第45卷 第2期 气 象 学 报 Vol. 45, No. 2
1987 年 5 月 ACTA METEOROLOGICA SINICA May, 1987

大 气 比 湿 的 分 布 律*

张 学 文

(新疆气象科研所)

大气中的比湿在不同地区不同高度都不相同，而且比湿在大气中的分布还不断地随着天气系统的演变而有变化。天气学中表示比湿分布的惯用方法是在天气图上标注出每个测站的比湿值。有时还在图上绘出等比湿线用以显示比湿的分布。

比湿在大气中的分布能够用一个方程式表示吗？这个方程是什么形态？它是否随天气系统的变化在变化？我们能够从理论上推测出这个方程式来吗？

在本文中我们并不追究大气中任一位置的比湿值是多少，但是要研究比湿在大气中的相对分布。我们从实测资料中归纳出大气中比湿的相对分布的经验方程；我们还利用熵增加原理导出大气比湿分布的理论方程。最后再指出这个理论结果与实际中归纳的经验方程是一致的。这就从理论与实际两方面给出了一个互相佐证的大气比湿分布律。

1. 相 对 分 布

我们研究的是比湿在大气中的相对分布。其含义是不同比湿值的大气占有大气总质量的权重各是多少。比湿值不同，占有大气的权重也不同。但每一比湿值仅对应唯一的一个权重值。这样比湿值 q 与权重值 C 就构成了一个函数关系。

这个函数的含义也就是不同比湿各占多大的百分比。实际上从天气学实践中早已知道大气中仅近地面的层次中比湿值稍大。在 500 hPa 以上的高度上大气的比湿值都很小。这就告诉我们：高层大气比湿值很小。仅有很少量的大气有较大的比湿值。换言之，比湿小的占的权重大，比湿大的占的权重小。

对相对分布函数含义的进一步阐叙，请读者参阅"相对分布函数与气象熵[1]。

2. 经 验 方 程

我们从[2]中转引 PEIXOTO 和 CRISI[3]所提供的北半球冬夏季大气比湿的经圈平均图作了计算(依趋势补了 500 hPa 高度以上部分)，从图上选取 99 个代表点，每个点恰好代表同样多的大气质量。这样，统计不同比湿值 q_i 各有多少个点也就计算出该比湿在大气中占的权重 C_i。分析各 q 值与各 C 值的关系可以看出 q 加大时 C 迅速减少。最后我们以比湿 q 与权重值的自然对数 $\ln C$ 为两个坐标绘成图1。对冬、夏两季分别求线性回归方程和比湿与 $\ln C$ 的相关系数，得出夏季为 -0.935、冬季为 -0.914。这么高的相关系数说明求得的线性方程是可信的。

比湿 q 与权重 C 的自然对数有直线关系，而且直线的斜率为负值，从数学上我们自然得出比湿 q 与权重 C 存在负指数关系。

这一关系是从平均图上求得的。对于每一瞬时是否也有此关系存在？现在我们想从理论上进行分析。

* 本文于 1985 年 7 月 18 日收到，1986年 2 月 25 日收到修改稿。

3. 假 设

下面的理论分析中引用了三个假设即：

1) 全球大气质量 M 为常数，

2) 全球大气中含有的水汽量 Q 为常数，

3) 大气运动使水汽 Q 在 M 中实现最任意的分布。

这里前两个假设人们常用。第三个实际上表示水汽分布所对应的熵呈现最大值。

4. 熵增加原理

源于热力学中的熵概念经过波尔兹曼和信息论创始人 C. E. 申农的引伸已经与概率分布完全联系了起来。对于一个连续型的随机变量 q，如其概率密度为 $f(q)$，则此变量的熵 H 为[4]

