

半地转近似下的非线性波*

刘式适 刘式达

(北京大学地球物理系)

提 要

本文应用半地转的概念^[1,2]分析和求解了正压和斜压的大气运动。指出:(1)在水平无辐散或准地转条件下求单波解无法表现非线性作用的困难,可以应用半地转的假定来解决。为了避开上述困难,不得已仅保留部分非线性项,但为了准确表征大尺度运动,最好应用半地转假定,保留全部非线性项。(2)准地转的假定可以滤去快速波动,半地转的假定同样也可以滤去快速波动,而且半地转条件下的 Rossby 波具有充分的非线性特征。所以,它为讨论非线性问题提供了一个途径。

一、引 言

应用微扰方法研究流体波动在流体力学中占有重要的地位,它解决了不少流体力学问题。1939 年 Rossby^[3]考察了具有 β 效应的纯二维的无辐散的大气运动,假定大气在经向上是无穷的,利用线性化的涡度方程求解,第一次引入 Rossby 波的概念,并给出了 Rossby 波的色散关系。以后, Haurwitz^[4] (1940) 将这个结果推广到球形大气中。但 Ertel^[5] (1943), Craig^[6] (1945), Neamtan^[7] (1946) 等指出,涡度方程的线性化是不必要的,因为线性化方程的解也适合原有的完全的非线性涡度方程。Thompson^[8] (1953) 还指出,在某些特殊类型的运动中,非线性涡度方程能还原成线性方程。不过,他们都没有提出求解非线性涡度方程的途径。郭晓岚^[9] (Kuo H. L.) (1959) 经过特殊处理,将球坐标的非线性准地转位涡度方程化为地转流函数的线性偏微分方程,在直角坐标中,曾庆存^[1] 也做过类似的工作。但是它有一定的局限性。作者(刘式适、刘式达)^[10,11] (1982) 作了直接积分非线性涡度方程的尝试,用的是将方程中的非线性项作 Taylor 展开的方法。然而,为了避开求解非线性涡度方程与求解线性涡度方程在一定条件下的等价性,作者不得已只保留了部分非线性项,这也是很不完善的。本文,作者采用完全的非线性涡度方程,但应用半地转的假定,获得了寻求真正具有非线性波特性的特解的方法,同时指出,半地转假定既滤去了快速波,又保留了 Rossby 波的非线性特色。

二、正 压 模 式

描写大气运动的浅水模式即正压模式的基本方程组可以写为

* 本文于 1985 年 3 月 15 日收到, 1986 年 2 月 20 日收到修改稿。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f v = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + f u = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + (c_0^2 + \phi) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中 u, v 分别为 x, y 方向的速度分量, t 为时间, f 为 Coriolis 参数

$$c_0^2 = gH, \quad \phi = gh, \quad \phi < c_0^2 \quad (2)$$

H, h 分别是未扰动时流体的深度和偏差。

显然, (1) 式包含两类基本波动: 惯性重力外波和 Rossby 波。

由 (1) 式知, 地转平衡运动为

$$f_0 u^{(0)} = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad f_0 v^{(0)} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (3)$$

它是大气大尺度运动的零级近似。

通常的所谓准地转的正压模式方程组为

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u^{(0)} \frac{\partial}{\partial x} + v^{(0)} \frac{\partial}{\partial y} \right) u^{(0)} - f_0 v - (f - f_0) v^{(0)} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + u^{(0)} \frac{\partial}{\partial x} + v^{(0)} \frac{\partial}{\partial y} \right) v^{(0)} + f_0 u + (f - f_0) u^{(0)} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + u^{(0)} \frac{\partial}{\partial x} + v^{(0)} \frac{\partial}{\partial y} \right) \phi + c_0^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

或者把 (4) 式的头两式化为涡度方程, 则 (4) 式化为

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u^{(0)} \frac{\partial}{\partial x} + v^{(0)} \frac{\partial}{\partial y} \right) \xi^{(0)} + \beta v^{(0)} + f_0 D = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + u^{(0)} \frac{\partial}{\partial x} + v^{(0)} \frac{\partial}{\partial y} \right) \phi + c_0^2 D = 0 \end{cases} \quad (5)$$

其中 β 为 Rossby 参数, 且应用了 β 平面近似: $f = f_0 + \beta y$, (f_0, β 为常数); $\xi \equiv \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$,

