

非线性螺旋行星波的非频散解*

张 铭 黄思训

(空军气象学院)

提 要

本文将柱坐标中正压无辐散大气的运动方程组作适当简化后, 求出了螺旋行星波的非频散椭圆余弦波解, 并得到了波速公式及波参数间的一些诊断关系。这些关系绝大多数与观测事实相一致, 故在大气中这种非频散的椭圆余弦波可能是真实存在的。或者可作为真实的非线性波动的第一近似。

一、引 言

在日常 500 hPa 天气图上常可见槽脊线呈螺旋线的波动, 即螺旋行星波。有时其波形基本保持不变而有规律地传播, 此时可近似将其看作为非线性螺旋行星波的非频散解。这种非频散解即为非线性特征波动^[1]。对它的研究在理论上和预报实践上均有实际意义。本文在对正压无辐散大气运动方程组的柱坐标形式做了适当简化后求出了该非线性特征波动, 得到了波速公式并对求得的解进行了讨论。

二、数 学 模 式

取原点在北极的柱坐标 (r, θ) , r 指向低纬为正, θ 逆时针为正, 则正压无辐散大气中的涡度方程和连续方程可写为:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + u \frac{df}{dr} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial ru}{r \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \quad (2)$$

$$\xi = \frac{\partial rv}{r \partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (3)$$

其中 u 为 r 方向风速分量, v 为 θ 方向风速分量, $f = 2\omega$, ω 为柱坐标自旋角速度。为表征实际大气中的球面效应, ω 可随 r 改变, 即可取 $\frac{df}{dr} \neq 0$ 。

为简化上述方程, 做坐标变换, 引进变量 ξ , $\xi = \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$, r_0 为常数。且令 $\Omega_r = \frac{u}{r}$, $\Omega_\theta = \frac{v}{r} - \bar{\Omega}(\xi) - \Omega_r^*$, $\xi^* = \xi \left[\frac{d\bar{\Omega}}{d\xi} + 2\bar{\Omega}(\xi) \right]$, 在此 $\bar{\Omega}(\xi)$ 可看作基本气流的角速度, Ω_r^* 为在 θ 方向的扰动角速度, ξ^* 为扣除了基本气流涡度后的扰动涡度, 则以上方程组可

* 本文于 1984 年 5 月 5 日收到, 1985 年 6 月 5 日收到修改稿。

写为:

$$\frac{\partial \xi^*}{\partial t} + \Omega_r \frac{\partial \xi^*}{\partial \xi} + (\bar{\Omega} + \Omega_0^*) \frac{\partial \xi^*}{\partial \theta} + \Omega_r \left(2 \frac{d\bar{\Omega}}{d\xi} + \frac{d^2 \bar{\Omega}}{d\xi^2} + \frac{df}{d\xi} \right) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Omega_r}{\partial \xi} + 2\Omega_r + \frac{\partial \Omega_0^*}{\partial \theta} = 0 \quad (5)$$

$$\xi^* = \frac{\partial \Omega_0^*}{\partial \xi} + 2\Omega_0^* - \frac{\partial \Omega_r}{\partial \theta} \quad (6)$$

(4)、(5)、(6)构成闭合方程组,由于数学处理困难现将其简化。首先在(5)、(6)中略去 Ω_r , Ω_0^* 项,即部分忽略柱坐标曲率的影响。此外还假定 $|\Omega_0^*| \ll |\bar{\Omega}|$ 和 $\left| \Omega_r \frac{\partial \xi^*}{\partial \xi} \right| \gg \left| \Omega_0^* \frac{\partial \xi^*}{\partial \theta} \right|$, 即 θ 方向扰动角速度远小于基本气流的角速度和扰动涡度平流的南北输送远大于东西输送。对于一般西风带中的螺旋行星波这样假定与实际情形尚相差不远,但当波动振幅非常大时则可能是不合适的,本文不讨论这种情况。此外,因基本量 $\bar{\Omega}(\xi)$ 的切变已在(4)中最后一项括号中的前二项体现出来了, $\bar{\Omega}$, f 等又为外参数,故对 $\bar{\Omega}$, $\frac{d\bar{\Omega}}{d\xi}$, $\frac{d^2 \bar{\Omega}}{d\xi^2}$, $\frac{df}{d\xi}$ 等均取准常数近似,得出简化方程组:

$$\frac{\partial \xi^*}{\partial t} + \Omega_r \frac{\partial \xi^*}{\partial \xi} + \bar{\Omega} \frac{\partial \xi^*}{\partial \theta} + \beta \Omega_r = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \Omega_r}{\partial \xi} + \frac{\partial \Omega_0^*}{\partial \theta} = 0 \quad (8)$$

$$\xi^* = \frac{\partial \Omega_0^*}{\partial \xi} - \frac{\partial \Omega_r}{\partial \theta} \quad (9)$$

