速下跌至寒冷的 T_1 , 如太阳辐射回升, 温度又会跃回 T_3 , 这一结果和冰期、间冰期之间的转换现象是非常相似的, 因此, $P_s(T)$ 曲线的多极值和突变现象, 是气候系统多平衡态和突变特性在统计意义上的再现。

四、一维海温模式的 Fokker-Planck 解

由前一节讨论可知: 模式(1)式中温度的突变取决于太阳常数的变化, 一般认为: 二者的变化时间尺度也是相对应的。在这里, 我们令 $\mu=1.0$, 考察现在的太阳辐射强度情形下地球温度年际变化的特征, 据 Budyko^[4] 的方法, 考虑到能量的南北输送和纬度差异, 一维随机气候模式为

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\nu(T - T_p) - \mu Q(\theta)[1 - \alpha_p(T)] + (A + BT)}{C(\theta)} = W(t) \tag{18}$$

式中 $\nu=3.8 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$, T_p 是全球平均温度, θ 是纬度。由于 $C(\theta)$ 取的是全球表面海洋的热容量, 因此模式中的 T 表示海表温度。

为简单起见, 将(18)式线性化, 即设 $T = \bar{T}(\theta) + T'$, $\bar{T}(\theta)$ 以实测年平均温度代入, T' 为海温年际变化。得

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \frac{X(\theta)}{C(\theta)} T' = W(t) \tag{19}$$

这里的 $W(t)$ 可认为是周期小于一年的海温扰动。表 1 是录自文献^[2]上实测 $C(\theta)$ 、 $Q(\theta)$ 和 $\bar{T}(\theta)$ 的数值, $X(\theta)$ 和 $\beta(\theta)$ 由 $Q(\theta)$ 、 $\bar{T}(\theta)$ 算出。

表 1 模式(4.2)式所用的参数

纬度 θ	80°N	70°N	60°N	50°N	40°N	30°N	20°N	10°N	0°
$C(\theta)$ ($10^6 \cdot \text{J} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$)	15	23	23	24	29	32	41	53	56
$Q(\theta)$ ($\text{w} \cdot \text{m}^{-2}$)	177.3	195.6	235.0	282.9	327.2	364.3	392.1	409.4	415.5
$T(\theta)$ (K)	257.2	263.5	272.2	278.0	285.8	293.0	298.0	299.2	299.8
$X(\theta)$ ($\text{J} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$)	3.40	3.58	3.99	4.19	4.61	4.88	5.03	5.06	5.06
$\beta(\theta)$ ($10^{-7} \cdot \text{s}^{-1}$)	2.27	1.56	1.73	1.75	1.59	1.53	1.23	0.95	0.90

将(19)式稍作变换, 令 $\beta = \frac{X(\theta)}{C(\theta)}$, 得

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \beta T' = W(t) \quad (20)$$

因为 $C(\theta)$ 、 $X(\theta)$ 均已知, 且 $\beta = \frac{X(\theta)}{C(\theta)} > 0$, 所以上式为变系数的朗之万方程, 为求其 Fokker-Planck 解, 取初始条件

$$P(T', 0) = P_0(T') = \delta(T') \quad (21)$$

由于 $\delta(T')$ 函数在 $T' \rightarrow 0$ 时等于无穷大, $T' \neq 0$ 时为零, 故用 $\delta(T')$ 函数作为初始概率密度相当于取 $T|_{t=0} = \bar{T}$, 或者说 $P(T|_{t=0} = \bar{T}) = 1$ 。又因为 T' 不可能取得 $\pm \infty$, 故边界条件

$$P(\pm \infty, t) = 0 \quad (22)$$

(20)式的 Fokker-Planck 解为

$$P(T', t|0, 0) = \left[2\pi(1 - e^{-2\beta t}) \frac{D}{\beta} \right]^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{\beta T'^2}{2D(1 - e^{-2\beta t})} \right] \quad (23)$$

知道了概率密度, 就能够求出 T' 的统计数字特征, 据上式, T' 的期望

$$E\{T'\} = 0 \quad (24)$$

这说明短期海温扰动只是使海温产生在平衡位置附近的来回振动, 并没有使它的平衡点发生偏离。 T' 的方差

$$E\{T'^2\} = \frac{D}{\beta} [1 - \exp(-2\beta t)] \quad (25)$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时, $P(T', t|0, 0)$ 趋于终态解 $P_s(T')$

$$P_s(T') = \lim_{t \rightarrow \infty} P(T', t|0, 0) = \left(\frac{2\pi D}{\beta} \right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\beta T'^2}{2D} \right) \quad (26)$$