$D \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ 分别是涡度和散度, 而 $\xi^{(0)} \equiv \frac{\partial v^{(0)}}{\partial x} - \frac{\partial u^{(0)}}{\partial y}$ 满足

$$f_0 \xi^{(0)} = \nabla^2 \phi \quad \left(\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (6)$$

(5) 式很易化为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u^{(0)} \frac{\partial}{\partial x} + v^{(0)} \frac{\partial}{\partial y} \right) (\nabla^2 \phi - \mu^2 \phi) + \beta \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

这就是正压模式的准地转位涡方程, 其中

$$\mu = \frac{f_0}{c_0} \quad (8)$$

μ^{-1} 是正压大气的 Rossby 变形半径。

(7) 式是关于 ϕ 的正压准地转的基本方程。因为作了准地转近似, 所以, 它滤去了惯性重力外波。

设(7)式的解为

$$\phi(x, y, t) = \Phi(\theta), \quad \theta = kx + ly - \sigma t \quad (9)$$

其中 k, l 分别表示 x, y 方向的波数, σ 为圆频率。

(9)式代入(7)式发现:(7)式中的非线性项变为零,而得

$$-\sigma K_h^2 \Phi''' + (\beta k + \mu^2 \sigma) \Phi' = 0 \quad (10)$$

其中“'”表对 θ 的微商

$$K_h^2 = k^2 + l^2 \quad (11)$$

(10)式表明:正压的线性准地转位涡方程的形如(9)式的特解必然也是相应非线性准地转位涡方程的解。这就是说,在准地转的条件下,设形式为(9)式的特解无法体现非线性的作用,

若令

$$\Phi' \equiv I \quad (12)$$

则(10)式化为

$$I'' + \frac{\beta k + \mu^2 \sigma}{-\sigma K_h^2} I = 0 \quad (13)$$

上式表征波动,要求 $\frac{\beta k + \mu^2 \sigma}{-\sigma K_h^2} = 1$, 则求得

$$\sigma = -\frac{\beta k}{K_h^2 + \mu^2} \quad (14)$$

这就是准地转正压模式求得的 Rossby 波的圆频率。

为了克服准地转模式波动特解不能表现非线性作用的上述缺点,我们应用半地转的假定¹⁾,这个假定的主要特色是区别平流量和被平流量,认为被平流的量具有地转平衡的特征,但平流的量是非地转的。

在半地转的条件下,(5)式改写为

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \xi^{(0)} + \beta v^{(0)} + f_0 D = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \phi + (c_0^2 + \phi) D = 0 \\ f_0 \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \nabla^2 \phi \end{cases} \quad (15)$$

这里,第二式中我们加上了小项 ϕD ,第三式是我们加上的 (u, v) 的涡度等于 $f_0^{-1} \nabla^2 \phi$ 的条件,以保证方程组(15)是封闭的。(15)式就是我们讨论的半地转正压模式的基本方程组。

设方程组(15)的解为

$$u = U(\theta), v = V(\theta), \phi = \Phi(\theta) \quad (16)$$

(16)式代入(15)式得到

1) 在文献中多称为地转动量假定,我们认为称为半地转假定更通俗些。

$$\begin{cases} K_A^2(kU + lV - \sigma)\Phi''' + \beta k\Phi' + f_0^2(kU + lV)' = 0 \\ -\sigma\Phi' + [(kU + lV)\Phi]' + c_0^2(kU + lV)' = 0 \\ f_0(kV - lU)' = -K_A^2\Phi'' \end{cases} \quad (17)$$

(17)式的第二式和第三式分别对 θ 积分一次,取积分常数为零得到

$$\begin{cases} kU + lV = \frac{\sigma\Phi}{c_0^2 + \Phi} \\ kV - lU = -\frac{K_A^2\Phi'}{f_0} \end{cases} \quad (18)$$

(18)式的第一式代入(17)式的第一式得到

$$-\sigma K_A^2 \left(1 - \frac{\Phi}{c_0^2 + \Phi}\right) \Phi''' + \left[\beta k + \mu^2 \sigma \left(1 + \frac{\Phi}{c_0^2}\right)^{-1}\right] \Phi' = 0 \quad (19)$$

这是决定 Φ 的常微方程。由此可求得 Φ , 然后代入(18)式可确定 U 和 V 。

(19)式表明,半地转的正压涡度方程可以表现非线性的作用,这就克服了准地转模式的缺点。

利用(12)式, (19)式可改写为

$$I'' + \frac{\beta k \left(1 + \frac{\Phi}{c_0^2}\right)^2 + \mu^2 \sigma}{-K_A^2 \sigma \left(1 + \frac{\Phi}{c_0^2}\right)} I = 0 \quad (20)$$