其中 $\beta = 2 \frac{d\bar{\Omega}}{d\xi} + \frac{d^2 \bar{\Omega}}{d\xi^2} + \frac{df}{d\xi} = \frac{d\bar{\xi}_a}{d\xi}$, $\bar{\xi}_a$ 为基本气流的绝对涡度。由此可见基本气流的切变与 f 随纬度的变化相当。

三、螺旋行星波的非频散解

为求出(7)–(9)的非频散解,令: $\xi^* = Z(\varphi)$, $\Omega_r = \Omega_r(\varphi)$, $\Omega_0^* = \Omega_0(\varphi)$, $\varphi = m\xi + l\theta - \nu t$, $\eta = \frac{l\bar{\Omega} - \nu}{m} = \frac{l}{m}(\bar{\Omega} - C_0)$, $C_0 = \frac{\nu}{l}$, 在此 C_0 为螺旋行星波在 θ 方向传播的角速度。记“ $'$ ”为对 φ 的微商,将 $Z(\varphi)$, $\Omega_r(\varphi)$, $\Omega_0(\varphi)$ 代入(7)–(9)并消去变量 Z , Ω_0 后可得以下非线性常微分方程:

$$(\eta + \Omega_r) \Omega_r' - \tilde{\beta} \Omega_r = 0 \quad (10)$$

其中 $\tilde{\beta} = \frac{l\beta}{m(m^2 + l^2)}$, 此方程与文献[2]中的方程形式相同。在此与文献[1]中处理方法不同的是通过引入中间变量 φ 直接将非线性偏微分方程组化为非线性常微分方程。这样求非频散解的问题就归结为求(10)的周期解的问题。

下面首先讨论周期解存在的条件。令 $\Omega_r = Y$, 则(10)化为非线性常微分方程组:

$$\Omega_r' = Y \tag{11}$$

$$Y' = \frac{\tilde{\beta} \Omega_r}{\eta + \Omega_r} \tag{12}$$

这是一个二维自治系统,平衡点为 $Y=0, \Omega_r=0$

$$\frac{dY}{d\Omega_r} = \frac{\tilde{\beta} \Omega_r}{\eta + \Omega_r} \cdot \frac{1}{Y} \tag{13}$$

积分(13)得:

$$\frac{Y^2}{2} = C_0 + \tilde{\beta} \Omega_r - \tilde{\beta} \eta \ln|\eta + \Omega_r| \geq 0 \tag{14}$$

在此 C_0 为积分常数。

下面讨论平衡点周围相轨线的性质。令 $y_1 = C_0 + \tilde{\beta} \Omega_r, y_2 = \tilde{\beta} \eta \ln|\eta + \Omega_r|$, 于是有: $\frac{Y^2}{2} = y_1 - y_2 \geq 0, y_1$ 在 Ω_r, y 平面上为直线而 y_2 为对数曲线。要使(11)、(12)在平衡点周围有闭合相轨线(即(10)有周期解)就要求直线 y_1 与对数曲线 y_2 有二个交点, 记为 $\Omega_r^{(1)}, \Omega_r^{(2)}$, 且有 $\Omega_r^{(1)} < 0, \Omega_r^{(2)} > 0$ 。故当 $\eta < 0$ 时有 $\Omega_r < -\eta, \eta > 0$ 时有 $\Omega_r > -\eta$ (参见图1)。当 $\Omega_r = 0$ 时由 $Y^2 > 0$ 可得:

$$C_0 > \tilde{\beta} \eta \ln|\eta| \tag{15}$$

当 $\Omega_r = \Omega_r^{(1)}, \Omega_r^{(2)}$ 时 $Y^2 = 0$, 而在范围 $\Omega_r^{(1)} < \Omega_r < \Omega_r^{(2)}$ 中依(14)若要 $Y^2 > 0$ 则只能有 $\tilde{\beta} \eta < 0$ 。若 $\tilde{\beta} \eta > 0$ 则 y_1 与 y_2 不会有二个交点, 故(10)亦无周期解(参见图1)。