$$H(q)=-\int_{-\infty}^{\infty} f(q)\ln[f(q)]dq \qquad (1)$$

写成 $H(q)$ 仅表示 H 是关于 q 的熵，而它并不是 q 的函数。从(1)式知 H 是 $f(q)$ 的泛函。f 的形状不同 H 就有不同值。

把全球大气视为统计母体，每次抽一个子样则其比湿 q 就是一个连续型的随机变量。随机变量自然就有概率分布。而依(1)式有概率分布也就有对应的熵值。

热力学第二定律，有时也称为熵增加原理。它指出在一孤立系统中熵会自动加大，最后平衡在熵达到极大值的状态。

对于大气中的水汽根据前两个假设可视为孤立于大气中(这自然是一级近似)，故而它的熵应自动地达到极大值。据此我们推断：

1) 比湿 q 在大气中的分布恰好处于使其熵达到极大值的那一种分布状态。

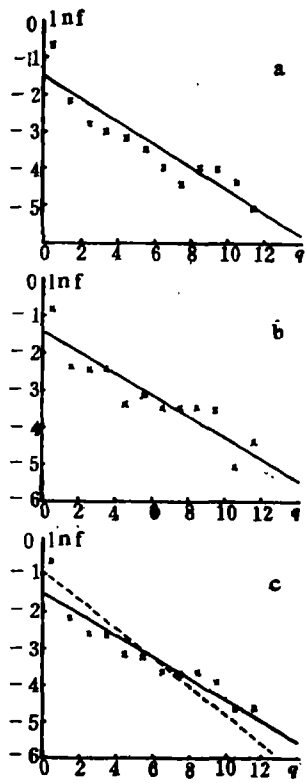

图 1 比湿 q 与其占大气的权重 C 的自然对数的理论分布（虚线）与实况（×）的对比 (a 为冬半年，b 为夏半年，c 为全年，实线为回归方程，比湿单位 g/kg。)

2) 由于熵已达极大(有水汽的排出——降水、补充——蒸发、或气候变迁时除外)，因而全球比湿分布函数是不随时间变化的。

据此我们可以反过来把问题变成：如果比湿熵达到极大值，那么比湿的概率密度应当是什么分布？

5. 负指数分布

熵是分布的泛函。求泛函的极值是变分法的任务。依文献[5]，一个连续的随机变量的一阶矩为有限值而且变量仅能大于零时，其熵达到极大时要求变量的概率密度为一个负指数函数。比湿值在大气中总是大于零(只要仪器足够灵敏，都不会测出比湿值是数学含义上的零)并且一阶矩显然为有限值。故对比湿的概率密度 $f(q)$ 应当呈负指数分布，其表达式为：

$$f(q)=\frac{1}{\bar{q}}\exp(-q/\bar{q}) \quad , \quad q>0 \qquad (2)$$

$\bar{q}$ 是大气比湿 q 的平均值(一阶矩)。依照前面的假设它应当等于 Q/M。(2) 式就是满足前叙三个假设条件下使熵达到极大值时必须遵守的关于 q 的概率密度分布函数。它的特点是低比湿值者出现概率大，比湿大者出现的概率迅速减少。

这样我们就从熵增加原理的角度配合上可以接受的假设十分简练地导出了大气比湿的概率分布。

6. 殊途同归

在最初得出经验方程时，我们讨论的是比湿在大气质量中的相对分布。在理论推导中我们讨论的是比湿的概率分布。这两个分布有什么关系？在文献[1]中作者已经指出这两个分布完全是等价的。即比湿在统计抽样中得出的概率分布与比湿在大气质量（全球）中的分布实际上是一个问题的两种提法。在本质上它们对应着同一分布函数。对此我们在这里不再论证。

为具体对比上述成果，我们从文献[6]中取大气质量 $M=5.3\times10^{21}$g，从文献[7]取大气水汽量 $Q=1.3\times10^{15}$t。依前叙 $\bar{q}=Q/M$，故 $\bar{q}=2.5$g/kg。将此值代入(2)式可得一具体方程，我们在图 1 中把它以虚线绘出。从图中可见它与实测资料、经验方程都吻合得较好。这就表明我们的理论结果与实际是相符的。

应当补充的是理论方程中用的常数是来自独立于统计资料之外的信息源。这更说明理论与实际的一致性决不是偶然巧合。它表明熵的原理在约束着大气中的比湿分布。

这里给出的理论与实际的一致应当说仅是初步的。因为实际值是取自平均图而不是任一瞬间比湿分布。我们从理论上预言在一级近似下比湿遵守(2)式的分布对任一时刻都是成立的。当然对此有待进一步用资料予以证实或否定。另一方面我们也认为把熵的原理引用于大气科学中还有着广阔前景。

参考文献

[1] 张学文，相对分布函数和气象熵，气象学报，44卷，2期，214—219，1986。
[2] E. N. 洛伦茨，大气环流的性质和理论，37，科学出版社，1976。
[3] PEIXOLO, J. P., and A. R. CRISI, Hemispheric humidity conditions during the IGY, SCI Report No.6, contract AF 19(628)-2408, Dept. of Meteorology, Mass. Inst. of technology, 1965.
[4] 张学文，气象预告问题的信息分析，8-9，科学出版社，1981。
[5] Reza, F. M., An introduction to information, Megraw-Hill book company, Inc, 280-281, 1961.
[6] Тверской, П. Н., 气象学教程，第一册，44，商务印书馆，1953。
[7] 雷雨顺，降水及其天气学研究，新疆气象编辑部，3，1982。

THE DISTRIBUTION RULE OF THE SPECIFIC HUMIDITY IN GLOBAL ATMOSPHERE

Zhang Xuewen

(Meteorological Research Institute of Xinjiang)

Abstract

If we make a random experiment in the global atmosphere at any given time, specific humidity is taken as a random varible. We used principle of increase of entropy to prove that the probability density of the humidity in global atmosphere is a negative exponential distribution equation. We also checked that the observational data are in agreement with this theortical result.