(20)式实质上是一个非线性方程的本征值问题。我们曾用 Taylor 展开的方法近似求解过,即写上式为

$$I'' + Q_1(\Phi, I) = 0 \quad (21)$$

其中

$$Q_1(\Phi, I) = \frac{\beta k \left(1 + \frac{\Phi}{c_0^2}\right)^2 + \mu^2 \sigma}{-K_A^2 \sigma \left(1 + \frac{\Phi}{c_0^2}\right)} I \quad (22)$$

将 $Q_1(\Phi, I)$ 在点 $(\Phi, I) = (0, 0)$ 附近作 Taylor 展开有

$$Q_1(\Phi, I) = \frac{\beta k + \mu^2 \sigma}{-\sigma K_A^2} I + \frac{\beta k - \mu^2 \sigma}{-\sigma K_A^2 c_0^2} \Phi I + \dots \quad (23)$$

若(23)式的右端只取第一项,则(21)式化为(13)式,求得线性本征值 σ , 即(14)式。

若(23)式的右端取到第二项为止,则(21)式化为

$$I'' + \frac{\beta k + \mu^2 \sigma}{-\sigma K_A^2} I + \frac{\beta k - \mu^2 \sigma}{-\sigma K_A^2 c_0^2} \Phi I = 0 \quad (24)$$

或

$$\Phi''' + \frac{\beta k - \mu^2 \sigma}{-\sigma K_A^2 c_0^2} \Phi \Phi' + \frac{\beta k + \mu^2 \sigma}{-\sigma K_A^2} \Phi' = 0 \quad (25)$$

这是 KdV 方程所对应的常微分方程。

上式对 θ 积分一次(取积分常数为零)有

$$\Phi'' = \frac{\beta k - \mu^2 \sigma}{2\sigma K_A^2 c_0^2} \Phi^2 + \frac{\beta k + \mu^2 \sigma}{\sigma K_A^2} \Phi \quad (26)$$

上式两边乘以 $2\Phi'$, 并对 θ 积分求得

$$\Phi'^2 = \frac{\beta k - \mu^2 \sigma}{3 \sigma K_h^2 c_0^2} P_1(\Phi) \quad (27)$$

其中

$$P_1(\Phi) \equiv \Phi^3 + \frac{3(\beta k + \mu^2 \sigma)}{\beta k - \mu^2 \sigma} c_0^2 \Phi^2 + A \quad (28)$$

是 Φ 的三次多项式, A 为常数。

设 $P_1(\Phi) = 0$ 的三个根 Φ_1, Φ_2, Φ_3 满足

$$\Phi_1 > 0, \quad \Phi_2 < 0, \quad \Phi_3 < \Phi_2 < 0 \quad (29)$$

则(27)式的解为

$$\Phi(\theta) = \Phi_2 + (\Phi_1 - \Phi_2) \operatorname{cn}^2 \sqrt{\frac{\beta k - \mu^2 \sigma}{12 \sigma K_h^2 c_0^2} (\Phi_3 - \Phi_1)} \theta \quad (30)$$

这是 Rossby 椭圆余弦波, 它在 x 方向上的波长为

$$\lambda = \frac{2}{h} \sqrt{\frac{12 \sigma K_h^2 c_0^2}{(\beta k - \mu^2 \sigma)(\Phi_3 - \Phi_1)}} K(m) \quad (31)$$

$K(m)$ 是第一种完全椭圆积分, 模数 m 满足

$$m^2 = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\Phi_1 - \Phi_3} \quad (32)$$

根据(28)式有

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = -\frac{3(\beta k + \mu^2 \sigma)}{\beta k - \mu^2 \sigma} c_0^2 \quad (33)$$

取 $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, 则由(31)和(33)两式求得半地转条件下 Rossby 波的圆频率为

$$\sigma = -\frac{\beta k \left(\frac{\pi}{2 K(m)} \right)^2 \left(\frac{\Phi_3 - \Phi_1}{\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3} \right)}{K_h^2 + \mu^2 \left(\frac{\pi}{2 K(m)} \right)^2 \left(\frac{\Phi_3 - \Phi_1}{\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3} \right)} \quad (34)$$