记 $F(\Omega_r) = \frac{Y^2}{2} = C_0 + \tilde{\beta} \Omega_r - \tilde{\beta} \eta \ln|\eta + \Omega_r|$ 。 $F(\Omega_r)$ 的极值点为 $\Omega_r = 0$, 此时

$$F(0) = C_0 - \tilde{\beta} \eta \ln|\eta| = \frac{Y_{max}^2}{2}, \text{ 即 } Y_{max} = \sqrt{2(C_0 - \tilde{\beta} \eta \ln|\eta|)}$$

由以上讨论可在 Y, Ω_r 相平面上作出相轨线。在第 I 象限内 $Y = \Omega_r' > 0, \Omega_r$ 从 0 增加到 $\Omega_r^{(2)}$ 时(在此范围内 $\Omega_r > 0$), 无论 $\tilde{\beta} > 0$ 或 $\tilde{\beta} < 0$ 均有 $Y' < 0$, 故 Y 从 Y_{max} 减少到 0, 在第 II 象限中, $\Omega_r' > 0, \Omega_r$ 从 $\Omega_r^{(1)}$ 增加到 0, Y 从 0 增加到 Y_{max} , 又因(14)式关于 Y 是对称的,

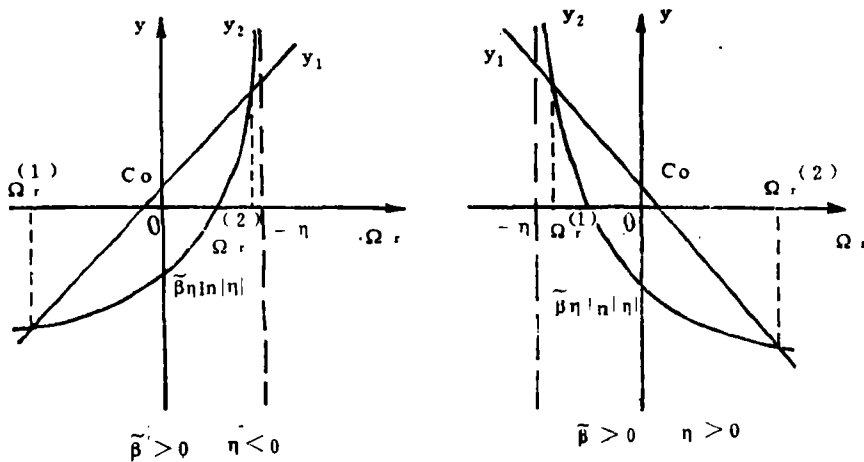


图 1 ($\tilde{\beta} \eta < 0$ 的情形)

故可作出闭合相轨线, 如图 2 所示。由此可得以下结论, 仅当 $\tilde{\beta}\eta < 0$ 也即 $\beta(\bar{\Omega} - C_0) < 0$ 时, 且 C_0 满足条件(15)方程(10)才可有周期解存在。通过运算可求得:

$$C_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{l}{m^2 + l^2} \right)^2 \xi_0^{*2} + \tilde{\beta}\eta \ln |\eta| \quad (16)$$

上式中 ξ_0^* 为 $\Omega_r = 0$ 处的扰动涡度, 可称之为特征 Ω_r 涡度, 故积分常数 C_0 可用特征涡度来表示。

在求具体周期解时, 注意到 $Y = \frac{d\Omega_r}{d\varphi}$ 后则须在(14)式中对 φ 积分。由于(14)式中含 $\ln|\eta + \Omega_r|$ 项, 直接积分有困难, 文献[2]中对该项直接进行了 Taylor 展开, 但这样做是要有条件的,