相应的期望

$$E\{T'\}_s = 0 \quad (27)$$

方差

$$E\{T'^2\}_s = \frac{D}{\beta} \quad (28)$$

可以看出： P_s 是 θ 的函数，对相同的初始状态，随着时间的推移将各纬度的海温扰动趋于不同的 $P_s(T')$ ，图(4)是各纬度上的终态概率密度，图中低纬海温概率密度曲线要比中纬的曲线平坦，这说明，对同样的海温强迫，低纬度将产生比中纬度更大的偏差，显然，在方差表达式(28)中也能得出相同的结论。

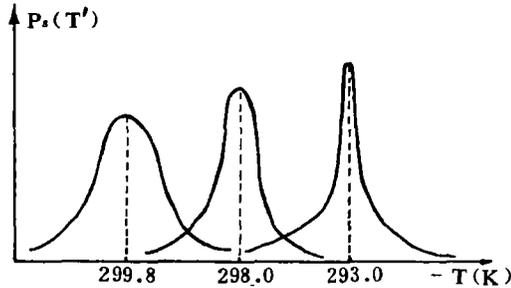


图 4 各纬度的 $P_s(T')$ 曲线
(图中数字是所在纬度的平均温度)

为了了解海温偏差的性质，需要在频域内对其进行分析：(20)式频率变换，并求其功率谱，得

$$T'(\omega) = \frac{F(0)}{\omega^2 + \beta^2} \quad (29)$$

$F(0)$ 是白噪声在 $\omega=0$ 时的功率谱。据上式可得到图(5)所示的功率谱曲线，和实测海温谱相比，模式的结果是令人满意的。

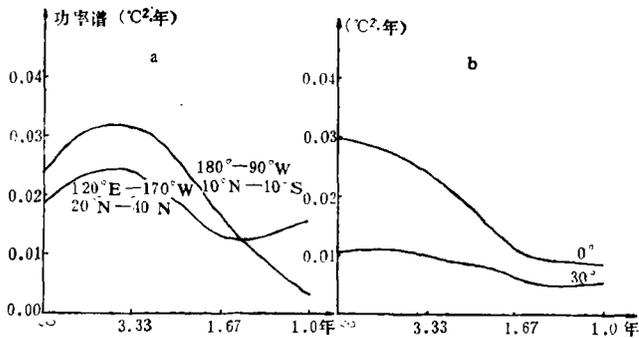


图 5 实测谱(a)和模拟谱(b)对比

五、结 语

借助随机微分方程理论的方法，本文对一个随机非线性气候模式进行了较为全面的分析，结果表明：模式的解呈现了类似冰期、间冰期气候特点的多平衡态和突变现象；其次，在利用模式研究海温变化时发现，模式海温谱中长期振荡的份量要大于相对短期的振荡，而且具有明显的纬度差异，这些结果都与实测资料基本相符。

参 考 文 献

- [1] Hasselmann, K., Stochastic climate model. Part I, Theory, *Tellus*, **28**, 473—485, 1976.
- [2] Thompson, S. L., and S. H. Schneider, A seasonal zonal energy balance climate model with an interactive lower layer, *J. Geophys. Res.* **84**, 2401—2414, 1979.
- [3] Sellers, W. D., A global climate model based on the energy balance of the earth-atmosphere system, *J. Appl. Meteor*, **8**, 392—400, 1969.
- [4] Budyko, M. I., Effect of polar radiation variations on the climate of the earth *Tellus*, **21**, 611—619, 1969.

ON THE STOCHASTIC ANALYSIS FOR A SIMPLE CLIMATE MODEL

Feng Jiuhua

(Shanghai Meteorological Bureau)

Abstract

using first thermodynamic law and stochastic function, a stochastic nonlinear climate model is proposed. Meanwhile, the model analytical solution is solved. The result indicates that global temperature probability density function have two peaks. If solar radiation variates, a sudden change of peak number will be happened. In addition, we find that there are different sea temperature responses because of different latitude.