它既包含波数, 又包含与波振幅有关的参数。

由(30)式看到 $\Phi_1 - \Phi_2$ 为波的振幅, 若令 $\Phi_1 - \Phi_2 \rightarrow 0$, 考虑到 $\Phi_1 > 0, \Phi_2 < 0$, 必有 $\Phi_1 \rightarrow \Phi_2 \rightarrow 0$, 相应, $m \rightarrow 0, K(m) \rightarrow \frac{\pi}{2}$, 则频散关系(34)式退化为

$$\sigma = -\frac{\beta k}{K_h^2 + \mu^2} \quad (35)$$

这就是准地转的 Rossby 波的圆频率。

由上分析我们得到结论: 半地转的假定与准地转假定一样, 也可以滤去正压模式中的惯性重力外波, 但半地转假定可以较好地反映非线性的作用。

三、斜 压 模 式

描写大气运动斜压模式的基本方程组可以写为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + f u = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0 w}{\partial z} = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial \phi}{\partial z} + N^2 w = 0 \end{cases} \quad (36)$$

其中 w 为垂直速度, $\rho_0 = \rho_0(z)$ 为静止空气的密度, N 为 Brunt-Väisälä 频率, 它表征层结的作用。若相对静止空气的气压偏差为 p' , 则

$$\phi = p' / \rho_0 \quad (37)$$

显然, (36) 式包含两类基本波动: 惯性重力内波和 Rossby 波。

应用 (37) 式, 地转平衡关系在形式上仍旧是 (3) 式。

准地转的斜压模式通常写为

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u^{(0)} \frac{\partial}{\partial x} + v^{(0)} \frac{\partial}{\partial y} \right) u^{(0)} - f_0 v - (f - f_0) v^{(0)} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + u^{(0)} \frac{\partial}{\partial x} + v^{(0)} \frac{\partial}{\partial y} \right) v^{(0)} + f_0 u + (f - f_0) u^{(0)} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0 w}{\partial z} = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + u^{(0)} \frac{\partial}{\partial x} + v^{(0)} \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial \phi}{\partial z} + N^2 w = 0 \end{cases} \quad (38)$$

或者, 把 (38) 式的头两式化为涡度方程, 并利用第三式, 则 (38) 式改写为

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u^{(0)} \frac{\partial}{\partial x} + v^{(0)} \frac{\partial}{\partial y} \right) \zeta^{(0)} + \beta v^{(0)} - \frac{f_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0 w}{\partial z} = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + u^{(0)} \frac{\partial}{\partial x} + v^{(0)} \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial \phi}{\partial z} + N^2 w = 0 \end{cases} \quad (39)$$

(39) 式的两式消去 w , 则化为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u^{(0)} \frac{\partial}{\partial x} + v^{(0)} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left[\nabla^2 \phi + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N^2} \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right] + \beta \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (40)$$

这就是斜压模式的准地转位涡度方程。显然, 它只包含 Rossby 波

设 (40) 式的解为

$$\phi(x, y, z, t) = \Phi(\theta), \theta = kx + ly + nz - \omega t \quad (41)$$

其中 n 为 z 方向上的波数。

(41) 式代入 (40) 式发现: (40) 式中的非线性项为零, 若不考虑 ρ_0 , N^2 随 z 的变化, 则得

$$-\sigma(K_h^2 + n_l^2) \Phi''' + \beta k \Phi' = 0 \quad (42)$$

其中

$$n_1^2 = \left(\frac{f_0}{N}\right)^2 n^2 \quad (43)$$

(42)式表明: 斜压的线性准地转位涡方程的形如(41)式的特解必然也是相应非线性准地转位涡方程的解。这就是说, 应用准地转模式, 在斜压情况下, 对形如(41)式的特解也无法体现非线性的作用。

利用(12)式, (42)式改写为

$$I'' + \frac{\beta k}{-\sigma(K_h^2 + n_1^2)} I = 0 \quad (44)$$

上式表征波动, 要求 $\frac{\beta k}{-\sigma(K_h^2 + n_1^2)} = 1$, 则求得

$$\sigma = -\frac{\beta k}{K_h^2 + n_1^2} \quad (45)$$

这就是准地转的斜压模式求得的 Rossby 波的圆频率。

与正压情况相似, 为了反映非线性的作用, 我们应用半地转的假定, 此时(39)式改写为

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}\right) \xi^{(0)} + \beta v^{(0)} - \frac{f_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0 w}{\partial z} = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}\right) \frac{\partial \phi}{\partial z} + N^2 w = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0 w}{\partial z} = 0 \\ f_0 \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \nabla^2 \phi \end{cases} \quad (46)$$