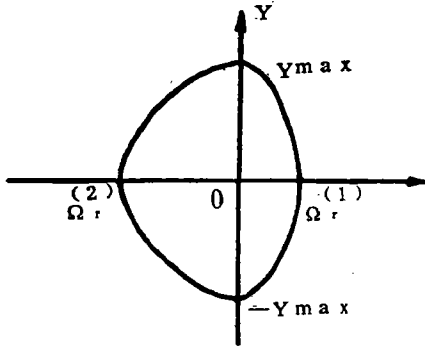


图 2

下面求此条件。

上面已知 $\tilde{\beta} > 0, \eta < 0$ 时 $\Omega_r < -\eta$; $\tilde{\beta} < 0, \eta > 0$ 时 $\Omega_r > -\eta$, 故为能进行 Taylor 展开则必须对积分常数 C_0 加上一些限制。考虑 $F(\Omega_r)$ 在 $\Omega_r = \eta$ 时的值: $F(\eta) = C_0 + \tilde{\beta}\eta - \tilde{\beta}\eta \ln |2\eta| = C_0 - \tilde{\beta}\eta \ln |\eta| + \tilde{\beta}\eta(1 - \ln 2)$ 。当 $\tilde{\beta} > 0, \eta < 0$ 时要求 $\eta < \Omega_r^{(1)}$, 即 $F(\eta) < 0$; 当 $\tilde{\beta} < 0, \eta > 0$ 时要求 $\eta > \Omega_r^{(2)}$, 即 $F(\eta) < 0$, 于是当 $\tilde{\beta}\eta < 0$ 时, 要使不等式 $|\Omega_r| < |\eta|$ 成立(此时方可对 $\ln|\eta + \Omega_r|$ 做 Taylor 展开), 则 C_0 须满足:

$$\tilde{\beta}\eta \ln |\eta| < C_0 < \tilde{\beta}\eta \ln |\eta| - \tilde{\beta}\eta(1 - \ln 2) \quad (17)$$

也即 ξ_0^* 须满足不等式:

$$0 < \xi_0^{*2} < -2 \cdot \left(\frac{m^2 + l^2}{l} \right)^2 \tilde{\beta}\eta(1 - \ln 2) \quad (18)$$

注意到上式对 ξ_0^{*2} 的上界的限制仅为保证 Taylor 展开能够进行, 以便求得解析形式的近似解。否则 Taylor 展开的条件不满足, 但由以上的分析可知周期解仍是存在的, 只不过此时由于(14)式积分困难, 解的解析形式难以求出。

四、椭圆余弦波解

1. 解的形式

由以上讨论当 ξ_0^* 满足(18)式时有 $\left| \frac{\Omega_r}{\eta} \right| < 1$, 此时可将 $\ln \left| 1 + \frac{\Omega_r}{\eta} \right|$ 进行 Taylor 展开, 略去 $O\left(\left| \frac{\Omega_r}{\eta} \right|^4\right)$ 后将其代入(14)式并注意到 $Y = \Omega_r'$ 后可得:

$$\Omega_r'^2 = -\frac{2\tilde{\beta}}{3\eta^2} \left(\Omega_r^3 - \frac{3}{2}\eta\Omega_r^2 - \frac{3\eta^2}{\tilde{\beta}} C_0^* \right) = \tilde{F}(\Omega_r) \quad (19)$$

其中 $C_0^* = C_0 - \tilde{\beta}\eta \ln |\eta| > 0$ 。由 $\frac{d\tilde{F}(\Omega_r)}{d\Omega_r} = 0$ 可解出: $\Omega_r = \eta, \Omega_r = 0$ 。则有 $\tilde{F}(\eta) = 2C_0^* + \frac{1}{3}\tilde{\beta}\eta, \tilde{F}(0) = 2C_0^* > 0$ 。若 $\tilde{F}(\eta) > 0$ 则 $\tilde{F}(\Omega_r) = 0$ 有一个实根, 此时不能保证解为有界周期函数。要使解为有界周期函数则要求 $\tilde{F}(\Omega_r) = 0$ 有三个实根, 即有 $\tilde{F}(\eta) < 0$, 亦即

$C_0^* < -\frac{1}{6}\tilde{\beta}\eta$ 。注意到 $-\frac{1}{6}\tilde{\beta}\eta < -\tilde{\beta}\eta(1-\ln 2)$ ，故 C_0 须满足：

$$\tilde{\beta}\eta \ln|\eta| < C_0 < \tilde{\beta}\eta \ln|\eta| - \frac{1}{6}\tilde{\beta}\eta \quad (20)$$