这是半地转的斜压模式的基本方程组, 它包含四个方程和四个未知数, 因而是封闭的。

设方程组(46)的解为

$$u = U(\theta), v = V(\theta), w = W(\theta), \phi = \Phi(\theta) \quad (47)$$

(47)式代入到(46)式, 不考虑 ρ_0 的变化得到

$$\begin{cases} K_h^2(kU + lV - \sigma)\Phi''' + \rho k\Phi' - f_0^2 n W' = 0 \\ n(kU + lV - \sigma)\Phi'' + N^2 W = 0 \\ (kU + lV + nW)' = 0 \\ f_0(kV - lU)' = -K_h^2 \Phi'' \end{cases} \quad (48)$$

(48)式的后两式对 θ 积分一次, 取积分常数为零, 得到

$$\begin{cases} kU + lV + nW = 0 \\ f_0(kV - lU) = -K_h^2 \Phi' \end{cases} \quad (49)$$

将(49)式的第一式代入到(48)式的头两式消去 U 和 V 得到

$$\begin{cases} -K_h^2(\sigma + nW)\Phi''' + \beta k\Phi' - f_0^2 n W' = 0 \\ -n(\sigma + nW)\Phi'' + N^2 W = 0 \end{cases} \quad (50)$$

由此可知, 半地转的假定可以反映非线性的作用。

由(50)式可以解得 Φ 和 W , 然后代入到(49)式可求得 U 和 V 。

由(50)式的第二式有

$$W = \frac{\sigma n \Phi''}{N^2 - n^2 \Phi''} \quad (51)$$

将(51)式代入到(50)式的第一式得

$$-\sigma K_1^2 \left(1 + \frac{n^2 \Phi''}{N^2 - n^2 \Phi''} \right) \Phi'' + \beta k \Phi' - \frac{\sigma n^2 f_0^2 N^2 \Phi'''}{(N^2 - n^2 \Phi'')^2} = 0, \quad (52)$$

这是 Φ 的常微分方程。或者, 令

$$\Phi' = I, \quad I' = J \quad (53)$$

则(52)式化为

$$I'' + Q_2(I, J) = 0 \quad (54)$$

其中

$$Q_2(I, J) = \frac{\beta k \left(1 - \frac{n^2}{N^2} J \right)^2}{-\sigma \left[K_1^2 \left(1 - \frac{n^2}{N^2} J \right) + n_1^2 \right]} I \quad (55)$$

将 $Q_2(I, J)$ 在点 $(I, J) = (0, 0)$ 附近作 Taylor 展开有

$$Q_2(I, J) = -\frac{\beta k}{\sigma(K_1^2 + n_1^2)} I + \frac{\beta k \frac{n^2}{N^2} (K_1^2 + 2n_1^2)}{\sigma(K_1^2 + n_1^2)^2} IJ + \dots \quad (56)$$

若(56)式的右端只取第一项, 则(54)式化为(44)式, 则求得线性本征值 σ , 即(45)式。

若(56)式的右端取到第二项为止, 则(54)式化为

$$I'' + \frac{\beta k}{-\sigma(K_1^2 + n_1^2)} I + \frac{\beta k \frac{n^2}{N^2} (K_1^2 + 2n_1^2)}{\sigma(K_1^2 + n_1^2)^2} IJ = 0 \quad (57)$$

或

$$\Phi''' + \frac{\beta k \frac{n^2}{N^2} (K_1^2 + 2n_1^2)}{\sigma(K_1^2 + n_1^2)^2} \Phi' \Phi'' + \frac{\beta k}{-\sigma(K_1^2 + n_1^2)} \Phi' = 0 \quad (58)$$

为了较方便地求解上式, 我们利用(42)式将(58)式左端第二项中的 Φ'' 用 $\frac{\beta k}{\sigma(K_1^2 + n_1^2)} \Phi$ 去代替, 这样, (58)式化为

$$\Phi''' + \frac{\beta^2 k^2 \frac{n^2}{N^2} (K_1^2 + 2n_1^2)}{\sigma^2 (K_1^2 + n_1^2)^3} \Phi \Phi' + \frac{\beta k}{-\sigma(K_1^2 + n_1^2)} \Phi' = 0 \quad (59)$$

这是 KdV 方程所对应的常微分方程。

上式对 θ 积分一次(取积分常数为零)有

$$\Phi'' = -\frac{\beta^2 k^2 \frac{n^2}{N^2} (K_h^2 + 2n_1^2)}{2\sigma^2 (K_h^2 + n_1^2)} \Phi^2 + \frac{\beta k}{\sigma (K_h^2 + n_1^2)} \Phi \quad (60)$$

上式两边乘以 $2\Phi'$, 并对 θ 积分求得

$$\Phi'^2 = -\frac{\beta^2 k^2 \frac{n^2}{N^2} (K_h^2 + 2n_1^2)}{3\sigma^2 (K_h^2 + n_1^2)^3} P_2(\Phi) \quad (61)$$

其中

$$P_2(\Phi) \equiv \Phi^3 - \frac{3\sigma (K_h^2 + n_1^2)^2}{\beta k \frac{n^2}{N^2} (K_h^2 + 2n_1^2)} \Phi^2 + B \quad (62)$$

是 Φ 的三次多项式, B 为常数。

(60) 式在形式上同 (26) 式, (61) 式在形式上同 (27) 式。

所以, 不难求得 (61) 式的解为

$$\Phi(\theta) = \Phi_2 + (\Phi_1 - \Phi_2) c n^2 \sqrt{\frac{\beta^2 k^2 \frac{n^2}{N^2} (K_h^2 + 2n_1^2)}{12\sigma^2 (K_h^2 + n_1^2)^3} (\Phi_1 - \Phi_3) \theta} \quad (63)$$

相应, Rossby 波的圆频率为

$$\sigma = -\frac{\beta k \left(\frac{\pi}{2K(m)} \right)^2 \left(\frac{\Phi_3 - \Phi_1}{\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3} \right)}{K_h^2 + n_1^2} \quad (64)$$

而且, 在线性条件下, 上式可化为

$$\sigma = -\frac{\beta k}{K_h^2 + n_1^2} \quad (65)$$

这就是准地转的斜压 Rossby 波的圆频率。

所以, 与正压模式一样, 应用半地转的假定, 不但可以滤去斜压模式中的惯性重力内波, 而且可以较好地反映非线性的作用。

四、结 语

准地转的位涡度方程, 对单波解和行波解, 无论是正压情况还是斜压情况, 都不能反映非线性的特征, 但应用半地转的假定, 可以较好地体现非线性的特征, 它不但可以滤去快速波动, 而且可以求得非线性方程的特解。

参 考 文 献

- [1] 曾庆存, 数值天气预报的数学物理基础, 第九章, 科学出版社, 1979.
- [2] Hoskins, B. J., The geostrophic momentum approximation and semi-geostrophic equations, *J. Atmos. Sci.*, 32, 233—242, 1975.
- [3] Rossby, C. G., Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacement of the semipermanent centers of action, *J. Marine Res.*, 2, 38—55, 1939.

- [4] Haurwitz, B., The motion of atmospheric disturbances on the spherical earth, *J. Marine Res.*, **3**, 254—267, 1940.
- [5] Ertel, H., Über stationäre oscillatorische Luftströmungen auf der rotierenden Erde, *Z. Meteorol.*, **60**, 332—334, 1943.
- [6] Craig, R. A., A solution of the nonlinear vorticity equation for atmospheric motion, *J. Meteorol.*, **2**, 175—178, 1945.
- [7] Neamtan, S. M., The motion of harmonic wave in the atmosphere, *J. Meteorol.*, **3**, 53—56, 1946.
- [8] Thompson, P. D., On the theory of large-scale disturbances in a two-dimensional baroclinic equivalent of the atmosphere, *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **79**, 51—69, 1953.
- [9] Kuo, H. L., Finite-amplitude three-dimensional harmonic waves on the spherical earth, *J. Meteorol.*, **16**, 524—534, 1959.
- [10] 刘式达、刘式适, 大气非线性波动方程的解, *气象学报*, **40**, 3, 279—288, 1982.
- [11] 刘式达、刘式适, 大气中的非线性椭圆余弦波和孤立波, *中国科学 (B 辑)*, 1982, 4, 372—384.

NONLINEAR WAVES WITH SEMI-GEOSTROPHIC FLOW

Liu Shikuo Liu Shida

(Department of Geophysics, Peking University)

Abstract

In this paper, we apply the semi-geostrophic approximation (or the geostrophic momentum approximation) to analyse and solve the barotropic and baroclinic atmospheric motion. It is shown that the horizontal nondivergent or quasi-geostrophic approximation can not reflect the nonlinear effect. The semi-geostrophic approximation can not only filter out the inertial gravity waves as the quasi-geostrophic approximation, but also find the solution of the nonlinear equations. The Rossby waves obtained by the semi-geostrophic approximation possess the nonlinear characterization. The semi-geostrophic approximation provides the ways to discuss the nonlinear problem.