当(20)成立时三个实根 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ 分布如图 3 所示。

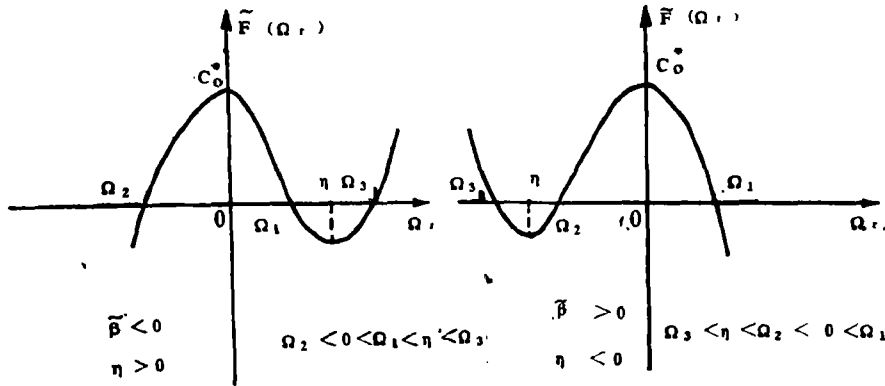


图 3

于是在 $\tilde{\beta} > 0$ 时的解为：

$$\Omega_r = \Omega_2 + (\Omega_1 - \Omega_2) \cdot \text{cn}^2 \left(\sqrt{\frac{\tilde{\beta}}{6\eta^2}(\Omega_1 - \Omega_3)} \cdot \left(m \ln \frac{r}{r_0} + l\theta - \nu t \right) \right) \quad (21)$$

在 $\tilde{\beta} < 0$ 时的解为：

$$\Omega_r = \Omega_1 - (\Omega_1 - \Omega_2) \text{cn}^2 \left(\sqrt{-\frac{\tilde{\beta}}{6\eta^2}(\Omega_3 - \Omega_2)} \cdot \left(m \ln \frac{r}{r_0} + l\theta - \nu t \right) \right) \quad (22)$$

其中 $\text{cn}^2(\)$ 为 Jacobi 椭圆余弦函数。这样我们就求得了一支椭圆余弦波解。由于原问题有周期解，现对方程作了近似后仍有周期解，故将这支椭圆余弦波解作为近似解是合理的。

2. 波长和振幅

由 Jacobi 椭圆函数的性质可知， θ 方向的角波长 Θ 为：

$$\Theta = \frac{2}{l} \left(-\frac{\tilde{\beta}}{6\eta^2}(\Omega_3 - \Omega_1) \right)^{-\frac{1}{2}} K(e_1), \quad \tilde{\beta} > 0 \quad (23)$$

$$\Theta = \frac{2}{l} \left(-\frac{\tilde{\beta}}{6\eta^2}(\Omega_3 - \Omega_2) \right)^{-\frac{1}{2}} K(e_2), \quad \tilde{\beta} < 0 \quad (24)$$

在此 $e_1 = \sqrt{\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{\Omega_1 - \Omega_3}}$ ， $e_2 = \sqrt{\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{\Omega_3 - \Omega_2}}$ ， $K(e) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 t}}$ ，而振幅 $\hat{\Omega} = \Omega_1 - \Omega_2$ 。

3. 波速公式

当 $\tilde{F}(\Omega_r) = 0$ 的三个实根 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ 求得后，令 $\Omega_1 = \gamma \hat{\Omega}$ ， $\Omega_2 = (\gamma - 1) \hat{\Omega}$ ， $\Omega_3 = \delta \hat{\Omega}$ ，

引进 $M = \frac{\eta}{\hat{\Omega}}$ 。由图 3 可见 $\Omega_2 < 0 < \Omega_1 < |\eta| < |\Omega_3|$, 从而可得 $\gamma - 1 < 0 < \gamma < |M| < |\delta|$ 。

现利用韦达定理(方程的根与系数的关系), 经一系列代数运算后可得: 当 $M > 0$, 即 $\eta < 0$ ($\tilde{\beta} > 0$) 时有:

$$\gamma = \frac{1}{2}(1+M) - \frac{1}{2}\sqrt{M^2 - \frac{1}{3}}, \quad \delta = \frac{M}{2} + \sqrt{M^2 - \frac{1}{3}}, \quad M > \frac{2}{3}, \quad \text{从而有: } \frac{1}{2}(1+M) - \frac{1}{2}\sqrt{M^2 - \frac{1}{3}} > \frac{1}{2},$$

由此可推得 $\frac{1}{2} < \gamma < \frac{2}{3}$, ($\eta > 0, \tilde{\beta} < 0$)。当 $M < 0$, 即 $\eta > 0$ ($\tilde{\beta} < 0$) 时有:

$$\gamma = \frac{1}{2}(1+M) + \frac{1}{2}\sqrt{M^2 - \frac{1}{3}}, \quad \delta = \frac{M}{2} - \sqrt{M^2 - \frac{1}{3}}, \quad M < -\frac{2}{3}, \quad \text{从而有: } \frac{1}{2}(1+M) + \frac{1}{2}\sqrt{M^2 - \frac{1}{3}} < \frac{1}{2},$$

由此可推出: $\frac{1}{3} < \gamma < \frac{1}{2}$, ($\eta < 0, \tilde{\beta} > 0$)。

注意到 $\tilde{F}(\Omega_1) = 0, \tilde{F}(\Omega_2) = 0$, 即有:

$$(\gamma \hat{\Omega})^3 - \frac{3}{2} \eta (\gamma \hat{\Omega})^2 - \frac{3 \eta^2}{\tilde{\beta}} C_0^* = 0 \quad (25)$$

$$[(\gamma - 1) \hat{\Omega}]^3 - \frac{3}{2} \eta [(\gamma - 1) \hat{\Omega}]^2 - \frac{3 \eta^2}{\tilde{\beta}} C_0^* = 0 \quad (26)$$

由(25)减(26), 整理后可得: $\eta = \frac{3\gamma^2 - 3\gamma + 1}{\frac{3}{2}(2\gamma - 1)} \hat{\Omega} = \sigma_1(\gamma) \hat{\Omega}$ 。由此可得非线性螺旋椭圆余

弦波第一波速公式:

$$C_0 = \bar{\Omega} - \frac{m}{l} \sigma_1(\gamma) \hat{\Omega} \quad (27)$$

在此 $\sigma_1(\gamma) = \frac{3\gamma^2 - 3\gamma + 1}{\frac{3}{2}(2\gamma - 1)}$, 由于分子恒大于 0, 故当 $\frac{1}{3} < \gamma < \frac{1}{2}$ 即 $\eta < 0, \tilde{\beta} > 0$ 时

有 $\sigma_1(\gamma) < 0$, 而当 $\frac{1}{2} < \gamma < \frac{2}{3}$ 时即 $\eta > 0, \tilde{\beta} < 0$ 时有 $\sigma_1(\gamma) > 0$ 。

第一波速公式表示 $\sigma_1(\gamma)$ 确定后波速与振幅的诊断关系。下面推导第二波速公式, 即波速与 β 的诊断关系。将 $\eta = \sigma_1(\gamma) \hat{\Omega}$ 代入(25)式, 整理后可得:

$$C_0 = \bar{\Omega} + \sigma_2(\gamma) \frac{\hat{\Omega}^2}{C_0^*} \frac{\beta}{m^2 + l^2} = \bar{\Omega} + \tilde{\sigma} \frac{\beta}{m^2 + l^2} \quad (28)$$

在此 $\sigma_2(\gamma) = -\frac{\gamma^2}{3} \left[\frac{\gamma}{\sigma_1(\gamma)} - \frac{3}{2} \right] = \frac{\gamma^2}{2} \cdot \frac{(\gamma - 1)^2}{3\gamma^2 - 3\gamma + 1} > 0, \tilde{\sigma} = \sigma^2(\gamma) \frac{\hat{\Omega}^2}{C_0^*}$ 。由(16)式及

C_0^* 的定义可知:

$$C_0^* = \frac{1}{2} \left(\frac{l}{m^2 + l^2} \right)^2 \xi_0^{*2} \geq 0, \tilde{\sigma} = \sigma_2(\gamma) \cdot 2 \left(\frac{m^2 + l^2}{l} \cdot \frac{\hat{\Omega}}{\xi_0^*} \right)^2 > 0. \quad (28) \text{式即为第二波速公式}$$

式。还可以证明,当 $\hat{\Omega} \rightarrow 0$ 时非线性波解退化为线性波解,椭圆余弦函数退化为三角函数,而第二波速公式退化为人们熟知的线性化的波速公式。

五、讨 论

非线性波动和线性波动不同的是迭加原理不成立,因而二个波解的线性迭加一般不再是原问题的解。上面求得的波解的波形不随时间改变,这就是非线性螺旋波的非频散解,也即非线性特征波动。下面讨论特征波动中各外参数 ($\bar{\Omega}$, β) 和波参数间的诊断关系。

1. 相速与基本气流的关系

由于中高纬绝大多数地区基本气流是西风, $\bar{\Omega} > 0$, 故以下仅讨论 $\bar{\Omega} > 0$ 的情形。由 $\beta(\bar{\Omega} - C_0) < 0$ 的条件即可得, $C_0 > \bar{\Omega}$, $\beta > 0$; $C_0 < \bar{\Omega}$, $\beta < 0$ 。当计及 f 随纬度的变化后由于 $\frac{df}{d\xi}$ 项量级较 $\frac{d\bar{\Omega}}{d\xi}$ 和 $\frac{d^2\bar{\Omega}}{d\xi^2}$ 项大,故总有 $\beta < 0$, 因而大气螺旋行星波总是落后于基本气流的,这是众所周知的观测事实,并与用线性化的模式在局地坐标系中得到的 Rossby 波相速的传播规律一致。

由第二波速公式(28)可由相速间接地推测出等位相线的形状。在(28)中 m, l 为给定的常数,且一般也可认为 $\tilde{\sigma}$ 和 β 沿 r 方向的变化在某个范围内不十分大。在以上假定下由(28)可知 C_0 与 $\bar{\Omega}$ 在 r 方向具有同样的分布,当 $\bar{\Omega}$ 随 r 增加时, C_0 也要随 r 增加。这时只有导式的波动才能得以稳定的维持,而曳式的波动则由于 C_0 随 r 增加,故在 r 大处波传播得快, r 小处传播得慢,从而使等位相线向导式波动的方向转化。若其它条件不变,一定时间后波动将会转变为导式。同理,当 $\bar{\Omega}$ 随 r 减小时只有曳式的波动得以稳定维持。由此可得以下重要结论:当 $\frac{d\bar{\Omega}}{d\xi} > 0$ 时非线性特征波动一定是导式的, $\frac{l}{m} < 0$; 而当 $\frac{d\bar{\Omega}}{d\xi} < 0$ 时则为曳式的, $\frac{l}{m} > 0$ 。西风急流以南的螺旋行星波因 $\frac{d\bar{\Omega}}{d\xi} < 0$ 故为曳式的,同时由于 $\beta < 0$ 而 $C_0 < \bar{\Omega}$, 即其移速要比基本气流慢。实际 500 hPa 图上西风急流以南槽脊线的走向和移速确是这种情况。

2. 振幅和相速的关系

非线性波动的一个重要特征就是波动的振幅与相速有关。对常见的西风急流以南的曳式螺旋行星波总有 $\beta < 0$, $\tilde{\beta} < 0$, $\frac{m}{l} > 0$, $\sigma_1(\gamma) > 0$, 因而 $\frac{l}{m} \cdot \frac{1}{\sigma_1(\gamma)} > 0$ 。以下仅讨论这种情形,由(27)式可见,当波动的振幅大时,其移速变慢,对振幅 $\hat{\Omega}$ 很大的波 C_0 可为 0, 即波静止,对 $\hat{\Omega}$ 再大的波则会倒退, $C_0 < 0$ 。设 $C_0 = 0$ 时的振幅为临界振幅 $\hat{\Omega}_c$, 则有 $\hat{\Omega}_c = \frac{l}{m} \frac{1}{\sigma_1(\gamma)} \bar{\Omega}$ 。引入 $\hat{\Omega}_c$ 后可得另一诊断关系,即第三波速公式:

$$C_0 = \frac{m}{l} \sigma_1(\gamma) \cdot (\hat{\Omega}_c - \hat{\Omega}) \quad (29)$$

由(29)知当 $\hat{\Omega} < \hat{\Omega}_c$ 时波前进, $\hat{\Omega} = \hat{\Omega}_c$ 时波静止, $\hat{\Omega} > \hat{\Omega}_c$ 时波后退。在实际天气中当波的振幅较大时(大槽大脊), 其移速较慢而小槽小脊移速较快, 当槽脊发展强烈时则会趋于准静止, 这些均与以上的结论相一致。但连续倒退的槽脊系统实际上几乎没有, 在此理论与实际不符的原因可能是该模式不适用于振幅非常大的系统, 这在前面模式的简化中已做了说明。

下面讨论临界振幅与基本气流的关系。由 $\hat{\Omega}_c$ 的定义并注意到 $\frac{l}{m} \cdot \frac{1}{\sigma_1(\gamma)} > 0$, 故当 $\frac{l}{m} \cdot \frac{1}{\sigma_1(\gamma)}$ 变化不大时若 $\bar{\Omega}$ 大, 即西风强盛, 则临界振幅 $\hat{\Omega}_c$ 也大, 此时波动的振幅不容易达到临界振幅, 故西风强盛时多移动性槽脊, 而当西风衰弱时, 则 $\hat{\Omega}_c$ 也小, 波动的振幅易于接近和达到临界振幅, 此时槽脊移动较慢或呈准静止。实际的情况也确是如此。由 $\hat{\Omega}_c$ 的定义还可见当 $\frac{\bar{\Omega}}{m \cdot \sigma_1(\gamma)}$ 变化不大时, 则 l 较小其临界振幅 $\hat{\Omega}_c$ 也较小, 此时波动的振幅易于接近或达到 $\hat{\Omega}_c$, 故此时波动移速较慢或呈准静止状态。 l 较小的波则波长较长, 实际上超长波的确移动缓慢或呈准静止。

3. 螺旋角和相速的关系

由于 $C_r = \frac{v}{m}$, $C_\theta = \frac{v}{l}$ (C_r, C_θ 为波在 r, θ 方向传播的相角速度) 故 $\frac{l}{m} = \frac{C_r}{C_\theta}$, 而 $\left| \frac{l}{m} \right|$ 反映了螺旋波螺旋角的大小。对曳式的大气螺旋行星波有 $l > 0, m > 0$, 由(27)式可见当 $\frac{l}{m}$ 大时若其它条件不变则 C_θ 也大, 这表明螺旋角大的螺旋波移速较快而螺旋角较小的波则移速较慢。在天气图上横槽(螺旋角小)的确移动较慢, 当槽线转直时槽东移的速度加快。

4. 波长和振幅的关系

将 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ 与 M, γ 和 δ 的关系代入(23)和(24)式, 则对 $\beta < 0$ 的曳式波动有:

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{2}{l} \left(-\frac{\tilde{\beta}}{6M^2} (\delta - \gamma + 1) \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\bar{\Omega}} \cdot K \left(\frac{1}{\sqrt{\delta - \gamma + 1}} \right) \\ &= 2 \sqrt{\frac{6M^2}{\beta(\gamma - \delta - 1)} \cdot \frac{m}{l} \left(1 + \frac{m^2}{l^2} \right)} \cdot \hat{\Omega} \cdot \\ &\quad K \left(\frac{1}{\sqrt{\delta - \gamma + 1}} \right) \end{aligned} \quad (70)$$

由上式可见角波长 Θ 与振幅 $\hat{\Omega}$ 的平方根成正比, 当其它条件不变时振幅越大的波其角波长也越大, 从而波长也越长。在天气图上的确振幅大的槽脊的波长也较长。

以上得到的结论大多与观测事实相一致的, 这表明在大气中这种非线性波动可能是真实存在的, 或者可以作为大气真实非线性波动的第一近似。这里还要指出的是用上述方法只能求得非线性波动的非频散解, 即波形不随时间变化的解, 而上述方法的局限性也在于此。要研究非线性波动波形的演变则还是采用截谱模式为好^[3]。

参 考 文 献

- [1] 曹庆存, 数值天气预报的数学物理基础, 一卷, 376, 1977, 科学出版社。
[2] 刘式适, 刘式达, 大气非线性波动方程的解, 气象学报, 40, No. 3, 279—288, 1982。
[3] Charney, J. G., and J. G. DeVoro, Multiple flow equilibria in the atmosphere and blocking, *J. Atmos. Sci.*, 36, No. 7, 1205—1216, 1979.

THE NONDISPERSION SOLUTION OF NONLINEAR SPIRAL PLANETARY WAVE

Zhang Ming Huang Sixun

(*Institute of Meteorology, P. L. A Air Force*)

Abstract

In this article, using simplified hydrodynamic equations of barotropic non-divergent atmosphere in cylindrical coordinates, the nondispersion conical solution of spiral planetary wave is discovered. The formula of wave speed and the diagnostician formula in relation to wave parameter are nearly conformed to observed facts. It might mean that the nondispersion conical wave really exists in the atmosphere. At least it might be a close approximation to the actual nonlinear wave.